ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Μιγαδικοί Αριθμοί

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

<u>Ορισμός</u> Σώμα F είναι ένα σύνολο με δύο πράξεις
$+ : F\times F \to F \ : (a,b) \to a+b$ ("πρόσθεση") και
$\cdot : F\times F \to F \ : (a,b) \to a\cdot b$ ("πολλαπλασιασμός"), έτσι ώστε

i) $a+(b+c) = (a+b)+c \ , \ \forall a,b,c\in F$

$a+b = b+a$

$\exists\, 0\in F : a+0 = a \ , \ \forall a\in F$

$\forall a\in F, \ \exists \ -a\in F : \ a+(-a) = 0$ (↑ αβελιανή ομάδα)

ii) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \ , \ (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$

iii) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (↑ δακτύλιος R)

$a\cdot b = b\cdot a$ (↑ μεταθετικός δακτύλιος)

$\exists\, 1\in F, \ 1\neq 0 : \ a\cdot 1 = a \ , \ \forall a\in F$ (↑ μεταθ. δακτύλιος με μονάδα)

$\forall a\in F\setminus\{0\} \ , \ \exists\, a^{-1}\in F : \ a\cdot a^{-1} = 1$ ($(F\setminus\{0\},\cdot)$ αβελιανή ομάδα)

Επομένως, σώμα είναι ένα σύνολο που τα στοιχεία του μπορούν να προστίθενται και να πολλαπλασιάζονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνήθεις κανόνες της αριθμητικής, και να γίνεται η διαίρεση (με μη-μηδενικά στοιχεία).

<u>Παρατήρηση:</u> (1) Τα ουδέτερα στοιχεία (0 μηδενικό, 1 μοναδιαίο) και τα συμμετρικά ($-a$ αντίθετο, a^{-1} αντίστροφο) των δύο πράξεων είναι μοναδικά. Πράγματι, π.χ. αν $\exists$ δύο μηδενικά $0, 0'$, τότε $0' = 0'+0 = 0+0' = 0$, ενώ αν $\exists$ δύο αντίστροφα a^{-1}, a_{-1}, τότε $a_{-1} = a_{-1}\cdot 1 = a_{-1}\cdot(a\cdot a^{-1}) = (a_{-1}\cdot a)\cdot a^{-1} = 1\cdot a^{-1} = a^{-1}$.

2) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0 \ , \ \forall a\in R$ (ο "απορροφητικό" στοιχείο)

Πράγματι, καταρχήν σημειώνουμε ότι σε κάθε ομάδα ισχύει η διαγραφή, δηλ. π.χ. αν $a+b = a+c$ τότε $b = 0+b = [(-a)+a]+b = (-a)+(a+b) = (-a)+(a+c) = [(-a)+a]+c = 0+c = c$. Έτσι, $\forall a,b\in R$ είναι $0+a\cdot b = a\cdot b = a\cdot(b+0) = a\cdot b + a\cdot 0 = a\cdot 0 + a\cdot b \Rightarrow a\cdot 0 = 0$
και όμοια $0+b\cdot a = b\cdot a = (b+0)\cdot a = b\cdot a + 0\cdot a = 0\cdot a + b\cdot a \Rightarrow 0\cdot a = 0$

<u>Παραδείγματα</u>

1) $F = \{0,1\} \equiv \mathbb{Z}_2$, $0+0=0$, $1+1=0$, $1+0=0+1=1$, $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0$, $1\cdot 1 = 1$ είναι σώμα

2) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ με συνήθη $+,\cdot$ είναι σώματα

3) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ όχι σώμα, αφού μόνο τα ± 1 έχουν αντίστροφο [είναι όμως μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Από ένα μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα χωρίς μηδενοδιαιρέτες ("ακέραια περιοχή", δηλ. $a\cdot b = 0 \Rightarrow a=0$ ή $b=0$) μπορούμε να ορίσουμε ένα σώμα που να περιέχει την περιοχή αυτή (π.χ. όπως από το $\mathbb{Z}$ φτιάχνουμε τα κλάσματα $\mathbb{Q}$)].

(*) Ένα σώμα είναι ακέραια περιοχή, δηλ. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $b = 0$, $\forall a, b \in F$.
Πράγματι, αν $a \cdot b = 0$ τότε ή $a = 0$ ή $a \neq 0$. Αν $a = 0$ τότε πράγματι $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Αν $a \neq 0$ τότε $\exists\, a^{-1}$, άρα $a \cdot b = 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0$ $\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$.

*) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $\forall a, b \in R$

Πράγματι, $0 = a \cdot 0 = a \cdot [b + (-b)] = a \cdot b + a \cdot (-b) \Rightarrow a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

$$0 = 0 \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b \Rightarrow (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

*) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$, $\forall a, b, c \in R$

Πράγματι, $a \cdot (b - c) = a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$

$$(b - c) \cdot a = [b + (-c)] \cdot a = b \cdot a + (-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

<u>Σχόλιο</u> Σε ένα δακτύλιο R μπορούμε να ορίσουμε το $na \in R$ ως

$$na \equiv \begin{cases} a + \cdots + a, & n > 0 \\ (-a) + \cdots + (-a), & n < 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

και έτσι ορίζεται με "φυσικό" τρόπο μια εξωτερική πράξη στο R, δηλ.
$\cdot : \mathbb{Z} \times R \to R : (n, a) \to na$.

<u>Άσκηση</u> $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, $a \oplus b = a+b+1$, $a \odot b = a+b+ab$ μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

<u>Άσκηση</u> $(\mathcal{R}, *, \circ)$, $\mathcal{R} = \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$(a,b) * (a',b') = (a+a', b+b')$, $(a,b) \circ (a',b') = (aa', bb')$

μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

<u>Άσκηση</u> $(\mathbb{Z} \times \overset{\text{π δακτύλιος}}{\mathcal{R}}, \oplus, \odot)$, $(n,a) \oplus (m,b) = (n+m, a+b)$

$(n,a) \odot (m,b) = (nm, a \cdot b + nb + ma)$

μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

<u>Άσκηση</u> $(\mathbb{R}, \circ, *)$, $a \circ b = a+b-1$, $a * b = ab - a - b + 2$ σώμα

<u>Άσκηση</u> $(F, \underbrace{+, \cdot}_{\text{συνήθη}})$, $F = \{a + b\sqrt{\lambda}$, $a,b \in Q$, $\lambda \in Q_+$ σταθερό , $\sqrt{\lambda} \notin Q\}$ σώμα

<u>Άσκηση</u> $(F, \oplus, \odot)$, $F = \{z = (x,y),\ x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$z \oplus z' = (x+x', y+y')$, $z \odot z' = (xx' - yy', xy' + x'y)$

σώμα (των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$)

<u>Ορισμός</u> Μια σχέση $\le$ σ' ένα τυχόν σύνολο A λέγεται διάταξη, όταν είναι ανακλαστική ($x\le x,\ \forall x\in A$), αντισυμμετρική ($x\le y,\ y\le x \Rightarrow x=y$) και μεταβατική ($x\le y,\ y\le z \Rightarrow x\le z$).

Το $(A,\le)$ λέγεται διατεταγμένο σύνολο, π.χ. το σύνηθες $\le$ στο $\mathbb{R}$, το $\subseteq$ στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A.

