ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Δυναμική

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δυναμική

1) Μια βασική παραδοχή τη κλασσική Μηχανική και γενικότερα τη κλασσική φυσική είναι ότι ο χώρος μέσα στον οποίο γίνονται οι κινήσεις είναι Ευκλείδειος, ομογενή και ισότροπος, ενώ ο χρόνος ομογενής. Δηλαδή, αυτό σημαίνει ότι οι νόμοι της φυσικής (ή το αποτέλεσμα ενός πειράματος) είναι οι ίδιοι, ανεξάρτητα από τη θέση ή τον προσανατολισμό και δεν μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου.

2) Μια άλλη βασική παραδοχή είναι ότι δεχόμαστε την ύπαρξη μιας ειδική κατηγορίας συστημάτων αναφοράς, τα αδρανειακά, ως προς τα οποία ισχύουν οι νόμοι τη Μηχανική (και μάλιστα ένας νόμος πρέπει να έχει την ίδια μορφή σε κάθε αδρανειακό σύστημα: αρχή σχετικότητας Γαλιλαίου). Αδρανειακός παρατηρητής είναι ένα σώμα στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις (ελεύθερο) και το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιεί λέγεται αδρανειακό.

Αξίωμα αδράνειας (1ος νόμος Νεύτωνα): Ένα ελεύθερο σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ή είναι ακίνητο (μηδενική ταχύτητα) ως προς αδρανειακό παρατηρητή.

Δηλαδή, αντίθετα προς την πίστη των φυσικών φιλοσόφων πριν το 1600 που θεωρούσαν σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ότι η φυσική κατάσταση των σωμάτων είναι η ακινησία, ο Γαλιλαίος πρώτος είχε διατυπώσει τον παραπάνω νόμο που αυστηρά ορίζει την κλάση των αδρανειακών παρατηρητών.

Η Γη δεν είναι αδρανειακό σύστημα γιατί περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο με κεντρομόλο επιτάχυνση $4.4 \times 10^{-3}\ m/sec^2$ και γύρω από τον άξονα της με κεντρομόλο επιτάχυνση στην επιφάνεια της $3.37 \times 10^{-2}\ m/sec^2$. Στις περιπτώσεις που μπορούμε να τις αγνοήσουμε σε σχέση με το g, η Γη θεωρείται αδρανειακό σύστημα.

Ο Ήλιος είναι καλύτερη προσέγγιση αδρανειακού συστήματος μιας και η κίνηση του γύρω από το κέντρο του γαλαξία είναι πιο ευθύγραμμη και ομαλή από την κίνηση τη Γης (η τροχιακή επιτάχυνση του Ήλιου είναι 150 εκατομμύρια φορές μικρότερη από αυτή της Γης).

Ακόμα καλύτερη προσέγγιση αδρανειακού συστήματος είναι τα μακρυνά αστέρια.

3) Το βασικό ποσοτικό αξίωμα είναι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για υλικό σημείο ως προς αδρανειακό παρατηρητή:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad , \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \; ,$$

π.χ. για σταθερή μάζα είναι $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

ή για σωμάτιο που κινείται με υψηλές ταχύτητες (ειδική σχετικότητα),

$$\frac{d}{dt}\left(m(v)\vec{v}\right) = \vec{F} \quad , \quad m(\vec{v}) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

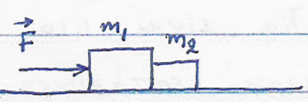
Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης ως προς χρόνο του διανύσματος θέσης, άρα η τροχιά $\vec{r}(t)$ βρίσκεται αν ξέρουμε την αρχική θέση και ταχύτητα $\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$.

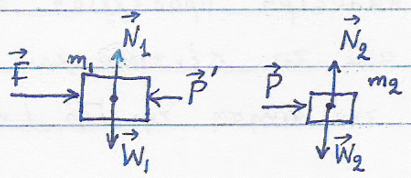
Για σώματα όπου η μάζα μεταβάλλεται με το χρόνο $m = m(t)$, η διαφορική εξίσωση $m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = \vec{F}$ είναι λάθος, γιατί δεν είναι αναλλοίωτη σε μετ/μούς Γαλιλαίου, η σωστή είναι $m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{F}$, όπου $\vec{w}$ είναι η ταχύτητα των σωματιδίων που δημιουργούν το $\frac{dm}{dt}$.

