ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Πίνακες Μέρος Α

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ορισμός Πίνακας $M \times N$ λέγεται μία διάταξη $M \cdot N$ στοιχείων ($M, N \in \mathbb{N}^*$) $a_{ij} \in F$ σε μορφή ορθογώνιου σχήματος σε M γραμμές και N στήλες

$$A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{M \times N} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, M \\ j = 1, \dots, N \end{matrix}$$

Γράφω ακόμα μερικές φορές A_{ij} για τα στοιχεία τού A, όταν δεν θέλω να εισάγω άλλο σύμβολο a_{ij}, δηλ. $A_{ij} = a_{ij}$.

Συμβολίζω $\mathcal{M}_{M \times N}(F)$ το σύνολων των $M \times N$ πινάκων στο F.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 3×4, δηλ. έχει 3 γραμμές και 4 στήλες

Συμβολίζουμε την i-γραμμή τού A ως A_i, δηλ. $A_i = (a_{i1} \dots a_{iN}) \in \mathcal{M}_{1 \times N}(F)$ και τη j-στήλη ως A^j, δηλ. $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{M \times 1}(F)$.

Έτσι, μπορούμε να γράφουμε

$$\underset{M \times N}{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_M \end{pmatrix} = (A^1 \dots A^N) ,$$

όπου στη γραφή αυτή, ο A εμφανίζεται ως "σύνθετος" πίνακας κατασκευασμένος από τους ειδικής μορφής "υποπίνακες" A_i, A^j.

π.χ. $A_1 = (1 \;\; 0 \;\; -3 \;\; 1)$, $A_2 = (2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 1)$, $A_3 = (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1)$ γραμμές

$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ στήλες

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = (A^1 \; A^2 \; A^3 \; A^4)$$

(Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης των A^j με δυνάμεις τού A γιατί θα φαίνεται από τα συμφραζόμενα).

2

__Άθροισμα__ $A+B$ των πινάκων $A=(a_{ij})_{M\times N}$, $B=(b_{ij})_{M\times N}$ λέγεται ο $M\times N$ πίνακας $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, δηλ. $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,\dots,M$, $j=1,\dots,N$

π.χ. $\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&2+1&5-1\\3+2&4+5&6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&9&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&5\end{pmatrix}$ δεν ορίζεται

Προφανώς, $A+B=\begin{pmatrix}A_1+B_1\\ \vdots\\ A_M+B_M\end{pmatrix}=\left(A^1+B^1\ \dots\ A^N+B^N\right)$

__Βαθμωτό γινόμενο__ λA του πίνακα $A=(a_{ij})_{M\times N}$ με το $\lambda\in F$ λέγεται ο $M\times N$ πίνακας $\lambda A=(\lambda a_{ij})$, δηλ. $(\lambda A)_{ij}=\lambda a_{ij}$.

Για $\lambda=-1$, το $(-1)A$ συμβολίζεται και $-A$.

π.χ. $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&6\end{pmatrix}$, $-2A=\begin{pmatrix}-2&-4&-10\\-6&-8&-12\end{pmatrix}$

Προφανώς, $\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_1\\ \vdots\\ \lambda A_M\end{pmatrix}=\left(\lambda A^1\ \dots\ \lambda A^N\right)$

__Γινόμενο__ $A\cdot B$ των πινάκων $A=(a_{ij})_{M\times N}$, $B=(b_{ij})_{N\times L}$ λέγεται ο $M\times L$ πίνακας $AB=\left(\sum_{k=1}^{N}a_{ik}b_{k\ell}\right)$, δηλ. $(A\cdot B)_{i\ell}=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}b_{k\ell}$

π.χ. $$\underset{2\times 3}{AB=\begin{pmatrix}2&5&3\\1&2&-1\end{pmatrix}}\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\2&1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\cdot1+5(-1)+3\cdot2 & 2\cdot0+5\cdot1+3\cdot1\\ 1\cdot1+2(-1)+(-1)\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot1+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}3&8\\-3&1\end{pmatrix}}$$

$$BA=\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\2&1\end{pmatrix}}\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}2&5&3\\1&2&-1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot2 & 1\cdot3+0(-1)\\ (-1)\cdot2+1\cdot1 & (-1)\cdot5+1\cdot2 & (-1)3+1\cdot(-1)\\ 2\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot5+1\cdot2 & 2\cdot3+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix}2&5&3\\-1&-3&-3\\5&12&5\end{pmatrix}}$$

$AB\neq BA$

π.χ. $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$

ισχύει $AB=\begin{pmatrix}A_1B^1&\dots&A_1B^L\\ \vdots&&\vdots\\ A_MB^1&\dots&A_MB^L\end{pmatrix}=(A_iB^\ell)$, δηλ. $(AB)_{i\ell}=A_iB^\ell$, $i=1,\dots,M$, $\ell=1,\dots,L$

[διότι $(AB)_{i\ell}=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}b_{k\ell}=a_{i1}b_{1\ell}+\dots+a_{iN}a_{N\ell}=(a_{i1}\dots a_{iN})\begin{pmatrix}b_{1\ell}\\ \vdots\\ b_{N\ell}\end{pmatrix}=A_iB^\ell$.

Άλλος τρόπος να δούμε το ίδιο πράγμα, για τον οποίο θα αποκτήσουμε μεγαλύτερη εμπιστοσύνη αργότερα στις πράξεις με σύνθετους πίνακες, είναι να γράψουμε $AB=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_M\end{pmatrix}(B^1\dots B^L)=\begin{pmatrix}A_1B^1&\dots&A_1B^L\\ \vdots&&\vdots\\ A_MB^1&\dots&A_MB^L\end{pmatrix}$]

<u>Μηδενικός</u> λέγεται ο πίνακας με στοιχεία $a_{ij} = 0 \in F$, $i=1,\dots,M$, $j=1,\dots,N$,

δηλαδή $\quad O = \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Κάθε διάσταση έχει το δικό της μηδενικό πίνακα, π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Ταυτοτικός</u> λέγεται ο πίνακας με στοιχεία $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \in F, & i=j \\ 0 \in F, & i \neq j \end{cases}$,

"δέλτα Kronecker"

$i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,N$, δηλ.

$$I = I_N = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{O} \\ & 1 & \\ \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Κάθε διάσταση έχει το δικό της ταυτοτικό πίνακα $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ισχύουν: $\underline{0A = \mathbb{O}}$, $\underline{\lambda \mathbb{O} = \mathbb{O}}$, $\underline{\lambda(-A) = (-\lambda)A = -(\lambda A) \equiv -\lambda A}$, $\underline{\lambda A = \mathbb{O} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } A = \mathbb{O}}$

Πράγματι, $(0A)_{ij} = 0 a_{ij} = 0 = \mathbb{O}_{ij} \Rightarrow 0A = \mathbb{O}$

$$(\lambda \mathbb{O})_{ij} = \lambda \mathbb{O}_{ij} = \lambda 0 = 0 = \mathbb{O}_{ij} \Rightarrow \lambda \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

$(-A)_{ij} = [(-1)A]_{ij} = (-1)a_{ij} = -a_{ij}$, άρα $[\lambda(-A)]_{ij} = \lambda(-A)_{ij} = \lambda(-a_{ij}) = (-\lambda)a_{ij} = [(-\lambda)A]_{ij}$

$= -(\lambda a_{ij}) = -(\lambda A)_{ij}$

$$\Rightarrow \lambda(-A) = (-\lambda)A = -(\lambda A)$$

$\lambda A = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda \neq 0$. Για $\lambda \neq 0$, $\mathbb{O} = \lambda^{-1}\mathbb{O} = \lambda^{-1}(\lambda A) = (\lambda^{-1}\lambda)A = 1A = A \Rightarrow A = \mathbb{O}$