Γράφουμε $x<y$ αν $x\le y$, $x\ne y$. Επίσης γράφουμε $y\geq x$ αντί για $x\le y$.

Αν περαιτέρω, $\forall x,y\in A$ είναι ή $x\le y$ ή $y\le x$ τότε έχουμε "ολική" διάταξη.

Π.χ. το $(\mathbb{R},\le)$ ολικά διατεταγμένο, ενώ το $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ όχι ολικά διατεταγμένο αφού $\{x\}\not\subseteq\{y\}$, $\{y\}\not\subseteq\{x\}$ με $x,y\in A$, $x\neq y$.

<u>Ορισμός</u> Ένα σώμα F λέγεται ολικά διατεταγμένο όταν έχει μία ολική διάταξη η οποία είναι συμβατή με τις πράξεις του F, δηλ. $\forall x,y,z\in F$,

$$x\le y \Rightarrow x+z\le y+z$$

$$x\le y,\ 0\le z \Rightarrow x\cdot z\le y\cdot z$$

Π.χ. το σώμα $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ολικά διατεταγμένο.

Ως γνωστόν, το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γενικότερα,

κ) <u>Σ' ένα ολικά διατεταγμένο σώμα F, το x^2+1 δεν έχει ρίζα.</u>

Πράγματι, αν $x\in F$ είναι ή $x\geq 0$ ή $x\le 0$.

Αν $x\geq 0$ τότε από $0\le x \Rightarrow 0\cdot x\le x\cdot x \Rightarrow x^2\geq 0$

Αν $x\le 0 \Rightarrow x+(-x)\le 0+(-x) \Rightarrow 0\le -x \Rightarrow -x\geq 0 \Rightarrow (-x)^2\geq 0 \Rightarrow (-x)\cdot(-x)\geq 0$
$\Rightarrow -[-(x\cdot x)]\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 0$

Άρα, $\forall x\in F$ είναι $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 0+1 \Rightarrow x^2+1\geq 1$.

Αν υπήρχε $x\in F$ με $x^2+1=0$ τότε $0\geq 1$ που είναι άτοπο. Άρα το $x^2+1=0$ δεν έχει ρίζα.

[Θα δείξουμε ότι το $0\geq 1$ είναι άτοπο (επομένως, το σωστό είναι $1\geq 0$, και επειδή $1\neq 0$, άρα $1>0$). Πράγματι, έστω ότι ισχύει $0\geq 1 \Rightarrow$
$0+(-1)\geq 1+(-1) \Rightarrow -1\geq 0 \Rightarrow (-1)\cdot(-1)\geq 0\cdot(-1) \Rightarrow 1\geq 0$ άτοπο.]

Η αδυναμία αυτή της μη-ύπαρξης ριζών διαφόρων πολυωνύμων στο σώμα $\mathbb{R}$ αντιμετωπίζεται με την αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{R}$ στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Ορισμός Σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ z = (x,y) \,,\; x,y \in \mathbb{R} \}$, εφοδιασμένο με την πράξη της "πρόσθεσης" $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ και του "πολλαπλασιασμού" $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2 \,,\; x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Συμβολίζουμε $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$.

Πρόταση Το $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι σώμα.

Απόδειξη

Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι σώμα, αποδεικνύονται εύκολα οι περισσότερες ιδιότητες του σώματος. Δείχνουμε μόνο την ιδιότητα περί ύπαρξης μοναδιαίου στοιχείου και την ιδιότητα του αντιστρόφου στοιχείου.

Έστω $z \cdot e = z$ με $z = (x,y)$, $e = (a,b)$. Έχουμε $(x,y)\cdot(a,b) = (x,y)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} xa - yb = x \\ ya + xb = y \end{cases}$. Αν $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0) \Leftrightarrow z \neq 0$ τότε

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}{x^2+y^2} = 1$, $b = \dfrac{\begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix}}{x^2+y^2} = 0$, δηλ. $e = (1,0) = 1$. Αν $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow z = 0$ τότε $z \cdot e = 0 \cdot e = 0 = z$. Άρα, $\forall z \in \mathbb{C}$ είναι $z \cdot e = z$, επομένως, το $e = (1,0) = 1$ είναι το μοναδιαίο.

Αν $z = (x,y) \neq 0$, τότε το $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} \,,\, \dfrac{-y}{x^2+y^2} \right)$ έχει

$$z \cdot z^{-1} = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \,,\, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = (1,0) = 1$$

Παρατήρηση

$\varphi : F_1 \to F_2$, $\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{aligned}$ $\forall a, b \in F_1$ ("ομομορφισμός" σωμάτων)

(Γενικά ομομορφισμός λέγεται μια απεικόνιση που διατηρεί τις πράξεις μιας αλγεβρικής δομής)

$\Rightarrow \varphi(F_1)$ υποσώμα του F_2 , φ 1-1

(άρα το F_1 ταυτίζεται με το $\varphi(F_1)$, δηλ. $F_1 \equiv \varphi(F_1)$)

Πράγματι, θα δείξουμε ότι το $\varphi(F_1)$ είναι σώμα. Οι ιδιότητες προσεταιριστικότητας, μεταθετικότητας και επιμεριστικότητας στο $\varphi(F_1)$ είναι προφανείς, αφού ισχύουν στο $F_2 \supseteq \varphi(F_1)$. Επίσης, το $\varphi(F_1)$ είναι → μένει να δείξουμε ότι $0, 1 \in \varphi(F_1)$, ότι $-x \in \varphi(F_1)$, $\forall x \in \varphi(F_1)$, και ότι $x^{-1} \in \varphi(F_1)$, $\forall x \in \varphi(F_1) \setminus \{0\}$.

Είναι $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \varphi(F_1)$

$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 1 \Rightarrow 1 \in \varphi(F_1)$

Αν $x \in \varphi(F_1)$, $\exists\, a \in F_1 : x = \varphi(a)$, άρα $0 = \varphi(0) = \varphi(-a + a) = \varphi(-a) + \varphi(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\varphi(a) = \varphi(-a) \Rightarrow -x = \varphi(-a) \Rightarrow -x \in \varphi(F_1)$.

Αν $x \in \varphi(F_1) \setminus \{0\}$, $\exists\, a \in F_1 \setminus \{0\} : x = \varphi(a)$, άρα $1 = \varphi(1) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \Rightarrow x^{-1} = \varphi(a^{-1}) \Rightarrow x^{-1} \in \varphi(F_1)$.

Έστω ότι $\varphi(a) = \varphi(b)$ με $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = 0 \Rightarrow \varphi(a) + \varphi(-b) = 0 \Rightarrow \varphi(a-b) = 0$ με $a - b \neq 0$ $\Rightarrow \varphi(c) = 0$ με $c = a - b \neq 0$ $\Rightarrow$ $0 = \varphi(c) \cdot \varphi(c^{-1}) = \varphi(c \cdot c^{-1}) = \varphi(1) = 1$ άτοπο. Άρα φ 1-1.

(*) Το σώμα $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με ένα υποσώμα του $\mathbb{C}$, δηλαδή $x = (x, 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$°

Πράγματι, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \to \varphi(x) = (x, 0)$ είναι "εμφύτευση" (= ομομορφισμός και 1-1) του σώματος $\mathbb{R}$ στο σώμα $\mathbb{C}$, οπότε τότε το υποσώμα $\varphi(\mathbb{R})$ έχει όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ και είναι ισοπληθικό με αυτό, άρα πράγματι μπορούμε να γράφουμε $\mathbb{R} = \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$ και $x = (x, 0)$.