Κάτω από μετ/μούς Γαλιλαίου $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$, $\vec{v} = \text{σταθ.}$, $t' = t$ η εξίσωση $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ είναι αναλλοίωτη.

4) Τέλος υπάρχει το αξίωμα δράσης – αντίδρασης $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ασκούμενες αυτές σε διαφορετικά σώματα (π.χ. στον ηλεκτρομαγνητισμό η δύναμη Laplace μεταξύ δύο φορτίων $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ εκεί ενγένει $\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$).

Παράδειγμα





$$\Sigma F_x = F = (m_1+m_2)\,a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1+m_2}$$

$$m_2:\quad \Sigma F_x = P = m_2 a \Rightarrow P = F\,\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$m_1:\quad \Sigma F_x = F - P' = F - P = F - F\,\frac{m_2}{m_1+m_2} = F\,\frac{m_1}{m_1+m_2} = m_1 a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1+m_2}$$

Παράδειγμα

$F = 120t + 40 \ (N)$, $m = 10\,kg$

$t=0:\ x_0 = 5m,\quad v_0 = 6\,m/sec \Rightarrow x(t),\ v(t)$

$$m\frac{dv}{dt} = F \Leftrightarrow 10\frac{dv}{dt} = 120t + 40 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 12t + 4 \Rightarrow$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} (12t+4)\,dt \Rightarrow v - v_0 = 6t^2 + 4t \Big|_{t_0}^{t} \Rightarrow v = (6t^2+4t+6)\,\frac{m}{sec}$$

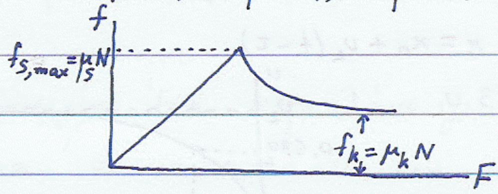
$$v = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow dx = v\,dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} (6t^2+4t+6)\,dt \Leftrightarrow$$

$$x = (2t^3 + 2t^2 + 6t + 5)\ m$$

Τριβή

Δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_s$, $f_s \le \mu_s N$

Δύναμη κινητικής τριβής (τριβή ολίσθησης) $\vec{f}_k$, $f_k = \mu_k N$



Τριβή σε ρευστό (αέριο, υγρό)

Γενικά είναι πολύπλοκες συναρτήσεις της ταχύτητας

(i) Αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας (για μικρό σώμα που κινείται με πολύ μικρή ταχύτητα μέσα σε ρευστό)

$$\vec{R} = -\lambda \vec{v}$$

π.χ. σταγόνες βροχής στον αέρα, μικρές μπαλίτσες σε λάδι κλπ.

Είναι $\lambda = K\eta$, όπου K: εξαρτάται από το σχήμα του σώματος (για σφαίρες $K = 6\pi r$, Νόμος Stokes), $[K] =$ μήκος

η: συντελεστής εσωτερικής τριβής ή συντελεστής ιξώδους (εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου), $[\eta] = \frac{N \cdot sec}{m^2} = Pa \cdot sec = 10\,P(oise)$

Για ένα σώμα που κινείται από την ηρεμία μέσα σε ρευστό υπό την επίδραση σταθερής δύναμης (π.χ. πτώση με $F=mg$) είναι

$$m\frac{dv}{dt} = F - \lambda v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\left(v - \frac{F}{\lambda}\right) \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{v-\frac{F}{\lambda}} = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|v - \frac{F}{\lambda}\right| - \ln\left|0 - \frac{F}{\lambda}\right| = -\frac{\lambda}{m}t \Leftrightarrow \frac{\frac{F}{\lambda} - v}{\frac{F}{\lambda}} = e^{-\frac{\lambda}{m}t} \Leftrightarrow v(t) = \frac{F}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$$

Στην αρχή ($t=0$) η ταχύτητα είναι μηδέν, άρα και η αντίσταση (τριβή) είναι μηδέν. Καθώς η ταχύτητα όλο και αυξάνει, αυξάνει και η αντίσταση, ενώ η επιτάχυνση ελαττώνεται. Όταν τελικά η αντίσταση γίνει ίση με την F, τότε η επιτάχυνση μηδενίζεται και η ταχύτητα αποκτά μια σταθερή οριακή τιμή v_L.