Ισχύουν οι εξής: <u>ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων</u>

$(A+B)+C = A+(B+C)$ "προσεταιριστική"

$A+B = B+A$ "αντιμεταθετική"

$A+\mathbb{O} = A$, $\forall A$ "μηδενικό"

$\forall A$, $\exists -A$: $A+(-A) = \mathbb{O}$ "αντίθετο"

<u>ιδιότητες βαθμωτού γινομένου</u>

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$1A = A$

<u>ιδιότητες γινομένου πινάκων</u>

$A(B+C) = AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$ "επιμεριστική"

$(AB)C = A(BC)$ "προσεταιριστική"

$A \cdot I = I \cdot A = A$ "μοναδιαίο"

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Πράγματι, οι περισσότερες από τις παραπάνω ιδιότητες είναι προφανείς διότι π.χ. $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, $a_{ij}+0=a_{ij}$, $a_{ij}+(-a_{ij})=0$, $\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}$, $(\lambda+\mu)a_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}$, $\lambda(\mu a_{ij})=(\lambda\mu)a_{ij}$, $1a_{ij}=a_{ij}$

$$[A(B+C)]_{ij}=\sum_k a_{ik}(B+C)_{kj}=\sum_k a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_k a_{ik}b_{kj}+\sum_k a_{ik}c_{kj}=(AB)_{ij}+(AC)_{ij}$$
$$=(AB+AC)_{ij}\Rightarrow A(B+C)=AB+AC$$

$$(A\cdot I)_{ij}=\sum_k a_{ik}I_{kj}=\sum_k a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}=A_{ij}\Rightarrow A\cdot I=A$$

$$[\lambda(AB)]_{ij}=\lambda(AB)_{ij}=\lambda\sum_k a_{ik}b_{kj}=\sum_k(\lambda a_{ik})b_{kj}=\sum_k(\lambda A)_{ik}b_{kj}=[(\lambda A)B]_{ij}$$
$$\Rightarrow \lambda(AB)=(\lambda A)B$$

Η προσεταιριστική του γινομένου είναι πιο δύσκολη:

$G=AB=(g_{ij})$, $H=(AB)C=GC=(h_{ij})$, $D=BC=(d_{ij})$, $F=A(BC)=AD=(f_{ij})$

$$f_{ij}=\sum_k a_{ik}d_{kj}=\sum_k a_{ik}\sum_\ell b_{k\ell}c_{\ell j}=\sum_\ell\Big(\sum_k a_{ik}b_{k\ell}\Big)c_{\ell j}=\sum_\ell g_{i\ell}c_{\ell j}=h_{ij}$$
$$\Rightarrow F=H\Rightarrow A(BC)=(AB)C.$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

(1) Στους πίνακες μπορεί να είναι $A\neq\Theta$, $B\neq\Theta$, $AB=\Theta$.

π.χ. $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\neq\Theta$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-3\end{pmatrix}\neq 0$, $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\Theta$.

2) Στο γινόμενο πινάκων δεν ισχύει πάντα η διαγραφή, δηλ. από $AB=AC \not\Rightarrow B=C$.

π.χ. $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=AC$, $B\neq C$

3) $\exists A\neq\Theta \ :\ A'A\neq I,\ \forall A'$
$AA''\neq I,\ \forall A''$

(δηλαδή υπάρχουν μη-μηδενικοί πίνακες που δεν έχουν αντίστροφο)

Πράγματι, για το $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\neq\Theta$, υπάρχουν τα $B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-3\end{pmatrix}\neq\Theta$, $C=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&1\end{pmatrix}\neq 0$, με $AB=\Theta$, $CA=\Theta$.

Αν $\exists A'$ με $A'A=I$, τότε $\Theta=A'\Theta=A'(AB)=(A'A)B=IB=B$, άτοπο, άρα $\forall A'$ είναι $A'A\neq I$.

Αν $\exists A''$ με $AA''=I$, τότε $\Theta=\Theta A''=(CA)A''=C(AA'')=CI=C$, άτοπο, άρα $\forall A''$ είναι $AA''\neq I$.

<u>Ορισμός</u> Αν για τον $A \in M_{N\times N}(F)$, $\exists B \in M_{N\times N}(F)$ ώστε $AB = BA = I_N$, λέμε ότι ο B είναι ο αντίστροφος τού A και συμβολίζεται $B = A^{-1}$, δηλ. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Ακόμα λέμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος ή ομαλός ή μη-ιδιάζων.

*) Αν υπάρχει ο αντίστροφος B τού A, τότε αυτός ο B είναι μοναδικός. Πράγματι, έστω ότι πέραν του B με $AB = BA = I$, υπάρχει και ο C με $AC = CA = I$. Τότε $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$.

*) Πιο γενικά, αν για τον A υπάρχουν οι R, L με $AR = I = LA$ τότε $R = L = A^{-1}$. Πράγματι, $R = IR = (LA)R = L(AR) = LI = L$.

*) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος με $(A^{-1})^{-1} = A$. Πράγματι, από $AA^{-1} = A^{-1}A = I \Rightarrow A^{-1}A = AA^{-1} = I \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$.

*) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύει η διαγραφή τού A στο γινόμενο. Δηλαδή $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$.

<u>Άσκηση</u>

(α) Είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος;

Αν υπάρχει πίνακας $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ με $AB = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ άτοπο. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) Ο $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος ανν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ και ο αντίστροφος $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Πράγματι, έστω $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ με $AB = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta w \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{matrix}\right\} \text{ και } \left.\begin{matrix} \alpha y + \beta w = 0 \\ \gamma y + \delta w = 1 \end{matrix}\right\}$$

Τα συστήματα αυτά έχουν λύση ανν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Επομένως $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Επειδή
$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & \beta\delta - \beta\delta \\ -\alpha\gamma + \alpha\gamma & -\beta\gamma + \alpha\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & -\alpha\beta + \alpha\beta \\ \gamma\delta - \gamma\delta & -\beta\gamma + \alpha\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
άρα $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

$\underline{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$, $\underline{(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}}$

Πράγματι, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

$(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = (\lambda\lambda^{-1})\ AA^{-1} = I$

$(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = (\lambda^{-1}\lambda)\ (A^{-1}A) = I$

Σχόλια

(1) Από τις παραπάνω ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων και βαθμωτού γινομένου, παρατηρούμε ότι το $M_{M\times N}(F)$ είναι γραμμικός χώρος. Μία βάση του $M_{M\times N}(F)$ είναι το σύνολο

$$S=\{E_{ij}\in M_{M\times N}(F),\ i=1,\dots,M,\ j=1,\dots,N \ :\ (E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}\ ,\ k=1,\dots,M,\ j=1,\dots,N\}$$

επομένως $\dim M_{M\times N}(F)=MN$.

Πράγματι, το S είναι Γρ. Ανεξ. αφού $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}E_{ij}=0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}E_{ij}\right)_{kl}=0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}(E_{ij})_{kl}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}=0 \Rightarrow \lambda_{kl}=0 .$$

Επίσης, αν $A=(a_{ij})_{M\times N}$ τότε $A=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}E_{ij}$ αφού

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}a_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}a_{kl}\delta_{ki}\delta_{lj}=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}a_{kl}(E_{kl})_{ij}=\left(\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}a_{kl}E_{kl}\right)_{ij}$$

π.χ. το $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ είναι βάση του $M_{2\times 2}(F)$

2) Επειδή $\dim M_{1\times N}(F)=N=\dim F^N$, άρα $M_{1\times N}(F)\cong F^N$. Η απεικόνιση $M_{1\times N}(F)\to F^N$ με $(a_1\dots a_N)\to(a_1,\dots,a_N)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως, θεωρούμε ότι $M_{1\times N}(F)\equiv F^N$ και $(a_1\dots a_N)\equiv(a_1,\dots,a_N)$, δηλαδή οι πίνακες γραμμή συμπίπτουν με τις N-άδες.