Είναι $\varphi(x + x') = (x + x', 0) = (x, 0) + (x', 0) = \varphi(x) + \varphi(x')$

$\varphi(x \cdot x') = (x \cdot x', 0) = (x, 0) \cdot (x', 0) = \varphi(x) \cdot \varphi(x')$

δηλ. φ ομομορφισμός. Άρα $\varphi(\mathbb{R})$ υποσώμα [πράγματι, βλέπουμε απλά ότι $\varphi(\mathbb{R})$ "κλειστό" ως προς $+, \cdot$, αφού $(x,0) + (x',0) = (x+x', 0) \in \varphi(\mathbb{R})$ και $(x,0) \cdot (x',0) = (xx', 0) \in \varphi(\mathbb{R})$, και ότι $0 = (0,0) \in \varphi(\mathbb{R})$, $1 = (1,0) \in \varphi(\mathbb{R})$, $-(x,0) = (-x, 0) \in \varphi(\mathbb{R})$, $(x,0)^{-1} = (\frac{1}{x}, 0) \in \varphi(\mathbb{R})$]

Επίσης, αν $\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow (x, 0) = (x', 0) \Rightarrow x = x' \Rightarrow \varphi$ 1-1

[Η απεικόνιση $\varphi(x) = (0, x)$ δεν είναι ομομορφισμός, αφού $\varphi(x \cdot x') = (0, x \cdot x')$ $\neq (0, x) \cdot (0, x') = (-xx', 0)$]

$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda, 0) \cdot (x, y) = (\lambda x - 0y, \lambda y + 0x) = (\lambda x, \lambda y)$

$i \equiv (0, 1)$ "φανταστική μονάδα"

$i^2 = -1$

$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0$, δηλαδή το πολυώνυμο $x^2 + 1$ έχει στο $\mathbb{C}$ ρίζες $\pm i$ (άρα το $\mathbb{C}$ δεν είναι ολικά διατεταγμένο σώμα).

$(0, y) = iy = yi$, $y \in \mathbb{R}$

$iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$, $yi = (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y)$

$I \equiv \{ iy = (0, y), y \in \mathbb{R} \}$ "σύνολο φανταστικών αριθμών"

$(x, y) = x + iy$

$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1 \}$

Μέσω της γραφή αυτής $z = x + iy$ (που θα υιοθετήσουμε εφεξής) το άθροισμα γράφεται ως

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ σε συμφωνία με το συμβολισμό του ζεύγους.

Επίσης

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2 - ixy + ixy + y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Στο λογισμό συνήθως χρησιμοποιούμε τη μορφή $x+iy$, ενώ η μορφή (x,y) χρησιμοποιείται για τη γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών στο επίπεδο.

Αν $z = x + iy$ συμβολίζουμε $\quad \mathrm{Re}\, z = x \quad$ "πραγματικό μέρος" του z

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Im}\, z = y \quad$ "φανταστικό μέρος" του z

Άρα $\quad z = \mathrm{Re}\, z + i\ \mathrm{Im}\, z$

<u>Ορισμός</u> Αν $z = x+iy$, ο συζυγής z^* του z είναι $z^* = x - iy \; (=\bar{z})$.

Επειδή $(z^*)^* = (x-iy)^* = x+iy = z$, οι z, z^* λέγονται συζυγείς.

<u>Ιδιότητες συζυγούς</u>

$$(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \quad \left[\text{διότι } z_1^* = \left(z_2 \frac{z_1}{z_2}\right)^* = z_2^* \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* \rightsquigarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}\right]$$

$$(z^{-1})^* = (z^*)^{-1} \quad , \quad (z^\kappa)^* = (z^*)^\kappa \, , \; \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+z^*) \quad , \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-z^*)$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^* = z \quad , \quad z \in I \Leftrightarrow z^* = -z$$

$[$διότι $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \operatorname{Re} z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z+z^*) \Leftrightarrow z = z^*$
$z \in I \Leftrightarrow z = i \operatorname{Im} z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z-z^*) \Leftrightarrow z = -z^*]$

<u>Πρόταση</u> Οι μιγαδικές ρίζες πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ τότε

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)^* = 0$$

$$\Rightarrow (a_n z^n)^* + (a_{n-1} z^{n-1})^* + \dots + (a_1 z)^* + a_0^* = 0$$

$$\Rightarrow a_n (z^n)^* + a_{n-1} (z^{n-1})^* + \dots + a_1 z^* + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_n (z^*)^n + a_{n-1} (z^*)^{n-1} + \dots + a_1 z^* + a_0 = 0 \, ,$$

δηλαδή το z^* ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με το z, άρα τα z, z^* εμφανίζονται ως ρίζες ανά ζεύγη.

Ορισμός Μέτρο (ή απόλυτη τιμή ή νόρμα) $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x+iy$ λέγεται ο μη-αρνητικός αριθμός

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z z^*} \equiv r$$

Ιδιότητες μέτρου

$$|z| = |z^*| = |-z| = |-z^*|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad , \quad |z^\kappa| = |z|^\kappa \quad , \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2Re(z_1^* z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2Re(z_1 z_2^*)$$

$$-|z| \le Re\, z \le |Re\, z| \le |z| \quad , \quad -|z| \le Im\, z \le |Im\, z| \le |z|$$

$$|z| \le |x| + |y|$$

$$|z_1| - |z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| - \dots - |z_n| \le |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

$$|z_1 w_1 + \dots + z_n w_n|^2 \le (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)(|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2)$$ "ανισότητα Cauchy-Schwarz"

↳ Η ισότητα ισχύει ανν $\lambda z_i = \mu w_i^*$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$

Απόδειξη

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(z_1 z_2)^* = z_1 z_2 z_1^* z_2^* = (z_1 z_1^*)(z_2 z_2^*) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1| = \left|z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}\right| = |z_2|\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1+z_2)(z_1+z_2)^* = (z_1+z_2)(z_1^*+z_2^*) = z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 z_2^*)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + x \ge \sqrt{x^2} + x = |x| + x = \begin{cases} x+x, & x \ge 0 \\ -x+x, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \ge 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - x \ge \sqrt{x^2} - x = |x| - x = \begin{cases} x-x, & x \ge 0 \\ -x-x, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x\ge 0 \\ -2x, & x<0 \end{cases} \ge 0$$

Άρα $-\sqrt{x^2+y^2} \le x \le \sqrt{x^2+y^2} \iff -|z| \le Re\, z \le |z|$

Επίσης $|z|^2 = x^2+y^2 \ge x^2 \Rightarrow |z| \ge |x| \Rightarrow |z| \ge |Re\, z|$

Άρα $-|z| \le Re\, z \le |Re\, z| \le |z|$

$$|z|^2 = x^2+y^2 \le x^2+y^2+2|xy| = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |z| \le |x| + |y|$$

• Είναι $-|z_1 z_2^*| \le Re(z_1 z_2^*) \le |z_1 z_2^*|$

$$\Rightarrow -2|z_1||z_2| \le 2Re(z_1 z_2^*) \le 2|z_1||z_2|$$

$$\Rightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2| \le |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1 z_2^*) \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$\Rightarrow (|z_1|-|z_2|)^2 \le |z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$$

$$\Rightarrow ||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Βάζοντας όπου z_2 το $-z_2$ είναι

$$||z_1|-|-z_2|| \le |z_1+(-z_2)| \le |z_1|+|-z_2| \Leftrightarrow ||z_1|-|z_2|| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Άλλος τρόπος: Έστω $\lambda \equiv \dfrac{|z_1+z_2|}{z_1+z_2}$, οπότε $|\lambda|=1$. Αν $\lambda z_1=(x,y)$, $\lambda z_2=(x',y')$, τότε $|z_1+z_2| = \lambda(z_1+z_2) = \lambda z_1+\lambda z_2 = (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$. Αλλά $|z_1+z_2| \in \mathbb{R} \Rightarrow y+y'=0 \Rightarrow |z_1+z_2| = (x+x', 0) = x+x' \le |x+x'| \le |x|+|x'| =$
$= |Re(\lambda z_1)| + |Re(\lambda z_2)| \le |\lambda z_1| + |\lambda z_2| = |\lambda|\,|z_1| + |\lambda|\,|z_2| = |z_1|+|z_2|$.