Άρα βάζοντας $\frac{dv}{dt} = 0$ στην εξίσωση κίνησης έχουμε $v_L = \frac{F}{\lambda}$.

Το ίδιο φαίνεται και από τη λύση $v(t)$, όπου για $t \to \infty$, είναι $v \to v_L = \frac{F}{\lambda}$.

Η επιτάχυνση είναι $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{F}{\lambda} - \frac{F}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) = -\frac{F}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{m}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t} = \frac{F}{m}e^{-\frac{\lambda}{m}t}$, όπου βλέπουμε ότι πράγματι ελαττώνεται με το χρόνο μέχρι μηδενισμού.

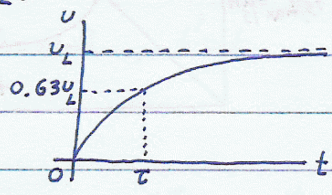
Ο χρόνος $\tau = \frac{m}{\lambda}$ λέγεται χρόνος αποκατάστασης, οπότε $v(t) = v_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Για τη μετατόπιση x ισχύει:

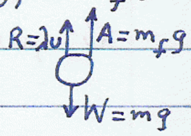
$$x - x_0 = \int_0^t v(t)dt = v_L\int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau}\right)dt = v_L\left(t + \tau e^{-t/\tau}\right)\Big|_0^t = v_L(t-\tau) + v_L\tau e^{-t/\tau},$$

άρα για $t=0$, $x = x_0$, για $t \to \infty$, $x = x_0 + v_L(t-\tau)$

Για $t=\tau$ είναι $v(\tau) = v_L\left(1 - e^{-1}\right) = 0.63\,v_L$



Μια περαιτέρω διόρθωση των παραπάνω εξισώσεων είναι η θεώρηση της άνωσης που ασκεί το ρευστό στο σώμα, η οποία σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού $m_f g$, π.χ. για πτώση σώματος είναι $ma = mg - m_f g - \lambda v$, άρα $v_L = \frac{(m - m_f)g}{\lambda}$



Παράδειγμα Σφαίρα που πέφτει σε λάδι, $m = 2g$, $v_L = 5\ cm/sec$, $\tau = ;$ $t(v = 0.9v_L) = ;$ (αγνοούμε την άνωση)

$$u_L = \frac{F}{\lambda} = \frac{mg}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{mg}{u} = \frac{(2g)\left(980\ \frac{cm}{sec^2}\right)}{5\ \frac{cm}{sec}} = 392\ \frac{g}{sec}$$

$$\tau = \frac{m}{\lambda} = \frac{2g}{392\ \frac{g}{sec}} = 5\times 10^{-3}\ sec$$

$$u = u_L\left(1-e^{-t/\tau}\right) = 0.9u_L \Rightarrow 1-e^{-t/\tau} = 0.9 \Rightarrow e^{-t/\tau} = 0.1 \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = -2.3 \Rightarrow t = 2.3\tau$$

$$\Rightarrow t = 2.3\,(5.1\times 10^{-3}\ sec) = 11.7\times 10^{-3}\ sec = 11.7\ msec$$

<u>Παράδειγμα</u> Μια σταγόνα βροχής διαμέτρου $2r = 0.5\,mm$, $\eta = 1.81\times 10^{-5}\,Pa.s$

$\rho_{f_{\text{αέρα}}} = 1.3\times 10^{-3}\ g/cm^3 = 1.3\ kg/m^3$, $\rho_{\text{σταγόνα}} = 1\ \frac{g}{cm^3} = 10^3\ \frac{kg}{m^3}$, $u_L = ;$

Είναι $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, $m_f = \rho_f V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f$

$$u_L = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_f)g}{6\pi r\eta} = \frac{2(\rho-\rho_f)r^2 g}{9\eta} = 7.5\ \frac{m}{sec} = 27\ \frac{km}{h}$$ (βλέπουμε ότι $u_L \propto r^2$)

(ii) Αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, για μεγάλα σώματα που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες

$$R = \frac{1}{2} C \rho_f A u^2$$

ρ_f : πυκνότητα ρευστού (π.χ. αέρα)

A : διατομή αντικειμένου κάθετα προς την ταχύτητα

C : συντελεστής αντίστασης, $[C]=1$

(π.χ. αεροπλάνα, υαλίνες, αλεξιπτωτιστές, κλπ.)