Όμοια $\dim M_{M\times 1}(F)=M=\dim F^M$, άρα $M_{M\times 1}(F)\cong F^M$. Η απεικόνιση $M_{M\times 1}(F)\to F^M$ με $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_M\end{pmatrix}\to(a_1,\dots,a_M)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως, θεωρούμε κι εδώ ότι $M_{M\times 1}(F)\equiv F^M$ και $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_M\end{pmatrix}\equiv(a_1,\dots,a_M)$. Οι πίνακες $M\times 1$ λέγονται και στηλοδιανύσματα.

3) Αν $A=(a_{ij})_{M\times N}$, λόγω των παραπάνω ταυτίσεων είναι

$$A_i=(a_{i1}\dots a_{iN})\equiv(a_{i1},\dots,a_{iN})\in F^N,\quad i=1,\dots,M$$

$$A^j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{Mj}\end{pmatrix}\equiv(a_{1j},\dots,a_{Mj})\in F^M,\quad j=1,\dots,N$$

$$(A_i)_j=a_{ij}=(A^j)_i$$

4) Από τις παραπάνω ιδιότητες πρόσθεσης και γινομένου πινάκων, παρατηρούμε ότι το σύνολο των πινάκων $M_{N\times N}(F)$ είναι δακτύλιος με μονάδα (μη μεταθετικός) με μηδενοδιαιρέτες.

5) Ο δ.χ. $M_{N\times N}(F)$ με τη πράξη του γινομένου πινάκων είναι άλγεβρα.

Ισχύει $\underline{(AB)^j = AB^j}$, $A_{M\times N}$, $B_{N\times L}$

Πράγματι $[(AB)^j]_i = (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik} (B^j)_k = (AB^j)_i$

$\Rightarrow (AB)^j = AB^j$

Άσκηση

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του συνήθους γραμμικού χώρου $\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C})$ πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ (να συγκριθεί η απάντηση με την περίπτωση που ο χώρος $\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C})$ είναι πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$)

Έστω
$$E_{ij} \equiv \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} i \\ j \end{array} \quad , \quad e_{ij} \equiv \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} i \\ j \end{array} \quad , \; i=1,\dots,M \; , \; j=1,\dots,N$$

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad , \quad (e_{ij})_{kl} = i\,\delta_{ik}\delta_{jl}$$

Αν $A = (a_{kl}) \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C})$

τότε
$$a_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl} = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\,\delta_{ik}\delta_{jl} + i\sum_{i,j} \beta_{ij}\,\delta_{ik}\delta_{jl}$$
$$= \sum_{i,j} \alpha_{ij}(E_{ij})_{kl} + \sum_{i,j} \beta_{ij}(e_{ij})_{kl}$$
$$= \Big[\sum_{i,j}(\alpha_{ij}E_{ij} + \beta_{ij}e_{ij})\Big]_{kl} \Rightarrow A = \sum_{i,j}(\alpha_{ij}E_{ij} + \beta_{ij}e_{ij}) \quad , \; \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \langle E_{ij}, e_{ij} \rangle = (\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$$

Εξάλλου, $\sum_{i,j}(\lambda_{ij}E_{ij} + \mu_{ij}e_{ij}) = 0, \quad \lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \Big[\sum_{i,j}(\lambda_{ij}E_{ij} + \mu_{ij}e_{ij})\Big]_{kl} = 0 \Rightarrow \sum_{i,j}\big[\lambda_{ij}(E_{ij})_{kl} + \mu_{ij}(e_{ij})_{kl}\big] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j}\lambda_{ij}\,\delta_{ik}\delta_{jl} + i\sum_{i,j}\mu_{ij}\,\delta_{ik}\delta_{jl} = 0 \Rightarrow \lambda_{kl} + i\mu_{kl} = 0 \Rightarrow \lambda_{kl} = \mu_{kl} = 0$$

$\Rightarrow \{E_{ij}, e_{ij}\}$ Γρ. Ανξ. στο $\mathbb{R}$

Άρα $\{E_{ij}, e_{ij}\}$ βάση $(\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ και $\dim(\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C}))_{\mathbb{R}} = 2MN$

Αντίθετα, $\{E_{ij}\}$ βάση $(\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C}))_{\mathbb{C}}$ και $\dim(\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C}))_{\mathbb{C}} = MN$

<u>Ανάστροφος</u> A^T (ή A^t) ενός πίνακα $A=(a_{ij})_{M\times N}$ είναι ο $N\times M$ πίνακας που προκύπτει δι' εναλλαγής των γραμμών και στηλών τού A.

Αν $A^T=(b_{ij})_{N\times M}$ τότε $b_{ij}=a_{ji}$, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,M$

Μπορούμε να γράφουμε και $(A^T)_{ij}=A_{ji}=a_{ji}$, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,M$

π.χ. $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $(A^T)_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-3&3\end{pmatrix}=B$

$b_{12}=2$, $a_{21}=2$, $b_{12}=a_{21}$

$b_{31}=-3$, $a_{13}=-3$, $b_{31}=a_{13}$

$(A^T)_i=(A^i)^T$, $(A^T)^j=(A_j)^T$, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,M$

$A^T=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_M\end{pmatrix}^T=\left((A_1)^T\cdots(A_M)^T\right)$, $A^T=(A^1\cdots A^N)^T=\begin{pmatrix}(A^1)^T\\ \vdots\\ (A^N)^T\end{pmatrix}$

Πράγματι, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1N}\\ \vdots&&\\ a_{M1}&\cdots&a_{MN}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_M\end{pmatrix}=(A^1\cdots A^N)$, $A_i=(a_{i1}\cdots a_{iN})$, $i=1,\dots,M$

$A^j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{Mj}\end{pmatrix}$, $j=1,\dots,N$

$A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{M1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1N}&\cdots&a_{MN}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A^T)_1\\ \vdots\\ (A^T)_N\end{pmatrix}=\left((A^T)^1\cdots(A^T)^M\right)$

$(A^T)_i=(a_{1i}\cdots a_{Mi})=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{Mi}\end{pmatrix}^T=(A^i)^T$, $i=1,\dots,N$

$(A^T)^j=\begin{pmatrix}a_{j1}\\ \vdots\\ a_{jN}\end{pmatrix}=(a_{j1}\cdots a_{jN})^T=(A_j)^T$, $j=1,\dots,M$

$A^T=\left((A^T)^1\cdots(A^T)^M\right)=\left((A_1)^T\cdots(A_M)^T\right)$

$=\begin{pmatrix}(A^T)_1\\ \vdots\\ (A^T)_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A^1)^T\\ \vdots\\ (A^N)^T\end{pmatrix}$

<u>Σχόλιο</u>

$(A^TB)_{ij}=(A^i)^TB^j$, $A_{M\times N}$, $B_{M\times L}$

$(AB^T)_{ij}=A_i(B_j)^T$, $A_{M\times N}$, $B_{L\times N}$

Πράγματι, $(A^TB)_{ij}=(CB)_{ij}=C_iB^j=(A^T)_iB^j=(A^i)^TB^j$

$(AB^T)_{ij}=(AC)_{ij}=A_iC^j=A_i(B^T)^j=A_i(B_j)^T$

$\underline{(A+B)^T = A^T + B^T}$, $\underline{(\lambda A)^T = \lambda A^T}$, $\underline{(AB)^T = B^T A^T}$, $\underline{(A^T)^T = A}$, $\underline{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = A + B = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A^T = (f_{ij})$, $B^T = (g_{ij})$, $C^T = (h_{ij})$

$f_{ij} = a_{ji}$ $\quad g_{ij} = b_{ji}$ $\quad h_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = f_{ij} + g_{ij} \Rightarrow C^T = A^T + B^T$