Εξάλλου στη σχέση $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, βάζοντας $z_1=x$, $z_2=iy$ έχουμε $|x+iy| \le |x|+|iy| = |x|+|y|$.

· $|z_1+z_2+\dots+z_n| = |z_1+(z_2+\dots+z_n)| \geq |z_1| - |z_2+\dots+z_n|$.
Αλλά $|z_2+\dots+z_n| \le |z_2|+\dots+|z_n| \Rightarrow -|z_2+\dots+z_n| \geq -(|z_2|+\dots+|z_n|)$
Άρα $|z_1+z_2+\dots+z_n| \geq |z_1| - (|z_2|+\dots+|z_n|)$

· Έστω $A \equiv |z_1|^2+\dots+|z_n|^2$, $B \equiv |w_1|^2+\dots+|w_n|^2$, $C \equiv z_1 w_1+\dots+z_n w_n$. Θα δείξουμε ότι $|C|^2 \le AB$.
Αν $B=0 \Leftrightarrow w_1=\dots=w_n=0$ τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα $(0=0)$.
Αν $B>0$, είναι

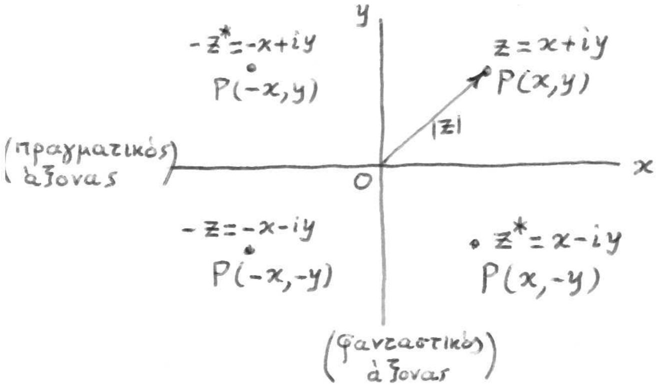
$$\sum_{i=1}^n |Bz_i - Cw_i^*|^2 = \sum_{i=1}^n (Bz_i - Cw_i^*)(Bz_i - Cw_i^*)^* = \sum_{i=1}^n (Bz_i - Cw_i^*)(Bz_i^* - C^* w_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(B^2|z_i|^2 - BC^* z_i w_i - BC w_i^* z_i^* + |C|^2|w_i|^2\right)$$
$$= B^2 \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - BC^* \sum_{i=1}^n z_i w_i - BC\left(\sum_{i=1}^n z_i w_i\right)^* + |C|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2$$
$$= B^2 A - BC^*C - BCC^* + |C|^2 B = B^2 A - 2B|C|^2 + B|C|^2 = B^2 A - B|C|^2 =$$
$$= B(AB - |C|^2) \geq 0 \Rightarrow AB - |C|^2 \geq 0.$$

Θα εξετάσουμε τώρα πότε ισχύει η ισότητα.
Έστω $C^2 = AB$. Για $B=0 \Leftrightarrow w_i=0$ η ισότητα ισχύει τετριμμένα, και ισχύει $\lambda \cdot z_i = \mu \cdot 0$, $\lambda=0, \mu\neq 0$, άρα ισχύει $\lambda \cdot z_i = \mu \cdot w_i$, $\lambda=0, \mu\neq 0$.

Για $B>0$ έχουμε $B(AB-|C|^2)=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |Bz_i - Cw_i^*|^2 = 0 \Rightarrow Bz_i - Cw_i^* = 0 \Rightarrow$ "
$\Rightarrow Bz_i = Cw_i^*$, $B \neq 0$.

Αντίστροφα, έστω $\lambda z_i = \mu w_i^*$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε $z_i = \frac{\mu}{\lambda} w_i^*$, άρα
$A = |\frac{\mu}{\lambda} w_1^*|^2 + \cdots + |\frac{\mu}{\lambda} w_n^*|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} B$, $C = \frac{\mu}{\lambda} w_1^* w_1 + \cdots + \frac{\mu}{\lambda} w_n^* w_n = \frac{\mu}{\lambda}(|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2)$
$= \frac{\mu}{\lambda} B$, άρα $C^2 - AB = \frac{\mu^2}{\lambda^2} B^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2} B^2 = 0 \Rightarrow C^2 = AB$. Όμοια αν $\mu \neq 0 \Rightarrow C^2 = AB$.

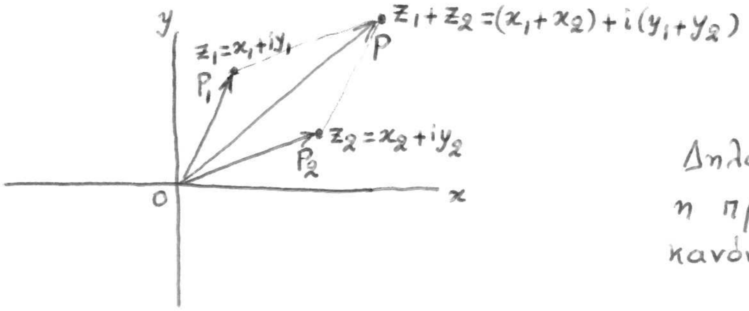
Αφού ένας μιγαδικός αριθμός $z = x+iy$ μπορεί να ταυτοποιηθεί με το ζεύγος (x,y), άρα μπορεί να γίνει γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο διδιάστατο επίπεδο Oxy. Δηλαδή ο z ταυτίζεται με το σημείο P με συντεταγμένες (x,y) ή επίσης ταυτίζεται με την επιβατική ακτίνα $\vec{OP}$.



Μιγαδικό επίπεδο

(Διάγραμμα Argand)
Ελβετός μαθηματικός
1806

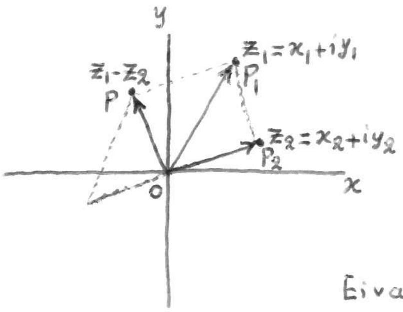
Είναι $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = |\vec{OP}|$, δηλαδή το $|z|$ είναι το μήκος του ανύσματος $\vec{OP}$.



$$z_1 + z_2 = \vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OP}$$

Δηλαδή η πρόσθεση μιγαδικών είναι η πρόσθεση διανυσμάτων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Η ανισότητα $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ είναι η γεωμετρική τριγωνική ανισότητα.