<u>Παράδειγμα</u> Ένα αεροπλάνο για να διπλασιάσει την ταχύτητα του πρέπει να οκταπλασιάσει την ισχύ του, διότι για $u \to 2u$, $R \to 4R$,

$P = Ru \longrightarrow (4R)(2u) = 8P$

Για ένα σώμα που κινείται από την ηρεμία μέσα σε ρευστό υπό την επίδραση σταθερής δύναμης (π.χ. πτώση με $F = mg$)

$$m\frac{du}{dt} = F - \frac{1}{2}C\rho_f A u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{C\rho_f A}{2m}\left(u^2 - \frac{2F}{C\rho_f g}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^u \frac{du}{u^2 - \sqrt{\frac{2F}{C\rho_f A}}^{\,2}} = -\frac{C\rho_f A}{2m}\int_0^t dt$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int dx\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right] = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C\rho_f A}{2F}}\,\ln\frac{\sqrt{\frac{2F}{C\rho_f A}}-v}{\sqrt{\frac{2F}{C\rho_f A}}+v} = -\frac{C\rho_f A}{2m}t \Leftrightarrow v(t)=\sqrt{\frac{2F}{C\rho_f A}}\;\frac{1-e^{-\frac{\sqrt{2FC\rho_f A}}{m}t}}{1+e^{-\frac{\sqrt{2FC\rho_f A}}{m}t}}$$

Άρα, για $t\to\infty$, $v\to v_L=\sqrt{\frac{2F}{C\rho_f A}}$ που προκύπτει και απ' ευθείας από την εξίσωση κίνησης.

Αν $\tau=\frac{m}{\sqrt{2FC\rho_f A}} \Rightarrow v=v_L\,\frac{1-e^{-t/\tau}}{1+e^{-t/\tau}}$

Αν είχαμε λάβει υπ' όψιν και την άνωση, π.χ. για πτώση σωμάτων, τότε $ma=mg-m_f g-\frac{1}{2}C\rho_f A v^2$ και η οριακή ταχύτητα είναι $v_L=\sqrt{\frac{2(m-m_f)g}{C\rho_f A}}$

Παράδειγμα Για σφαίρα ακτίνας r που πέφτει σε ρευστό (αγνοούμε την άνωση) είναι $A=4\pi r^2$, $m=\rho V=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$

Άρα, η οριακή ταχύτητα είναι

$$v_L=\sqrt{\frac{2F}{C\rho_f A}}=\sqrt{\frac{2mg}{C\rho_f A}}=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\rho}{\rho_f}\frac{rg}{C}}\ ,\ \text{δηλ. } v_L\propto\sqrt{r}$$

π.χ. για αλεξιπτωτιστή $v_L=60\,\frac{m}{sec}$, για σταγόνα βροχής $v_L=9\,\frac{m}{sec}$

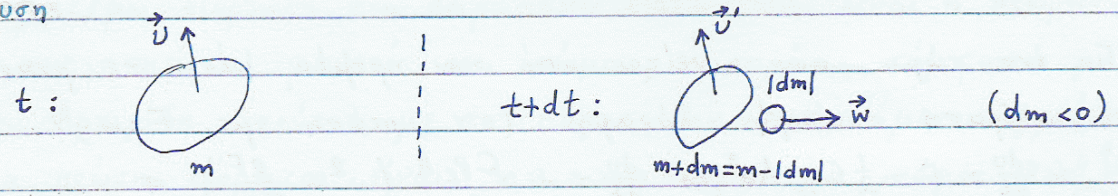
Κίνηση σωμάτων με μεταβαλλόμενη μάζα

Αν η μάζα m ενός σώματος μεταβάλλεται με το χρόνο λόγω εκτόξευσης ή πρόσπτωσης υλικού με ταχύτητα $\vec{w}$ (ως προς αδρανειακό παρατηρητή), τότε η εξίσωση κίνησης του είναι

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\frac{dm}{dt}(\vec{w}-\vec{v})=\vec{F}+\frac{dm}{dt}\vec{u}\ ,\quad \vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$$ η σχετική ταχύτητα του υλικού ως προς το σώμα

Για να αποδείξουμε την εξίσωση θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