$A = (a_{ij})$, $B = \lambda A = (b_{ij})$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $B^T = (\lambda A)^T = (f_{ij})$, $f_{ij} = b_{ji}$

$A^T = (c_{ij})$, $\lambda A^T = (d_{ij})$

$c_{ij} = a_{ji}$ $\quad d_{ij} = \lambda (A^T)_{ij} = \lambda c_{ij} = \lambda a_{ji} = b_{ji} = f_{ij} \Rightarrow \lambda A^T = (\lambda A)^T$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_j a_{ik} b_{kj}$

$A^T = (d_{ij})$, $B^T = (f_{ij})$, $C^T = (AB)^T = (h_{ij})$

$d_{ij} = a_{ji}$ $\quad f_{ij} = b_{ji}$ $\quad h_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k d_{kj} f_{ik} = \sum_k f_{ik} d_{kj}$

$\Rightarrow C^T = B^T A^T \Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$

$A = (a_{ij})$, $B = A^T = (b_{ij})$, $b_{ij} = a_{ji}$

$C = (A^T)^T = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ji} = a_{ij} \Rightarrow C = A \Rightarrow (A^T)^T = A$.

$AA^{-1} = I = A^{-1}A \Rightarrow (AA^{-1})^T = I^T = (A^{-1}A)^T \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I = A^T (A^{-1})^T \Rightarrow$

$\Rightarrow A^T (A^{-1})^T = I = (A^{-1})^T A^T \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

<u>Συζυγής</u> A^+ ενός πίνακα $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{C})$ είναι ο $N\times M$ πίνακας $A^+=(A^T)^*=(A^*)^T$, δηλαδή είναι ο μιγαδικός συζυγής τού ανάστροφου ή ισοδύναμα είναι ο ανάστροφος τού μιγαδικού συζυγούς.

Είναι $(A^+)_{ij}=[(A^*)^T]_{ij}=(A^*)_{ji}=(a^*_{ji})$

Προφανώς, αν $A\in\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ τότε $A^+=A^T$, δηλαδή η έννοια τού συζυγούς είναι γενίκευση της έννοιας τού ανάστροφου.

π.χ. $A=\begin{pmatrix}2 & i & 3\\ 2+i & -i & 2\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}2 & 2+i\\ i & -i\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $A^+=\begin{pmatrix}2 & 2-i\\ -i & i\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$$A^*=\begin{pmatrix}2 & -i & 3\\ 2-i & i & 2\end{pmatrix}$$

$$(A^+)_{12}=2-i\ ,\quad a^*_{21}=(2+i)^*=2-i\ ,\quad (A^+)_{12}=a^*_{21}$$

$$(A+B)^*=A^*+B^*\qquad (\lambda A)^*=\lambda^*A^*\qquad (AB)^*=A^*B^*\qquad (A^*)^*=A\qquad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$$

$$\underline{(A+B)^+=A^++B^+},\quad \underline{(\lambda A)^+=\lambda^*A^+},\quad \underline{(AB)^+=B^+A^+},\quad \underline{(A^+)^+=A},\quad \underline{(A^+)^{-1}=(A^{-1})^+}$$

$$(A+B)^+=[(A+B)^T]^*=(A^T+B^T)^*=(A^T)^*+(B^T)^*=A^++B^+$$

$$(\lambda A)^+=[(\lambda A)^T]^*=(\lambda A^T)^*=\lambda^*(A^T)^*=\lambda^*A^+$$

$$(AB)^+=[(AB)^T]^*=(B^TA^T)^*=(B^T)^*(A^T)^*=B^+A^+$$

$$(A^+)^+=\{[(A^T)^*]^*\}^T=(A^T)^T=A$$

$(A^+)^{-1}=[(A^*)^T]^{-1}=[(A^*)^{-1}]^T=[(A^{-1})^*]^T=(A^{-1})^+$ $\quad [\ AA^{-1}=I=A^{-1}A\Rightarrow (AA^{-1})^*=I=(A^{-1}A)^*$

$\Rightarrow A^*(A^{-1})^*=I=(A^{-1})^*A^* \Rightarrow (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*\,]$

[Είναι $(AB)^*=A^*B^*$ διότι $\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^*=\sum_k a^*_{ik}b^*_{kj}$]

Σύνθετοι πίνακες

Έστω ο 4×4 πίνακας $A=\begin{pmatrix}-1&2&0&1\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\1&1&-2&0\end{pmatrix}$ και ο 4×2 $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\2&0\\0&0\end{pmatrix}$.

) Είναι $AB=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&0\\-3&0\\-5&1\end{pmatrix}$. Θεωρώ τους εξής χωρισμούς των A, B σε υποπίνακες

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}-1&2&0&1\\0&1&-1&0\\\hdashline 0&1&-1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cc}0&1\\-1&0\\\hdashline 2&0\\0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Είναι $AB=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$

Επιχειρώ να εκτελέσω αυτό το γινόμενο τυπικά, ωσάν οι εμφανιζόμενοι υποπίνακες να ήταν απλά στοιχεία, προσέχοντας να μην πειράξω τη σειρά, δηλαδή

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_1+A_{12}B_2\\A_{21}B_1+A_{22}B_2\end{pmatrix}$$

Οι διάφοροι υποπίνακες έχουν τέτοιες διαστάσεις ώστε όλα τα εμφανιζόμενα γινόμενα και αθροίσματα έχουν νόημα, επομένως συνεχίζω κανονικά.

$$A_{11}B_1+A_{12}B_2=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&0\end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_1+A_{22}B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\-5&1\end{pmatrix}$$

Άρα $AB=\left(\begin{array}{cc}-2&-1\\-3&0\\\hdashline -3&0\\-5&1\end{array}\right)$ σε συμφωνία με τον απευθείας υπολογισμό.

) Αν $A=\left(\begin{array}{c:ccc}-1&2&0&1\\\hdashline 0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A'_{11}&A'_{12}\\A'_{21}&A'_{22}\end{pmatrix},\quad A'_{11}=-1,\ A'_{12}=(2\ \ 0\ \ 1)$

$$A'_{21}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad A'_{22}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cc}0&1\\\hdashline -1&0\\2&0\\0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B'_1\\B'_2\end{pmatrix},\quad B'_1=(0\ \ 1),\quad B'_2=\begin{pmatrix}-1&0\\2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}A'_{11}&A'_{12}\\A'_{21}&A'_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B'_1\\B'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A'_{11}B'_1+A'_{12}B'_2\\A'_{21}B'_1+A'_{22}B'_2\end{pmatrix}$$

$$A'_{11}B'_1+A'_{12}B'_2=(-1)(0\ \ 1)+(2\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}-1&0\\2&0\\0&0\end{pmatrix}=(0\ \ -1)+(-2\ \ 0)=(-2\ \ -1)$$

$$A'_{21}B'_1+A'_{22}B'_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1)+\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0\\-3&0\\-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\-3&0\\-5&1\end{pmatrix}$$

Άρα $AB=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&0\\-3&0\end{pmatrix}$ σε συμφωνία με τα προηγούμενα.

Ως προς την πράξη της πρόσθεσης, πάλι δικαιούμαι να χωρίζω τον πίνακα σε υποπίνακες και να προσθέτω τους υποπίνακες, εφόσον ορίζονται.

Το <u>συμπέρασμα</u> είναι ότι οποτεδήποτε ο χωρισμός πινάκων σε υποπίνακες είναι τέτοιος που οι πράξεις να έχουν νόημα, τότε το αποτέλεσμα βγαίνει σωστό.