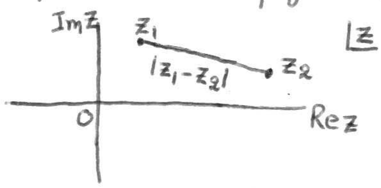
$$z_1 - z_2 = \vec{OP_1} - \vec{OP_2} = \vec{OP_1} + (-\vec{OP_2}) = \vec{OP}$$

Είναι $|z_1 - z_2| = |\vec{OP}| = |\vec{P_2P_1}| = d(P_1, P_2) = d(z_1, z_2)$

ή ακόμα $|z_1 - z_2| = |(x_1+iy_1) - (x_2+iy_2)| = |(x_1-x_2) + i(y_1-y_2)| =$

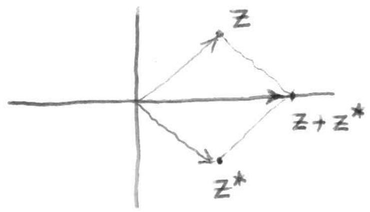
$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = d(P_1, P_2)$

Δηλαδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών εκφράζει γεωμετρικά την απόσταση τους στο μιγαδικό επίπεδο

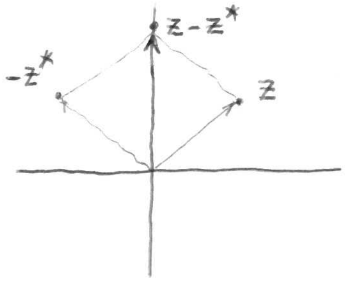


Η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου μιγαδικών επιτυγχάνεται με χρήση των πολικών μορφών τους.

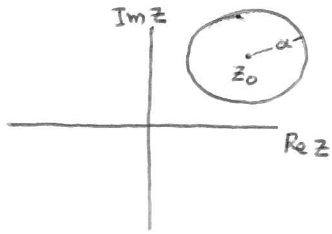
Άλλα παραδείγματα γεωμετρικής αναπαράστασης



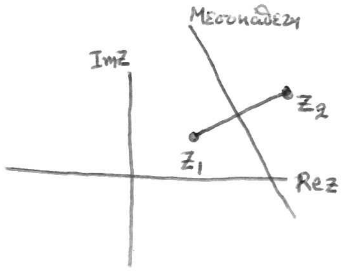
Πράγματι $z+z^* \in \mathbb{R}$, αφού $z+z^*=2\,\mathrm{Re}\,z$



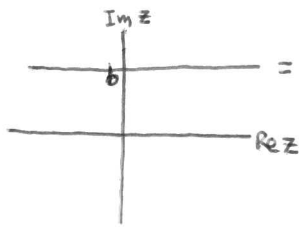
Πράγματι $z-z^* \in I$, αφού $z-z^*=2i\,\mathrm{Im}\,z$



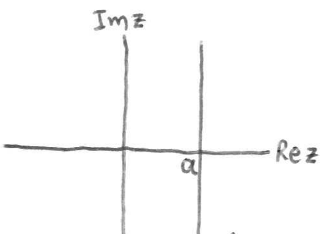
$C(z_0,a)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|=a\}$



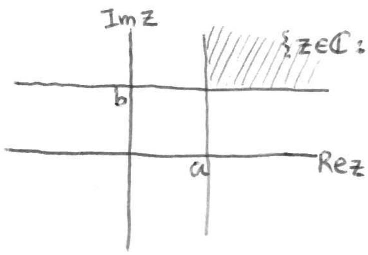
Μεσοκάθετη $=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_1|=|z-z_2|\}$



$=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z=b\}$



$=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z=a\}$



$\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z\geq a,\ \mathrm{Im}\,z\geq b\}$

<u>Ορισμός</u> Όρισμα (ή φάση) του $z=x+iy$ λέγεται κάθε αριθμός ϑ (ή $\arg z$) τέτοιος ώστε $\cos\vartheta = \frac{x}{|z|}$, $\sin\vartheta = \frac{y}{|z|}$.

Επειδή $\left|\frac{x}{|z|}\right| = \frac{|x|}{|z|} = \frac{|Re z|}{|z|} \le 1$, $\left|\frac{y}{|z|}\right| = \frac{|y|}{|z|} = \frac{|Im z|}{|z|} \le 1$, $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{|z|^2} = 1$, άρα, πράγματι οι αριθμοί $\frac{x}{|z|}$, $\frac{y}{|z|}$ μπορούν να αποτελέσουν το συνημίτονο και ημίτονο κάποιου αριθμού ϑ.

Προφανώς, αν ϑ όρισμα τού z, τότε και $\vartheta + 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ όρισμα τού z.

π.χ. για τον $z = 2 + i\,2\sqrt{3}$ είναι $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$, άρα $\cos\vartheta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\sin\vartheta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα τα $\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \pm 2\pi, \frac{\pi}{3} \pm 4\pi, \ldots$ αποτελούν ορίσματα του z.

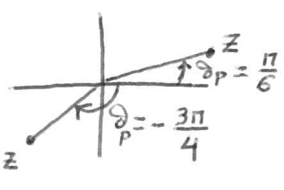
Εναλλακτικά, για την εύρεση του ϑ μπορεί να χρησιμοποιηθεί το $\tan\vartheta = \frac{y}{x}$. Επειδή όμως $\tan\vartheta = \tan(-\pi+\vartheta) = \tan(\pi+\vartheta)$, πρέπει να προσέξουμε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται ο z ώστε να βρούμε τη φάση του, και να μην κάνουμε λάθος βρίσκοντας τη φάση του $-z$.

<u>Ορισμός</u> Κύριο (ή πρωτεύον) όρισμα (ή φάση) του $z=x+iy$ λέγεται ο μοναδικός αριθμός ϑ_p (ή $\mathrm{Arg}\,z$) τέτοιος ώστε

$$\cos\vartheta_p = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\vartheta_p = \frac{y}{|z|}, \quad -\pi < \vartheta_p \le \pi .$$

Προφανώς $\vartheta = \vartheta_p + 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ή $\arg z = \mathrm{Arg}\,z + 2k\pi$

Γεωμετρικώς, $\vartheta_p = (\widehat{Ox, z})$



Ισχύει $\underline{z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = r(\cos\vartheta_p + i\sin\vartheta_p)}$.

Η έκφραση $r(\cos\vartheta_p + i\sin\vartheta_p)$ λέγεται "τριγωνομετρική μορφή" τού z, ενώ το ζεύγος (r, ϑ_p) λέγεται "πολικές συντεταγμένες" του z. Πολλές φορές για τις πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο σε άλλες θεωρήσεις πέραν των μιγαδικών αριθμών - μιγαδικής ανάλυσης θεωρείται ως βασικό διάστημα το $[0, 2\pi)$. Στους μιγαδικούς ωστόσο, συνήθως χρησιμοποιείται το $(-\pi, \pi]$. Η διαφορά δεν είναι ουσιώδης.