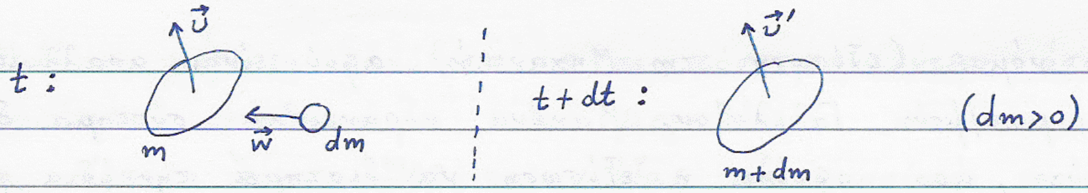
α) εκτόξευση



Η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι

$$d\vec{p}=\vec{p}'-\vec{p}=(m-|dm|)\vec{v}'+|dm|\vec{w}-m\vec{v}=(m+dm)\vec{v}'-dm\,\vec{w}-m\vec{v}$$
$$=m\vec{v}'+dm\,\vec{v}'-dm\,\vec{w}-m\vec{v}$$

β) πρόσπτωση



$$d\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = (m+dm)\vec{\upsilon}' - (m\vec{\upsilon} + dm\,\vec{w}) = m\vec{\upsilon}' + dm\,\vec{\upsilon}' - m\vec{\upsilon} - dm\,\vec{w}$$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις το $d\vec{p}$ του συστήματος είναι η ίδια έκφραση

$$d\vec{p} = m(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}) + dm(\vec{\upsilon}' - \vec{w}) = m\,d\vec{\upsilon} + dm(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon} - \vec{w}) = m\,d\vec{\upsilon} + dm(\vec{\upsilon} - \vec{w})$$

όπου ο όρος $dm\,d\vec{\upsilon}$ αγνοείται ως διαφορικό δεύτερης τάξης

Άρα $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \dfrac{dm}{dt}(\vec{\upsilon} - \vec{w})$

Ο όρος $\dfrac{dm}{dt}(\vec{w} - \vec{\upsilon})$ που δρα ως μια νέα δύναμη στην εξίσωση κίνησης λέγεται προωστική δύναμη και οφείλεται στο νόμο διατήρησης της ορμής του συστήματος σώμα-υλικό, π.χ. στον πύραυλο που κινείται προς τα πάνω εκτοξεύοντας καυσαέρια, είναι $\dfrac{dm}{dt} < 0$ και η σχετική ταχύτητα $u < 0$ (προς τα πίσω), άρα $\dfrac{dm}{dt}u > 0$ και η προωστική αυτή δύναμη σπρώχνει τον πύραυλο προς τα πάνω (κόντρα στο βάρος του).

<u>Σχόλια</u> (1) Αν η εκτόξευση ή πρόσπτωση του υλικού στο σώμα γίνεται συμμετρικά γύρω-γύρω τότε η συνισταμένη προωστική δύναμη είναι μηδέν και η εξίσωση κίνησης είναι $m(t)\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$, που διαφέρει από τον απλό νόμο του Νεύτωνα στο ότι $m = m(t)$.

(2) Αν η ταχύτητα του υλικού που προσπίπτει είναι μηδέν, τότε $\vec{w} = 0$, άρα $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{dm}{dt}\vec{\upsilon} \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}(m(t)\vec{\upsilon}) = \vec{F}$, π.χ. κατά την πτώση μιας σταγόνας μέσα σε ακίνητη ατμόσφαιρα κορεσμένη από υδρατμούς η μάζα της σταγόνας αυξάνει και η εξίσωση κίνησης είναι η παραπάνω. Ή αν υλικό πέφτει πάνω σε μια βιομηχανική ταινία μεταφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ, τότε ισχύει η παραπάνω εξίσωση και ειδικότερα, αφού $\upsilon =$ σταθ., άρα $\dfrac{d\upsilon}{dt} = 0 \Rightarrow F = \dfrac{dm}{dt}\upsilon$, που είναι η δύναμη με την οποία πρέπει να έλκεται η ταινία για να κινείται με $\upsilon =$ σταθ.