<u>Ανάστροφος σύνθετου πίνακα</u>

Θα υπολογίσουμε το

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix}$$

μέσω διαχωρισμού σε υποπίνακες. Είναι

$$H = \begin{pmatrix} 3 & A \\ B & C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ X \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad A = (4 \;\; 5 \;\; 6), \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{pmatrix} 3^T & B^T \\ A^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + B^T X \\ A^T \cdot 4 + C^T X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + B^T X \\ 4A^T + C^T X \end{pmatrix}$$

$$B^T X = (1 \;\; 2 \;\; 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$4A^T = 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$C^T X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$12 + B^T X = 12 + 6 = 18$$

$$4A^T + C^T X = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Τελικά $H = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix}$ σε συμφωνία με τον απευθείας υπολογισμό.

Σημειώνουμε ότι όταν παίρνουμε τον ανάστροφο σύνθετου πίνακα, παίρνουμε κανονικά τον ανάστροφο σαν να ήταν οι υποπίνακες απλά στοιχεία, αλλά δεν ξεχνάμε να αναστρέψουμε και τους διάφορους υποπίνακες.

Με βάση την ταύτιση $\mathcal{M}_{1\times N}(F)\equiv F^N$, $\mathcal{M}_{M\times 1}(F)\equiv F^M$ δίνουμε τον ορισμό:

<u>Ορισμός</u>

Ονομάζουμε "χώρο γραμμών" του πίνακα $A\in\mathcal{M}_{M\times N}(F)$ ή "γραμμοχώρο" τού A τον υπόχωρο $\langle A_1,\dots,A_M\rangle\le F^N$, δηλαδή τον υπόχωρο εντός του F^N που παράγουν οι M γραμμές τού A.

Όμοια, ονομάζουμε "χώρο στηλών" του A ή "στηλοχώρο" του A τον υπόχωρο $\langle A^1,\dots,A^N\rangle\le F^M$, δηλαδή τον υπόχωρο εντός του F^M που παράγουν οι N στήλες τού A.

$r_\gamma(A)\equiv\dim\langle A_1,\dots,A_M\rangle$ "τάξη γραμμών" του A

$r_\sigma(A)\equiv\dim\langle A^1,\dots,A^N\rangle$ "τάξη στηλών" του A

<u>Πρόταση</u> $r_\gamma(A)=r_\sigma(A)$

<u>Απόδειξη</u>

Θα δείξουμε καταρχήν ότι $\forall A\in\mathcal{M}_{M\times N}(F)$ ισχύει $r_\gamma(A)\le r_\sigma(A)$.

Πράγματι, εκ του ορισμού τού $r_\sigma(A)$, θα υπάρχουν $B^\alpha\in\{A^1,\dots,A^N\}$, $\alpha=1,\dots,\sigma\equiv r_\sigma(A)$ ώστε $\langle B^1,\dots,B^\sigma\rangle=\langle A^1,\dots,A^N\rangle \Rightarrow$

$\exists\,\lambda_{\alpha j}\in F$: $A^j=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\lambda_{\alpha j}B^\alpha$, $j=1,\dots,N \Rightarrow (A^j)_i=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\lambda_{\alpha j}(B^\alpha)_i$, $i=1,\dots,M$

$\Rightarrow a_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\lambda_{\alpha j}b_{i\alpha}$, όπου $B^\alpha=\begin{pmatrix}b_{1\alpha}\\ \vdots\\ b_{M\alpha}\end{pmatrix}\Rightarrow a_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}b_{i\alpha}\lambda_{\alpha j}\Rightarrow (A_i)_j=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}b_{i\alpha}(L_\alpha)_j$,

όπου $L=(\lambda_{\alpha j})_{\sigma\times N}=\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_\sigma\end{pmatrix}$, $L_\alpha=(L_{\alpha 1}\dots L_{\alpha N})\in F^N \Rightarrow A_i=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}b_{i\alpha}L_\alpha \Rightarrow$

$A_i\in\langle L_1,\dots,L_\sigma\rangle \Rightarrow \langle A_1,\dots,A_M\rangle\le\langle L_1,\dots,L_\sigma\rangle\Rightarrow \dim\langle A_1,\dots,A_M\rangle\le\dim\langle L_1,\dots,L_\sigma\rangle\le\sigma$

$\Rightarrow r_\gamma(A)\le r_\sigma(A)$.

Θέτοντας τώρα όπου A τον A^T έχουμε $r_\gamma(A^T)\le r_\sigma(A^T)$. Αλλά προφανώς ισχύει εκ του ορισμού των r_γ, r_σ ότι $r_\gamma(A^T)=r_\sigma(A)$, $r_\sigma(A^T)=r_\gamma(A)$. Άρα $r_\sigma(A)\le r_\gamma(A)$. Τελικά $r_\gamma(A)=r_\sigma(A)$.

<u>Ορισμός</u> $r(A)\equiv r_\gamma(A)=r_\sigma(A)$ "τάξη" A

(δηλαδή τάξη ενός πίνακα είναι η διάσταση τού γραμμοχώρου ή η διάσταση τού στηλοχώρου του).

Προφανώς <u>$r(A_{M\times N})\le M,N$</u>

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $v_i\in F^M$, $i=1,\dots,N$ τότε $\dim\langle v_1,\dots,v_N\rangle=r(\overset{\downarrow}{v_1}\dots\overset{\downarrow}{v_N})$.

Πράγματι, αν θεωρήσω τον $M\times N$ πίνακα με στήλες τις M-άδες των N διανυσμάτων, τότε η τάξη του πίνακα αυτού είναι η διάσταση του χώρου που παράγουν τα $v_1,\dots,v_N$.

Ισχύει

$$r(A)+r(B)-N \leq r(A_{M\times N} B_{N\times L}) \leq \min(r(A), r(B))$$

$$r(A+B) \leq r(A)+r(B)$$

$$r(\lambda A) = r(A), \quad \lambda \neq 0$$

$$r(A^T) = r(A)$$

Ορισμός

Ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού πίνακα λέγεται το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$$

$\underline{tr(AB) = tr(BA)}$ $\qquad A, B \in M_{N\times N}(F)$

Πράγματι, αν $C = AB$ τότε $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, άρα

$$tr(AB) = tr(C) = \sum_i c_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki}.$$

Όμοια,

$$tr(BA) = \sum_{i,k} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k,i} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k,i} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki}$$

Άρα $tr(AB) = tr(BA)$

$\underline{tr(B^{-1}AB) = tr(A)}$ $\qquad A, B \in M_{N\times N}(F)$ (δηλαδή όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο trace)

Πράγματι, $tr(B^{-1}AB) = tr(BB^{-1}A) = tr(I_N A) = tr\, A$

<u>Κλιμακωτός</u> (ως προς τις γραμμές) λέγεται ένας πίνακας $A_{re} \in M_{m \times n}(F)$ αν ο πρώτος μη-μηδενικός όρος κάθε μη-μηδενικής γραμμής (οδηγός) μετατοπίζεται προς τα δεξιά τουλάχιστον κατά μία στήλη κατεβαίνοντας από γραμμή σε γραμμή και επιπλέον οι μηδενικές γραμμές εμφανίζονται μετά από τις μη-μηδενικές γραμμές.

Ένας κλιμακωτός (ως προς τις γραμμές) πίνακας λέγεται απλός κλιμακωτός (ως προς τις γραμμές) όταν οι οδηγοί είναι όλοι $1 \in F$ και στις στήλες των οδηγών δεν υπάρχει άλλο μη-μηδενικό στοιχείο.

π.χ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

οδηγοί

κλιμακωτός (όχι απλός κλιμακωτός)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οδηγοί

κλιμακωτός (όχι απλός κλιμακωτός)

οδηγοί

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

κλιμακωτός (όχι απλός κλιμακωτός)

οδηγοί

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

απλός κλιμακωτός (προφανώς και κλιμακωτός)

οδηγοί

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

κλιμακωτός (όχι απλός κλιμακωτός)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όχι κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

όχι κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

απλός κλιμακωτός

<u>$r(A_{re})$ = πλήθος μη-μηδενικών γραμμών</u>

διότι οι μη-μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα είναι Γρ. Ανεξ.