$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2, \quad \vartheta_1 - \vartheta_2 = 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Πράγματι, αν $z_1 = z_2 \Rightarrow r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) = r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1\cos\vartheta_1 = r_2\cos\vartheta_2 \\ r_1\sin\vartheta_1 = r_2\sin\vartheta_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2\cos^2\vartheta_1 = r_2^2\cos^2\vartheta_2 \\ r_1^2\sin^2\vartheta_1 = r_2^2\sin^2\vartheta_2\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_1 = r_2 \Rightarrow \begin{cases}\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2\\ \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_2\end{cases}$$

$\Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$

Το αντίστροφο είναι προφανές, αφού για $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi \Rightarrow \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2,\ \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_2$
$\Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2$.

$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)]$, $\quad z_1\cdots z_n = r_1\cdots r_n[\cos(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n) + i\sin(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n)]$

Πράγματι,

$$z_1z_2 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\, r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$
$$= r_1r_2[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)]$$
$$= r_1r_2[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)]$$

$\arg(z_1\cdots z_n) = \arg z_1 + \cdots + \arg z_n + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$

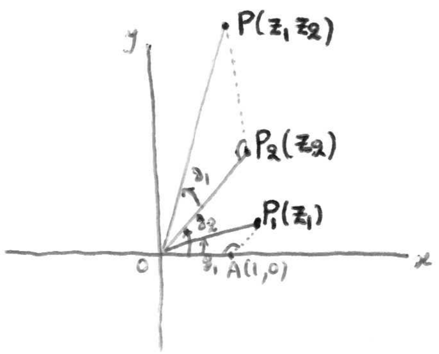
$\exists k\in\mathbb{Z}: \quad \mathrm{Arg}(z_1\cdots z_n) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \cdots + \mathrm{Arg}\,z_n + 2k\pi$

Προφανώς, το $\mathrm{Arg}\,z_1 + \cdots + \mathrm{Arg}\,z_n$ μπορεί να μην ανήκει στο $(-\pi,\pi]$, επομένως χρειάζεται εν γένει να μετατοπιστούμε τον κατάλληλο αριθμό βημάτων 2π για να βρεθούμε στο $(-\pi,\pi]$.

$z^n = r^n[\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)]$, $n\in\mathbb{N}$ "τύπος DeMoivre" $\quad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$

$\arg(z^n) = n\arg z + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$

$\exists k\in\mathbb{Z}: \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi$



Γεωμετρική κατασκευή (αναπαράσταση) του z_1z_2:
Θεωρώ το $A(1,0)$, την OP με $P_2\hat{O}P = \vartheta_1$ και το P με $O\hat{P_2}P = O\hat{A}P_1$. Τότε $P(z_1z_2)$.
Πράγματι, $O\overset{\triangle}{A}P_1 \approx O\overset{\triangle}{P_2}P$ αφού $A\hat{O}P_1 = P_2\hat{O}P = \vartheta_1$, $O\hat{A}P_1 = O\hat{P_2}P$. Άρα $\dfrac{|\vec{OP}|}{|\vec{OP_2}|} = \dfrac{|\vec{OP_1}|}{|\vec{OA}|} \Rightarrow |\vec{OP}| = |z_1||z_2|$.
Επίσης, $\arg(\vec{OP}) = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Άρα $\vec{OP} = z_1z_2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right]$$

Πράγματι,

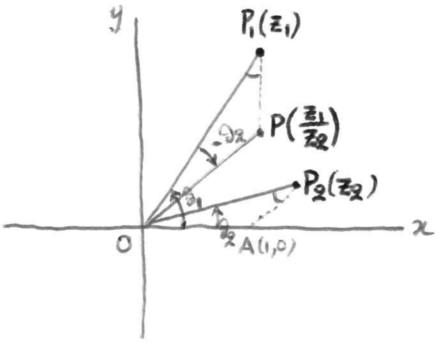
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)}{r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2)}{(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)(\cos\vartheta_2-i\sin\vartheta_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)\right] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right]$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$\exists k\in\mathbb{Z}$: $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2 + 2k\pi$ (στην πραγματικότητα $k\in\{-1,0,1\}$, διότι $-\pi < \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \le \pi$, $-\pi < \mathrm{Arg}\, z_2 \le \pi$, $-\pi \le -\mathrm{Arg}\, z_1 < \pi$ $\Rightarrow$ $-3\pi < \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \mathrm{Arg}\, z_2 - \mathrm{Arg}\, z_1 < 3\pi$ $\Rightarrow$ $-3\pi < 2k\pi < 3\pi$ $\Rightarrow$ $k = -1, 0, 1$).



Γεωμετρική κατασκευή (αναπαράσταση) του $\frac{z_1}{z_2}$:
Θεωρώ το $A(1,0)$, την OP με $P_1\hat{O}P = -\vartheta_2$ και το P με $O\hat{P_1}P = O\hat{P_2}A$. Τότε $P\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
Πράγματι, $\overset{\triangle}{OAP_2} \approx \overset{\triangle}{OPP_1}$ αφού $A\hat{O}P_2 = P\hat{O}P_1 = \vartheta_2$, $O\hat{P_2}A = O\hat{P_1}P$. Άρα $\frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OP_1}|} = \frac{|\vec{OA}|}{|\vec{OP_2}|} \Rightarrow |\vec{OP}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
Επίσης, $\arg(\vec{OP}) = \vartheta_1 - \vartheta_2$. Άρα $\vec{OP} = \frac{z_1}{z_2}$

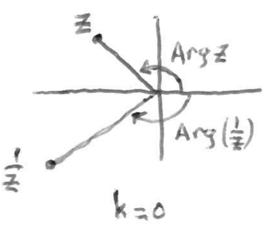
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

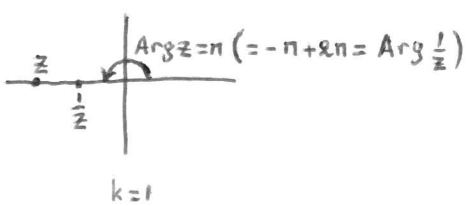
Προκύπτει από το πηλίκο θέτοντας $z_1 = 1$ ($r_1 = 1$, $\vartheta_1 = 0$).

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$\exists k\in\mathbb{Z}$: $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi = \begin{cases} -\mathrm{Arg}\, z, & z\notin\mathbb{R}_- \\ -\mathrm{Arg}\, z + 2\pi = \pi = \mathrm{Arg}\, z, & z\in\mathbb{R}_- \end{cases}$ (στην πραγματικότητα $k\in\{0,1\}$)

Πράγματι, $-\pi < \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \le \pi$, $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \le \pi$, άρα $-2\pi < \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) + \mathrm{Arg}\, z \le 2\pi$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow -2\pi < 2k\pi \le 2\pi \Rightarrow k = 0, 1$.





$$z^{\kappa} = r^{\kappa}\left[\cos(\kappa\vartheta) + i\sin(\kappa\vartheta)\right], \ \kappa\in\mathbb{Z} \qquad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{\kappa} = \cos(\kappa\vartheta) + i\sin(\kappa\vartheta)$$

Για $\kappa = n \in \mathbb{N}$ είναι γνωστό. Για $\kappa = -n$ είναι

$$z^{\kappa} = z^{-n} = (z^{-1})^{n} = \left(\frac{1}{z}\right)^{n} = \left[\frac{1}{r}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)\right]^{n} = \left[r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))\right]^{n} =$$

$$= (r^{-1})^{n}\left[\cos(-n\vartheta) + i\sin(-n\vartheta)\right] = r^{\kappa}\left[\cos(\kappa\vartheta) + i\sin(\kappa\vartheta)\right].$$

$$\arg(z^{\kappa}) = \kappa \arg z + 2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$$

$$\exists k\in\mathbb{Z} : \ \operatorname{Arg}(z^{\kappa}) = \kappa \operatorname{Arg} z + 2k\pi$$

$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ "σχέση Euler"

Αυτή η σχέση μπορεί καταρχήν να εκληφθεί ως ορισμός (συμβολισμός), ο οποίος διευκολύνει όπως θα δούμε τις σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών μορφών.