(3) Η γενική εξίσωση που βρήκαμε $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \dfrac{dm}{dt}(\vec{w} - \vec{\upsilon})$ είναι όντως

σωστός νόμος (εξίσωση της Μηχανικής) αφού είναι αναλλοίωτη κάτω από μετ/μούς Γαλιλαίου. Κανένα αδρανειακό σύστημα δεν είναι προνομιούχο, άρα οφείλει η εξίσωση να διατηρεί την ίδια μορφή ως προς άλλο αδρανειακό σύστημα, δηλαδή κάτω από μετ/μούς Γαλιλαίου $\vec{r}'=\vec{r}-\vec{v}t$, $\vec{v}=$σταθ. , $t'=t$. Πράγματι, αφού στην εξίσωση εμφανίζεται η διαφορά $\vec{w}-\vec{u}$, άρα ως προς το άλλο σύστημα αναφοράς $\vec{w}'-\vec{u}'=(\vec{w}-\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})=\vec{w}-\vec{u}$ αναλλοίωτη. Επίσης $\frac{d\vec{u}'}{dt}=\frac{d(\vec{u}-\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{u}}{dt}$, άρα η εξίσωση είναι αναλλοίωτη. Χωρίς τον όρο $\frac{dm}{dt}\vec{w}$ η εξίσωση εν γένει είναι λάθος (μη-αναλλοίωτη).

Παράδειγμα Πύραυλος μάζας m_1 γεμίζεται με καύσιμο m_{20} (άρα η ολική αρχική μάζα του πυραύλου είναι $m_0=m_1+m_{20}$) και χάνει καύσιμο με σταθερό ρυθμό $\dot{m}_2=-A$ $(A>0)$, ενώ η σχετική ταχύτητα εκτόξευσης του καυσίμου ως προς τον πύραυλο είναι $u<0$ σταθερή. Να βρεθεί το $υ(t)$ και το $υ_{max}$.

Όσο διαρκεί η εκτόξευση (καύση καυσίμου) είναι $m_2=m_{20}-At$ και ισχύει η εξίσωση κίνησης για τον πύραυλο

$$m\frac{d\vec{υ}}{dt}=m\vec{g}+\frac{dm}{dt}\vec{u}\Leftrightarrow (m_1+m_{20}-At)\frac{dυ}{dt}=-(m_1+m_{20}-At)g+Au\Leftrightarrow$$

$$(m_0-At)\frac{dυ}{dt}=-(m_0-At)g+Au.$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει ενόσω $m_2\geq 0\Leftrightarrow m_{20}-At\geq 0\Leftrightarrow t\leq\frac{m_{20}}{A}$, άρα $m_0-At=m_1+(m_{20}-At)>0$

Είναι $$\frac{dυ}{dt}=\frac{Au}{m_0-At}-g\Leftrightarrow dυ=\left(-\frac{u}{t-\frac{m_0}{A}}-g\right)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{υ}dυ=\int_0^t\left(-\frac{u}{t-\frac{m_0}{A}}-g\right)dt\Leftrightarrow υ=-u\ln\left|t-\frac{m_0}{A}\right|\Big|_0^t-gt\Leftrightarrow$$

$$υ=-u\ln\left(\frac{m_0}{A}-t\right)+u\ln\left(\frac{m_0}{A}\right)-gt\Leftrightarrow υ(t)=u\ln\frac{m_0}{m_0-At}-gt$$

Τη στιγμή που τελειώνει το καύσιμο είναι $t_{max}=\frac{m_{20}}{A}$, άρα η αντίστοιχη ταχύτητα (μέγιστη) είναι

$$υ_{max}=u\ln\frac{m_0}{m_0-At_{max}}-gt_{max}=u\ln\frac{m_0}{m_0-m_{20}}-\frac{m_{20}g}{A}=u\ln\frac{m_0}{m_1}-\frac{m_{20}g}{A}=$$

$$=u\ln\frac{m_1+m_{20}}{m_1}-\frac{m_{20}g}{A}=u\ln\left(1+\frac{m_{20}}{m_1}\right)-\frac{m_{20}g}{A}$$

Δηλαδή η μέγιστη ταχύτητα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο η σχε-τική ταχύτητα εκτόξευσης u είναι μεγαλύτερη και όσο πιο με-γάλος είναι ο λόγος $\frac{m_{20}}{m_1}$ της μάζας των καυσίμων προς τη μάζ του σκάφους.