Τετραγωνικός λέγεται ένας πίνακας που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή $N=M$, δηλαδή $A=(a_{ij})_{N\times N}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN}\end{pmatrix}$

π.χ. $\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & -1+i & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3i & 1 & -i\end{pmatrix}}$, $\underset{1\times 1}{(4)}$

Τα στοιχεία της διαγωνίου του ανάστροφου A^T ενός τετραγωνικού πίνακα A συμπίπτουν με τα στοιχεία της διαγωνίου του A, διότι $(A^T)_{ii}=A_{ii}$

π.χ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A_{11}=1$, $A_{22}=3$

$A^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $(A^T)_{11}=1=A_{11}$, $(A^T)_{22}=3=A_{22}$

Τριγωνικός άνω λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας αν τα στοιχεία κάτω από την διαγώνιο είναι 0, δηλ. $a_{ij}=0$, $i>j$, δηλ.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & a_{NN}\end{pmatrix}$$

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Τριγωνικός κάτω λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας αν τα στοιχεία πάνω από την διαγώνιο είναι 0, δηλ. $a_{ij}=0$, $i<j$, δηλ.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN}\end{pmatrix}$$

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 6+i & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2\end{pmatrix}$

Μερικές φορές μιλάμε και για αυστηρά τριγωνικό άνω-κάτω πίνακα όταν $a_{ij}=0$, $i\geq j$ και $a_{ij}=0$, $i\leq j$ αντίστοιχα, δηλαδή όταν και η διαγώνιος μηδενίζεται.

π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & i & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

<u>Διαγώνιος</u> λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας αν τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι μηδενικά, δηλ. $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, δηλ. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{NN} \end{pmatrix}$

π.χ. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Συμμετρικός</u> λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας A αν ισχύει $A^T = A$.

Είναι $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ και προκειμένου για συμμετρικό $(A^T)_{ij} = A_{ij}$, άρα $A_{ji} = A_{ij}$ δηλαδή τα στοιχεία ενός συμμετρικού πίνακα είναι συμμετρικά ως προς την διαγώνιο.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ συμμετρικός διότι $A^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & i \\ 4 & i & 3 \end{pmatrix}$ συμμετρικός διότι $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & i \\ 4 & i & 3 \end{pmatrix} = A$

<u>Αντισυμμετρικός</u> λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας A αν ισχύει $A^T = -A$.

Είναι $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ και προκειμένου για αντισυμμετρικό $(A^T)_{ij} = -A_{ij}$, άρα $A_{ji} = -A_{ij}$, δηλαδή τα στοιχεία τα κατοπτρικά ως προς τη διαγώνιο είναι αντίθετα.

Ακόμα, $A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow A_{ii} = 0$, δηλαδή τα στοιχεία της διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδενικά

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ αντισυμμετρικός διότι $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = -A$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ αντισυμμετρικός διότι $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ όχι αντισυμμετρικός αφού τα διαγώνια δεν είναι μηδέν, και πράγματι $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -A$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων $N \times N$ είναι υπόχωρος του $M_{N\times N}$ διάστασης $\frac{N(N+1)}{2}$

2) A, B συμμετρικοί. AB συμμετρικός $\Leftrightarrow [A,B] \equiv AB - BA = 0$

3) Το σύνολο των αντισυμμετρικών πινάκων $N \times N$ είναι υπόχωρος του $M_{N\times N}$ διάστασης $\frac{N(N-1)}{2}$.

4) A, B αντισυμμετρικοί. AB αντισυμμετρικός $\Leftrightarrow \{A,B\} \equiv AB + BA = 0$.

5) $\forall A \in M_{N\times N}$ $\exists$ $S = S^T$, $T = -T^T$: $A = S + T$ $\quad [S = \frac{1}{2}(A + A^T),\ T = \frac{1}{2}(A - A^T)]$

Ερμιτιανός (ή αυτοσυζυγής) λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ αν ισχύει $A^+ = A \Leftrightarrow A^T = A^*$.

Είναι $(A^+)_{ij} = a_{ji}^*$ και προκειμένου για ερμιτιανό $(A^+)_{ij} = a_{ij}$, άρα $a_{ji} = a_{ij}^*$, δηλαδή τα στοιχεία τα κατοπτρικά ως προς τη διαγώνια είναι μιγαδικά συζυγή.

Ακόμα, $a_{ii} = a_{ii}^*$, δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία είναι κατ' ανάγκη πραγματικά.

Προφανώς, αν $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ τότε ο ορισμός του ερμιτιανού πίνακα ανάγεται στον ορισμό του συμμετρικού πίνακα.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}$ ερμιτιανός, διότι $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}$, $A^+ = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} = A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ 1-i & 2 & i \\ 5 & -i & 7 \end{pmatrix}$ ερμιτιανός, διότι $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 5 \\ 1+i & 2 & -i \\ 5 & i & 7 \end{pmatrix}$, $A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ 1-i & 2 & i \\ 5 & -i & 7 \end{pmatrix} = A$

$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$ όχι ερμιτιανός, διότι τα διαγώνια στοιχεία δεν είναι πραγματικά, και πράγματι $A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$, $A^+ = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 2 & -5i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 2 & 5i \end{pmatrix} = A$

όχι πολύ χρήσιμο

Αντιερμιτιανός λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ αν ισχύει $A^+ = -A \Leftrightarrow A^T = -A^*$.

Είναι $(A^+)_{ij} = a_{ji}^*$ και προκειμένου για αντιερμιτιανό $(A^+)_{ij} = -a_{ij}$, άρα $a_{ji} = -a_{ij}^*$.

Ακόμα, $a_{ii}^* = -a_{ii}$, δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία είναι φανταστικοί αριθμοί.

Προφανώς, αν $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ τότε ο ορισμός του αντιερμιτιανού πίνακα ανάγεται στον ορισμό του αντισυμμετρικού πίνακα.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2i & -4+i \\ 4+i & -i \end{pmatrix}$ αντιερμιτιανός, διότι $A^T = \begin{pmatrix} 2i & 4+i \\ -4+i & -i \end{pmatrix}$, $A^+ = \begin{pmatrix} -2i & 4-i \\ -4-i & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2i & -4+i \\ 4+i & -i \end{pmatrix} = -A$

__Ορθογώνιος__ λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{N\times N}(F)$ αν ισχύει $A^T A = I_N = A A^T \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

Προφανώς, αν A ορθογώνιο $\Rightarrow$ A^T ορθογώνιο, αφού $(A^T)^T A^T = AA^T = I$, $A^T (A^T)^T = A^T A = I$).