Μπορεί όμως και να αποδειχθεί θεωρώντας τον ορισμό της εκθετικής μιγαδικής συνάρτησης σε αναλογία προς την εκθετική πραγματική συνάρτηση, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Θέτοντας $z = i\vartheta$ έχουμε

$$e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\vartheta^n = \sum_{n=\text{even}} \frac{i^n}{n!}\vartheta^n + \sum_{n=\text{odd}} \frac{i^n}{n!}\vartheta^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!}\vartheta^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}\vartheta^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\vartheta^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\vartheta^{2k+1} = \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - + \ldots\right) + i\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - + \ldots\right) =$$

$$= \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Άλλος τρόπος απόδειξης της σχέσης Euler: Θεωρούμε τη δ.ε. $y''(\vartheta) + y(\vartheta) = 0$. Η συνάρτηση $f(\vartheta) = e^{i\vartheta}$ έχει $f'(\vartheta) = ie^{i\vartheta}$, $f''(\vartheta) = -e^{i\vartheta}$, άρα $f''(\vartheta) + f(\vartheta) = 0$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = i$. Εξάλλου, η συνάρτηση $g(\vartheta) = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ έχει $g'(\vartheta) = -\sin\vartheta + i\cos\vartheta$, $g''(\vartheta) = -\cos\vartheta - i\sin\vartheta$, άρα $g''(\vartheta) + g(\vartheta) = 0$ και $g(0) = 0$, $g'(0) = i$. Άρα, οι συναρτήσεις $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ ικανοποιούν την ίδια δ.ε. και έχουν τις ίδιες αρχικές συνθήκες, επομένως, λόγω της μοναδικότητας της λύσης, θα πρέπει να συμπίπτουν, δηλαδή $f(\vartheta) = g(\vartheta) \Leftrightarrow e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$.

$e^{i2k\pi} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ αφού $e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + i0 = 1$

$(e^{i\vartheta})^* = e^{-i\vartheta}$, αφού $(e^{i\vartheta})^* = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^* = \cos\vartheta - i\sin\vartheta = \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta) = e^{-i\vartheta}$

$|e^{i\vartheta}| = 1$, αφού $|e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1$.

$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$, $\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$ Προκύπτουν είτε με απευθείας υπολογισμό, είτε λόγω ότι $\cos\vartheta = \mathrm{Re}\, e^{i\vartheta} = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$, ...

$e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2} = e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

Πράγματι, $e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2} = (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = (\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1) = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) = e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

$z = re^{i\vartheta} = re^{i\vartheta_P}$ διότι $e^{i\vartheta} = e^{i(\vartheta_P + 2k\pi)} = e^{i\vartheta_P} e^{i2k\pi} = e^{i\vartheta_P} \cdot 1 = e^{i\vartheta_P}$

"πολική μορφή" του z

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

Πράγματι, $z_1 z_2 = r_1 e^{i\vartheta_1} r_2 e^{i\vartheta_2} = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$.

Επομένως, προκύπτει πάλι η γνωστή ιδιότητα $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)]$ και τα αντίστοιχα για τις φάσεις.

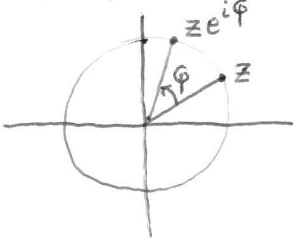
$$z^n = r^n e^{in\vartheta}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad\qquad (e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\vartheta}$$

$$z^k = r^k e^{ik\vartheta}, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad\qquad (e^{i\vartheta})^k = e^{ik\vartheta}$$

Παρατήρηση. Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού με $e^{i\varphi}$ έχει ως αποτέλεσμα γεωμετρικώς τη στροφή του μιγαδικού κατά γωνία φ.



Πράγματι, αν $z = re^{i\vartheta} \Rightarrow ze^{i\varphi} = r e^{i(\varphi+\vartheta)}$, άρα η απόσταση r παραμένει ("στροφή") και η γωνία γίνεται $\varphi+\vartheta$.

$(e^z)^* = e^{z^*}$

Πράγματι, $(e^z)^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{n!} = e^{z^*}$

$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

Πράγματι, $e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^m}{n!\, m!}$ και επίσης

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^N}{N!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} z_1^n z_2^{N-n} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{N!} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} z_1^n z_2^{N-n} =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^{N-n}}{n!\,(N-n)!} \overset{m=N-n}{=\!=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^m}{n!\, m!} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$e^z = e^x e^{iy}$ αφού $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

$e^{-z} = (e^z)^{-1}$ αφού $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \Rightarrow (e^z)^{-1} = e^{-z}$

$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ αφού $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} (e^{z_2})^{-1} = e^{z_1} e^{-z_2} = e^{z_1-z_2}$

$(e^z)^\kappa = e^{\kappa z}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

Πράγματι, $|e^z|^2 = (e^z)(e^z)^* = e^z e^{z^*} = e^{z+z^*} = e^{2\operatorname{Re} z} = (e^{\operatorname{Re} z})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ αφού $e^{\operatorname{Re} z} > 0$.

Για $z = i\vartheta$ είναι $|e^{i\vartheta}| = e^{\operatorname{Re}(i\vartheta)} = e^0 = 1$ σε συμφωνία με ό,τι ξέραμε.

<u>Ορισμός</u> n-οστή $(n\in\mathbb{N}^*)$ ρίζα του $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ λέγεται κάθε $w\in\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $w^n=z$.

Συμβολίζουμε τη n-οστή ρίζα του z ως $w=z^{\frac{1}{n}}$.

<u>Πρόταση</u> $$z_k^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\dots,n-1$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $z=re^{i\vartheta}$, $w=\rho e^{i\varphi}$ με $w^n=z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\varphi}=re^{i\vartheta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^n=r,\ n\varphi-\vartheta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho=r^{\frac{1}{n}},\ \varphi=\frac{\vartheta+2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}},\ k\in\mathbb{Z}$

Θα δείξουμε ότι τα $w_0, w_1,\dots,w_{n-1}$ (δηλ. για $k=0,1,\dots,n-1$) είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν $\nu_1,\nu_2\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\nu_1\neq\nu_2$, με $w_{\nu_1}=w_{\nu_2}\Rightarrow r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2\nu_1\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2\nu_2\pi}{n}}$

$\Rightarrow \exists\,\ell\in\mathbb{Z}:\ \frac{\vartheta+2\nu_1\pi}{n}-\frac{\vartheta+2\nu_2\pi}{n}=2\ell\pi \Rightarrow 2(\nu_1-\nu_2)\pi=2\ell\pi n\Rightarrow \nu_1-\nu_2=\ell n$. Αλλά $0<|\nu_1-\nu_2|<n \Rightarrow 0<|\ell n|<n\Rightarrow 0<|\ell|n<n\Rightarrow 0<|\ell|<1$ άτοπο.