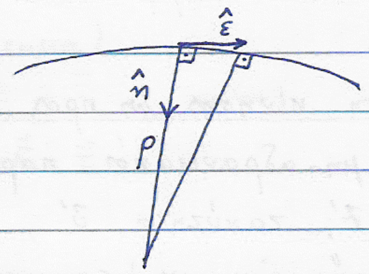
<u>Παράδειγμα</u> Πύραυλος Κένταυρος, $m_1 = 2.52 \times 10^6\ kg$, $m_{20} = 0.2 \times 10^6\ kg$,
$m_0 = m_1 + m_{20} = 2.72 \times 10^6\ kg$, $A = 1290\ \frac{kg}{sec}$, $u = 55\ \frac{km}{sec}$, $\upsilon_{max} = ;$

Είναι $t_{max} = \frac{m_{20}}{A} = \frac{0.2 \times 10^6\ kg}{1290\ \frac{kg}{sec}} = 155\ sec$

$$\upsilon_{max} = u \ln \frac{m_0}{m_1} - g\, t_{max} = 55000 \frac{m}{sec} \ln \frac{2.75 \times 10^6}{2.52 \times 10^6} - \left(9.8 \frac{m}{sec^2}\right)(155\ sec) =$$
$$= (55000 \ln 1.08 - 1519) \frac{m}{sec} = (4200 - 1519) \frac{m}{sec} = 2681 \frac{m}{sec}$$

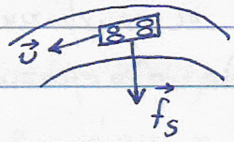
<u>Γενική καμπυλόγραμμη κίνηση</u>

$$\vec{F} = m \frac{d\upsilon}{dt} \hat{\varepsilon} + \frac{m\upsilon^2}{\rho} \hat{n} = \vec{F}_\varepsilon + \vec{F}_n$$



$\vec{F}_\varepsilon$: επιτρόχιος (εφαπτομενική) δύναμη
$\vec{F}_n$: κάθετη (κεντρομόλος) δύναμη

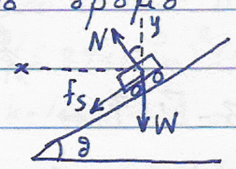
<u>Παράδειγμα</u> Όχημα που στρίβει σε οριζόντιο δρόμο $\rho = 35m$, $\mu_s = 0.5$, $\upsilon_{max} = ;$



Η δύναμη της στατικής τριβής κρατάει το όχημα σε τοπικά κυκλική τροχιά

$$f_s = F_n \Leftrightarrow \mu_s N = \frac{m\upsilon^2}{\rho} \Leftrightarrow \mu_s m g = \frac{m\upsilon^2}{\rho} \Leftrightarrow \mu_s g = \frac{\upsilon^2}{\rho} \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\mu_s g \rho}$$
$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{(0.5)(9.8\ m/s^2)(35m)} = 13.1\ m/sec$$

<u>Παράδειγμα</u> Όχημα που στρίβει σε κεκλιμένο δρόμο



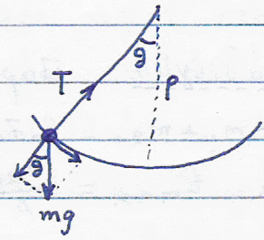
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow W + f_s \sin\theta = N \cos\theta$$
$$\Sigma F_x = F_\kappa \Leftrightarrow N \sin\theta + f_s \cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \quad mg + \mu_s N \sin\theta = N \cos\theta \quad \rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$$
$$N \sin\theta + \mu_s N \cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{\rho}$$

$$\frac{mg(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}=\frac{mu^2}{\rho} \leftrightarrow u=\sqrt{\frac{g\rho(\tan\theta+\mu_s)}{1-\mu_s\tan\theta}}$$

Για $\theta=0$ ανάγεται στο προηγούμενο $u=\sqrt{\mu_s g\rho}$

Για $\mu_s=0 \to u=\sqrt{g\rho\tan\theta}$



Παράδειγμα Κίνηση απλού εκκρεμούς

Η επιτρόχια δύναμη είναι $F_\varepsilon = mg\sin\theta$, άρα αφού $F_\varepsilon = m\frac{du}{dt} \leftrightarrow -mg\sin\theta = m\frac{du}{dt}$

Βάζουμε μείον γιατί η ταχύτητα υ ελαττώνεται όσο αυξάνει η γωνία θ. Αλλά $u=\rho\omega=\rho\dot\theta$, άρα $-g\sin\theta=\rho\ddot\theta \leftrightarrow$ $\ddot\theta+\frac{g}{\rho}\sin\theta=0$. Εξάλλου $T-mg\cos\theta=F_K=\frac{mu^2}{\rho} \leftrightarrow T=mg\cos\theta+m\rho\dot\theta^2$.