Είναι $(AA^T)_{ij} = \sum_k A_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_k a_{ik} a_{jk}$

$$(A^T A)_{ij} = \sum_k (A^T)_{ik} A_{kj} = \sum_k a_{ki} a_{kj}$$

και προκειμένου για ορθογώνιο πίνακα $(AA^T)_{ij} = \delta_{ij} = (A^T A)_{ij}$

$\Rightarrow \underline{\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} = \sum_k a_{ki} a_{kj}}$ (Ισοδύναμη συνθήκη ορθογωνίου πίνακα)

Ακόμα, θέτοντας $i=j$ προκύπτει $\sum_k (a_{ik})^2 = 1 = \sum_k (a_{ki})^2$, δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων κάθε γραμμής ισούται με 1, και επίσης το άθροισμα των τετραγώνων κάθε στήλης ισούται με 1.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} \sqrt3/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} \sqrt3/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sqrt3/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt3/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A A^T = \begin{pmatrix} \sqrt3/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt3/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

άρα ο A είναι ορθογώνιος. Πράγματι, βλέπουμε ότι για $i=1, j=2$ είναι

$$\sum_k a_{1k} a_{2k} = a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} = \frac{\sqrt3}{2}\left(-\frac12\right) + \frac12\left(\frac{\sqrt3}{2}\right) = 0$$

$$\sum_k a_{k1} a_{k2} = a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac12 + \left(-\frac12\right)\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 0$$

και επίσης $\sum_k (a_{1k})^2 = (a_{11})^2 + (a_{12})^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 + \left(\frac12\right)^2 = 1$

$$\sum_k (a_{k1})^2 = (a_{11})^2 + (a_{21})^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 + \left(-\frac12\right)^2 = 1$$

__Σημαντική παρατήρηση__ Αν θεωρήσω το standard ("Ευκλίδειο") εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων του $\mathbb{R}^N$, δηλαδή $(a_1,\dots,a_N)\cdot(b_1,\dots,b_N) = a_1 b_1 + \dots + a_N b_N = \sum_k a_k b_k$, τότε οι συνθήκες ορθογωνιότητας ενός πίνακα A γράφονται σε σχέση με τις γραμμές του (ή τις στήλες του) ως $\underline{A_i \cdot A_j = \delta_{ij} = A^i \cdot A^j}$, δηλαδή δύο διαφορετικές γραμμές-διανύσματα είναι "κάθετες" μεταξύ τους, ενώ μία γραμμή-διάνυσμα έχει "μέτρο" 1 (αντίστοιχα για τις στήλες). Πράγματι, $A_i \cdot A_j = \sum_k (A_i)_k (A_j)_k = \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ και

$$A^i \cdot A^j = \sum_k (A^i)_k (A^j)_k = \sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}.$$

π.χ. για το προηγούμενο παράδειγμα

$$A_1 \cdot A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$A^1 \cdot A^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\|A_1\|^2 = A_1 \cdot A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \rightsquigarrow \|A_1\| = 1.$$

$$\|A^1\|^2 = A^1 \cdot A^1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \rightsquigarrow \|A^1\| = 1.$$

Δηλαδή A ορθογώνιο $\Leftrightarrow$ $A_i \cdot A_j = \delta_{ij} = A^i \cdot A^j$ $\Leftrightarrow$ οι γραμμές/στήλες είναι ορθοκ. βάση F^N

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ ορθογώνιος διότι

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ή ακόμα $A_1 \cdot A_1 = 1$, $A_2 \cdot A_2 = 1$, $A_1 \cdot A_2 = 0$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ ορθογώνιο διότι

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ή ακόμα $A_1 \cdot A_1 = A_2 \cdot A_2 = A_3 \cdot A_3 = 1$, $A_1 \cdot A_2 = A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_3 = 0$

A, B ορθογώνιοι $\Rightarrow$ AB ορθογώνιο (ομάδα ορθογωνίων πινάκων)

Πράγματι, $(AB)^T(AB) = (B^T A^T)(AB) = B^T(A^T A)B = B^T I B = B^T B = I$

A ορθογώνιο $\Rightarrow$ $D(A) = \pm 1$

διότι $A^T A = I \Rightarrow D(A^T A) = D(I) \Rightarrow D(A^T)\, D(A) = 1 \Rightarrow D(A)\, D(A) = 1 \Rightarrow D(A)^2 = 1 \Rightarrow D(A) = \pm 1.$

$$A^T A = I_2 \iff A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Πράγματι, $A^T A = I_2 \iff A^i \cdot A^j = \delta_{ij}\,,\ i,j = 1,2 \iff A^1 \cdot A^1 = A^2 \cdot A^2 = 1,\ A^1 \cdot A^2 = 0$

$\iff a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0\,,$

απ' όπου προκύπτουν οι ζητούμενοι.

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ που επίσης προφανώς είναι ορθογώνιος και μπορεί να φαίνεται διαφορετικός από τους αρχικούς, στην πραγματικότητα δεν είναι διότι $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi = -\vartheta$.

Εξάλλου ο $\begin{pmatrix} -\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi-\vartheta) & \sin(\pi-\vartheta) \\ \sin(\pi-\vartheta) & -\cos(\pi-\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi = \pi - \vartheta$

<u>Μοναδιακός</u> (unitary) (όχι μοναδιαίος) λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ αν ισχύει $A^+A = I_N = AA^+ \Leftrightarrow$ $A^+ = A^{-1}$.

Είναι $$(AA^+)_{ij} = \sum_k A_{ik}(A^+)_{kj} = \sum_k a_{ik}\, a^*_{jk}$$

$$(A^+A)_{ij} = \sum_k (A^+)_{ik}\, A_{kj} = \sum_k a^*_{ki}\, a_{kj}$$

και προκειμένου για unitary πίνακα $(AA^+)_{ij} = \delta_{ij} = (A^+A)_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_k a_{ik}\, a^*_{jk} = \delta_{ij} = \sum_k a^*_{ki}\, a_{kj} \Rightarrow \Big(\sum_k a_{ik}\, a^*_{jk}\Big)^* = \delta_{ij} = \sum_k a^*_{ki}\, a_{kj}$$

$$\Rightarrow \underline{\sum_k a^*_{ik}\, a_{jk} = \delta_{ij} = \sum_k a^*_{ki}\, a_{kj}}$$ (Ισοδύναμη συνθήκη unitary πίνακα)

(Μπορώ βέβαια να το γράψω και ως $\sum_k a_{ik}\, a^*_{jk} = \delta_{ij} = \sum_k a_{ki}\, a^*_{kj}$)

Ακόμα, θέτοντας $i=j$ προκύπτει $\sum_k |a_{ik}|^2 = 1 = \sum_k |a_{ki}|^2$, δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων κάθε γραμμής ισούται με 1, και το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων κάθε στήλης ισούται με 1.

Προφανώς, αν $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, τότε ο ορισμός του unitary πίνακα ανάγεται στον ορισμό του ορθογωνίου πίνακα.

π.χ. $$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (A^T)^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$A^+A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$AA^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

άρα ο A είναι unitary. Επίσης, βλέπουμε ότι π.χ. για $i=1, j=2$

$$\sum_k a^*_{1k}\, a_{2k} = a^*_{11}a_{21} + a^*_{12}a_{22} + a^*_{13}a_{23} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^*\Big(-\frac{i}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^*\Big(\frac{i}{\sqrt{2}}\Big) + 0^*0 = 0,$$

$$\sum_k |a_{2k}|^2 = |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 = \Big|-\frac{i}{\sqrt{2}}\Big|^2 + \Big|\frac{i}{\sqrt{2}}\Big|^2 + 0^2 = 1.$$

Σημαντική παρατήρηση. Αν θεωρήσω το standard εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων του $\mathbb{C}^N$, δηλαδή $(a_1,\dots,a_N)\cdot(b_1,\dots,b_N) = a_1^* b_1 + \dots + a_N^* b_N = \sum_k a_k^* b_k \neq (b_1,\dots,b_N)\cdot(a_1,\dots,a_N)$, τότε οι συνθήκες unitarity ενός πίνακα A γράφονται σε σχέση με τις γραμμές του (ή τις στήλες του) ως $A_i \cdot A_j = \delta_{ij} = A^i \cdot A^j$, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο διαφορετικών γραμμών (ή στηλών) είναι μηδέν, ενώ το μέτρο μίας γραμμής - διανύσματος είναι 1 (αντίστοιχα για στήλες).