Θα δείξουμε τέλος ότι κάθε w_k, $k\notin\{0,1,\dots,n-1\}$ ισούται με κάποιο από τα $w_0,w_1,\dots,w_{n-1}$. Πράγματι, $\exists\,\ell\in\mathbb{Z}$, $\exists\,\nu\in\mathbb{N}$, $0\le\nu\le n-1$: $k=\ell n+\nu$.
Άρα $w_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2\ell n\pi+2\nu\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2\nu\pi}{n}}e^{i2\ell\pi}=w_\nu\cdot 1=w_\nu$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Η παραπάνω πρόταση σημαίνει ότι $\forall z\neq 0$, η εξίσωση $w^n=z$ έχει πάντα n διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{C}$, τις $w_0,w_1,\dots,w_{n-1}$.

2) Στην πράξη επιλέγουμε $\vartheta=\vartheta_p$, οπότε $z_k^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta_p+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$

3) $w^n=x>0 \Leftrightarrow w_k=x_k^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}\,e^{i\frac{2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{x}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,\dots,n-1$
Επομένως, ενώ στους πραγματικούς αριθμούς το $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ είναι μοναδικό και αντιστοιχεί στο $k=0$, στους μιγαδικούς υπάρχουν και άλλες $n-1$ διαφορετικές ρίζες.

4) $w^n=1 \Leftrightarrow w_k=1_k^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}=w_1^k,\ k=0,1,\dots,n-1 \Leftrightarrow \{w_k\}=\{1, w_1=e^{i\frac{2\pi}{n}}, w_1^2,\dots,w_1^{n-1}\}$

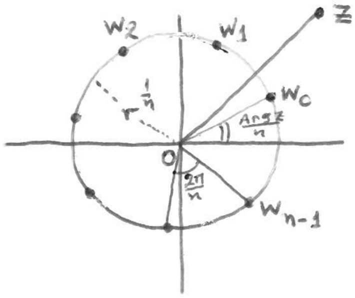
5) $w^2=z \Leftrightarrow w_k=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{2}},\ k=0,1 \Leftrightarrow w_0=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\vartheta}{2}},\ w_1=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\vartheta}{2}}=-w_0$.

$|z^{\frac{1}{n}}|=|z|^{\frac{1}{n}}$

Πράγματι, για κάθε n-οστή ρίζα $z_k^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}$ είναι $|z_k^{\frac{1}{n}}|=r^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}$.

(*) Γεωμετρική αναπαράσταση των n-οστών ριζών

Οι n n-οστές ρίζες τού z βρίσκονται στις n κορυφές κανονικού n-πολυγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $C(0, r^{\frac{1}{n}})$.



Πράγματι, $|z_k^{\frac{1}{n}}| = r^{\frac{1}{n}}$ και η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών n-οστών ριζών $z_k^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$,
$z_{k+1}^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n}} = z_k^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}}$ είναι σταθερή και ίση με $\frac{2\pi}{n}$.

Θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας (D'Alembert)

Κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες στο $\mathbb{C}$ (όχι απαραίτητα διαφορετικές) δηλαδή

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$
$$(a_i \in \mathbb{C}) \qquad = a_n (z - \zeta_1)^{\rho_1} (z - \zeta_2)^{\rho_2} \cdots (z - \zeta_\nu)^{\rho_\nu}, \quad \nu \le n,\ \rho_1 + \dots + \rho_\nu = n$$

Σημείωση Αν $a_i \in \mathbb{R}$, τότε όπως ξέρουμε οι ρίζες z_i είτε είναι πραγματικές (άρα εμφανίζονται ως παράγοντες $z - x$) είτε είναι συζυγείς μιγαδικές (άρα εμφανίζονται παράγοντες $(z - z_i)(z - z_i^*) = z^2 - 2(\mathrm{Re}\, z_i) z + |z_i|^2$), δηλαδή πάντα οι παράγοντες είναι είτε πραγματικοί γραμμικοί είτε πραγματικά πολυώνυμα 2ου βαθμού.

π.χ. $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = (z-1)\left(z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$

Τύποι Vieta

Για τις ρίζες $z_1, \dots z_n$ πολυωνύμου ισχύει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} z_i &= z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sum_{i_1 < i_2} z_{i_1} z_{i_2} &= z_1 z_2 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
\sum_{i_1 < i_2 < i_3} z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3} &= z_1 z_2 z_3 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\vdots \\
\sum_{i_1 < \dots < i_n} z_{i_1} \cdots z_{i_n} &= z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}\right\}$$

Πράγματι, $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) =$

$= a_n [z^2 - (z_1 + z_2) z + z_1 z_2] \cdots (z - z_n)$

$= a_n z^n - a_n (z_1 + \dots + z_n) z^{n-1} + a_n (z_1 z_2 + \dots + z_{n-1} z_n) z^{n-2} - + \dots + (-1)^n a_n z_1 \cdots z_n,$

απ' όπου με εξίσωση των συντελεστών των ισόβαθμων όρων προκύπτουν οι τύποι.

Οι τύποι Vieta μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των ριζών λύνοντας το σύστημα, είτε να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση αλγεβρικών σχέσεων μεταξύ των ριζών.

<u>π.χ.</u> Οι ρίζες της διώνυμης εξίσωσης $z^n - \mathfrak{z} = 0$ ικανοποιούν

$$\left.\begin{array}{l} z_1 + \dots + z_n = 0 \\ z_1 z_2 + \dots + z_{n-1} z_n = 0 \\ \vdots \\ z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^{n+1} \mathfrak{z} \end{array}\right\}$$

Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή της διώνυμης εξίσωσης, όπως ξέρουμε υπάρχουν n διακριτές ρίζες, οι n-οστές ρίζες τού $\mathfrak{z}$ δηλαδή $z_k = \mathfrak{z}_k^{\frac{1}{n}} = |\mathfrak{z}|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg \mathfrak{z} + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, από τις οποίες καταρχήν θα μπορούσαν απευθείας να επαληθευτούν οι παραπάνω σχέσεις.

<u>π.χ.</u> $z^3 = 1$

Οι τύποι δίνουν $$\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{array}\right\}$$

Στην περίπτωση αυτή, επειδή $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = z_2^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$, προκύπτει $z_1 z_2 z_3 = 1$, $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 = z_1 + z_2 + z_3$.
Αλλά $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$, $z \neq 1 \Rightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 = 0$, οπότε πράγματι επαληθεύονται οι τύποι.

<u>π.χ.</u> $a z^3 + b z^2 + c z + d = 0$

Οι τύποι δίνουν $$\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{c}{a} \\ z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a} \end{array}\right\}$$

<u>π.χ.</u> $a z^2 + b z + c = 0$

Οι τύποι δίνουν $\left. z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a} \right\}$.

Οι ρίζες του $a z^2 + b z + c = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$

Πράγματι, $a z^2 + b z + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$
$\Rightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2|a|} \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$ διότι οι τετραγωνικές ρίζες ενός αριθμού είναι αντίθετες, ακόμα και οι τετραγωνικές ρίζες θετικού (σύμφωνα με τον ορισμό μας) είναι δύο και αντίθετες, π.χ. $\sqrt{4} = \pm 2$.