Για $\theta\simeq 0 \Rightarrow \sin\theta\simeq\theta$, $\cos\theta\simeq 1$, άρα $\ddot\theta+\frac{g}{\rho}\theta=0$, $T=m(g+\rho\dot\theta^2)$.

Η κίνηση ως προς θ είναι στην περίπτωση αυτή απλή ταλάντωση.

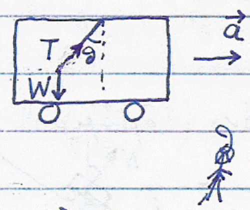
Εξίσωση κίνησης ως προς μη-αδρανειακό παρατηρητή

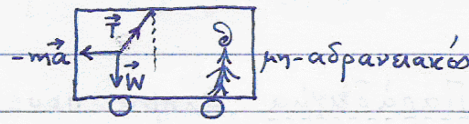
Αν ο μη-αδρανειακός παρατηρητής μετράει για ένα σώμα διάνυσμα θέσης $\vec r'$, ταχύτητα $\vec u'$, επιτάχυνση $\vec a'$, τότε ο "τροποποιημένος νόμος Νεύτωνα" που γράφει είναι

$$m\vec a' = \vec F - m\vec a_{O'O} - 2m\vec\omega\times\vec u' - m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') - m\dot{\vec\omega}\times\vec r'$$

όπου $\vec F$ οι πραγματικές δυνάμεις και όλοι οι άλλοι όροι δεξιά παίζουν το ρόλο πλασματικών δυνάμεων (δυνάμεων αδρανείας, ψευδοδυνάμεων)

Παράδειγμα





$m\vec a=\vec W+\vec T \Leftrightarrow$

$\left.\begin{aligned} T\sin\theta&=ma \\ T\cos\theta&=mg\end{aligned}\right\} \Rightarrow a=g\sin\theta$

$m\vec a'=\vec W+\vec T-m\vec a$

$\Leftrightarrow 0=\vec W+\vec T-m\vec a$

$\Leftrightarrow m\vec a=\vec W+\vec T$ το ίδιο

Θεώρημα ώθησης-ορμής

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = I = \langle \vec{F} \rangle (t_f - t_i)$$

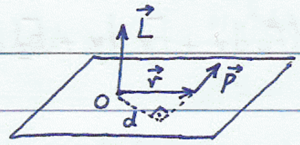
αφού $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$

Η ποσότητα $I = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$ λέγεται ώθηση.

Στροφορμή

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}$$

$$L = mvd$$



Επίπεδη κίνηση $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\,\hat{k}$

αφού $\vec{L} = m\vec{r}\times(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta) = m\dot{r}\,\vec{r}\times\frac{\vec{r}}{r} + mr^2\dot{\theta}\,\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta$

Ισχύει $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ (ως προς αδρανειακό σύστημα)

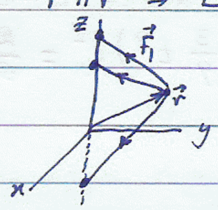
αφού $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau}$

Αν $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} =$ σταθερό (θεώρημα διατήρησης στροφορμής για αδρανειακό σύστημα)

π.χ. $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} =$ σταθ.

π.χ. $\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{L} =$ σταθ. (κεντρική δύναμη)

π.χ.



(αξονικές δυνάμεις) Τα κέντρα των επιμέρους δυνάμεων βρίσκονται στον άξονα z, άρα η συνισταμένη βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στο xy.

Άρα $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \parallel xy \Rightarrow \tau_z = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0 \Rightarrow L_z =$ σταθ.

Ως παράδειγμα σταθερής στροφορμής αναφέρουμε το e του H γύρω από τον πυρήνα, όπου $L = mr^2\omega = (9.11\times10^{-31}\,kg)(5.29\times10^{-11}\,m)^2(4.13\times10^{16}\,s^{-1})$

$= 1.05\times10^{-34}\,m^2\,kg/sec = \hbar = 2\pi h$