Πράγματι, $A_i \cdot A_j = \sum_k (A_i^*)_k (A_j)_k = \sum_k a_{ik}^* a_{jk} = \delta_{ij}$

$$A^i \cdot A^j = \sum_k [(A^i)^*]_k (A^j)_k = \sum_k a_{ki}^* a_{kj} = \delta_{ij}$$

π.χ. για το προηγούμενο παράδειγμα

$$A_1 \cdot A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)\cdot\left(-\frac{i}{\sqrt2}, \frac{i}{\sqrt2}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^*\left(-\frac{i}{\sqrt2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^*\left(\frac{i}{\sqrt2}\right) + 0^* 0 = 0$$

$$A_2 \cdot A_1 = \left(-\frac{i}{\sqrt2}, \frac{i}{\sqrt2}, 0\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right) = \left(-\frac{i}{\sqrt2}\right)^*\left(\frac{1}{\sqrt2}\right) + \left(\frac{i}{\sqrt2}\right)^*\left(\frac{1}{\sqrt2}\right) + 0^* 0 = 0$$

$$\|A_1\|^2 = A_1 \cdot A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right) = \left|\frac{1}{\sqrt2}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt2}\right|^2 + 0^2 = 1$$

$$\|A_2\|^2 = A_2 \cdot A_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt2}, \frac{i}{\sqrt2}, 0\right)\cdot\left(-\frac{i}{\sqrt2}, \frac{i}{\sqrt2}, 0\right) = \left|-\frac{i}{\sqrt2}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt2}\right|^2 + 0 = 1$$

Δηλαδή A unitary $\Leftrightarrow A_i \cdot A_j = \delta_{ij} = A^i \cdot A^j \Leftrightarrow$ οι γραμμές/στήλες είναι ορθοκαν. βάση $\mathbb{C}^N$

A, B unitary $\Rightarrow$ AB unitary (ομάδα των unitary πινάκων)

Πράγματι, $(AB)^+(AB) = (B^+A^+)(AB) = B^+(A^+A)B = B^+ I B = B^+B = I$

A unitary $\Rightarrow |D(A)| = 1$

Πράγματι, $D(A^*) = D(A)^*$, άρα από $A^+A = I \Rightarrow D(A^+A) = D(I) \Rightarrow D(A^+)D(A) = 1 \Rightarrow$ $D[(A^*)^T]\,D(A) = 1 \Rightarrow D(A^*)\,D(A) = 1 \Rightarrow D(A)^* D(A) = 1 \Rightarrow |D(A)|^2 = 1 \Rightarrow |D(A)| = 1$

<u>Ορισμός</u> Οι πίνακες $A, B \in M_{M\times N}(F)$ λέγονται ισοδύναμοι $(A \sim B)$ αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q ώστε $B = PAQ$.

(Επειδή από $B = PAQ \Rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1}$, άρα ο ορισμός των ισοδύναμων πινάκων είναι καλός ανεξάρτητα από τη σειρά που θα βάλουμε τους πίνακες).

<u>Ορισμός</u> Οι πίνακες $A, B \in M_{N\times N}(F)$ λέγονται όμοιοι $(A \approx B)$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$.

(Επειδή από $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1}$, άρα πάλι ο ορισμός των όμοιων πινάκων είναι καλός ανεξάρτητα από τη σειρά που θα βάλουμε τους πίνακες)

Είναι φανερό ότι αν δύο πίνακες είναι όμοιοι τότε είναι και ισοδύναμοι. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή πολλοί πίνακες είναι ισοδύναμοι με τον A, αλλά λίγοι είναι όμοιοι με τον A.

<u>Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $M_{M\times N}(F)$</u>

Πράγματι,

- Είναι $A = I_{M\times M}\, A\, I_{N\times N}$ και οι $I_{M\times M}$, $I_{N\times N}$ είναι αντιστρέψιμοι, άρα $A \sim A$
- Αν $A \sim B \Rightarrow B = PAQ \Rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1} \Rightarrow B \sim A$
- Αν $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow B = P_1AQ_1$, $C = P_2BQ_2 \Rightarrow C = (P_2P_1)A(Q_1Q_2)$, και επειδή οι P_2P_1, Q_1Q_2 είναι αντιστρέψιμοι $(P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}$, άρα $A \sim C$

<u>Η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $M_{N\times N}(F)$</u>

Πράγματι

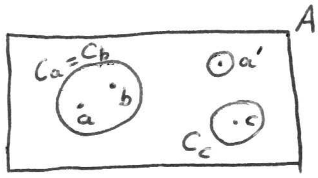
- Είναι $A = I_{N\times N}^{-1}\, A\, I_{N\times N} \Rightarrow A \approx A$
- Αν $A \approx B \Rightarrow B = P^{-1}AP \Rightarrow A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1} \Rightarrow B \approx A$
- Αν $A \approx B$, $B \approx C \Rightarrow B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ \Rightarrow C = Q^{-1}P^{-1}APQ \Rightarrow$
  $C = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \approx C$

<u>Ορισμός</u> Μία σχέση $\sim$ σ' ένα τυχόν σύνολο A λέγεται σχέση ισοδυναμίας όταν είναι ανακλαστική ($x \sim x$, $\forall x \in A$), συμμετρική ($x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$) και μεταβατική ($x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$)

$C_a \equiv \{x \in A : x \sim a\}$ "κλάσσεις ισοδυναμίας της $\sim$"

$C_a \neq \phi, \forall a \in A$; $\bigcup\limits_{a \in A} C_a = A$; $C_a \cap C_b = \phi$, $C_a \neq C_b$ ("διαμέριση του A")

Πράγματι, $\forall a \in A$ είναι $a \sim a \Rightarrow a \in C_a \Rightarrow C_a \neq \phi$.



Θα δείξουμε ότι αν $b \in C_a$ τότε $C_a = C_b$.

Πράγματι, αφού $b \in C_a \Rightarrow b \sim a \Rightarrow a \sim b$.

Αν $x \in C_b \Rightarrow x \sim b$ και αφού $b \sim a \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in C_a \Rightarrow C_b \subseteq C_a$

Αν $y \in C_a \Rightarrow y \sim a$ και αφού $a \sim b \Rightarrow y \sim b \Rightarrow y \in C_b \Rightarrow C_a \subseteq C_b$.

Επομένως $C_a = C_b$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $c \notin C_a$ τότε $C_a \cap C_c = \phi$.

Πράγματι, αν υποθέσω ότι $C_a \cap C_c \neq \phi \Rightarrow \exists d \in C_a \cap C_c \Rightarrow d \in C_a, d \in C_c$ $\Rightarrow C_d = C_a, \; C_d = C_c \Rightarrow C_a = C_c$. Αλλά $c \in C_c \Rightarrow c \in C_a$ άτοπο.

Τελικά, δείξαμε από τα παραπάνω ότι $\bigcup\limits_{a \in A} C_a = A$ και $C_a \cap C_c = \phi$, $C_a \neq C_c$

Άσκηση Αν $A^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{N\times N}(F) \Rightarrow (I+A)^{-1} = I - A + A^2 - + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1}$

Λύση $(I+A)(I - A + A^2 - + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1}) =$

$= I \cancel{- A} + \cancel{A^2} + \dots + \cancel{(-1)^{n-1}A^{n-1}} \cancel{+ A} - \cancel{A^2} + \dots + \cancel{(-1)^{n-2}A^{n-1}} + (-1)^{n-1}\underset{0}{A^n}$

$= I$

και $(I - A + A^2 + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1})(I+A) = \dots = I$.

Άρα $(I+A)^{-1} = I - A + A^2 + \dots + (-1)^{n-1}A^{n-1}$

Αν $B_{N\times N}$ τριγωνικός άνω με $b_{ii} = 1$, τότε ο $C \equiv B - I$ έχει $C^N = 0$, άρα με βάση το προηγούμενο, ο $I + C$ είναι αντιστρέψιμος, άρα ο B αντιστρέψιμος