ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Κέντρο μάζας

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κέντρο μάζας

Το κέντρο μάζας ή μέση θέση της μάζας ενός συστήματος ή σώματος έχει αξία στη δυναμική του συστήματος που θα δούμε αργότερα, προς το παρόν θα το συνδέσουμε με το κέντρο βάρους του σώματος.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_i \rho_i V_i \vec{r}_i}{\sum_i \rho_i V_i} \overset{\text{ομογενές}}{=} \frac{\sum_i V_i \vec{r}_i}{V} \quad , \quad M = \sum_i m_i, \; V = \sum_i V_i$$

$$= \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} = \frac{\int \vec{r} \rho\, dV}{\int \rho\, dV} \overset{\text{ομογενές}}{=} \frac{\int \vec{r}\, dV}{V} \quad , \quad M = \int dm, \; V = \int dV$$

Το κέντρο μάζας είναι ανεξάρτητο από την εκλογή της αρχής O, διότι αν O' είναι άλλο σημείο μέτρησης των διανυσμάτων, τότε

$$\vec{r}_c\,' = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i\,' = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{O'O}) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i + \frac{\sum_i m_i}{M} \vec{O'O} =$$
$$= \vec{r}_c + \vec{O'O} \; ,$$

άρα είναι το ίδιο σημείο μετρημένο ως προς το O'

Αντίστοιχα για επιφάνεια

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \sigma_i A_i \vec{r}_i}{\sum_i \sigma_i A_i} \overset{\text{ομογενή}}{=} \frac{\sum_i A_i \vec{r}_i}{A}$$

$$= \frac{\int \vec{r} \sigma\, dA}{\int \sigma\, dA} \overset{\text{ομογενή}}{=} \frac{\int \vec{r}\, dA}{A}$$

σ = επιφανειακή πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας)

A = area = $\int dA$ (εμβαδό)

Αντίστοιχα για γραμμικές κατανομές

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \lambda_i L_i \vec{r}_i}{\sum_i \lambda_i L_i} \overset{\text{ομογενή}}{=} \frac{\sum_i L_i \vec{r}_i}{L}$$

$$= \frac{\int \vec{r} \lambda\, dL}{\int \lambda\, dL} \overset{\text{ομογενή}}{=} \frac{\int \vec{r}\, dL}{L}$$

λ = γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους)

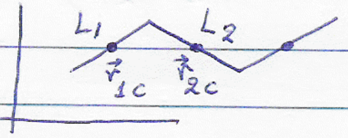
L = μήκος = $\int dL$

Αν υπάρχουν υποκομμάτια γνωστής μάζας M_j και γνωστού κέντρου μάζας $\vec{r}_{jc}$, τότε το όλο σύστημα έχει

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_j M_j \vec{r}_{jc}}{\sum_j M_j} \; ,$$

αφού $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{\sum_j \left(\sum_{i'} m_{i'} \vec{r}_{i'} \right)}{\sum_j \left(\sum_{i'} m_{i'} \right)}$, όπου i' αθροίζει τα στοιχειώδη σωμάτια μέσα στο j υποκομμάτι, $M_j = \sum_{i'} m_{i'}$

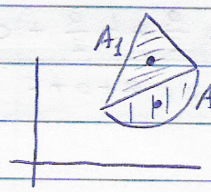
π.χ.



ομογενής

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_j L_j \vec{r}_{jc}}{\sum_j L_j}$$

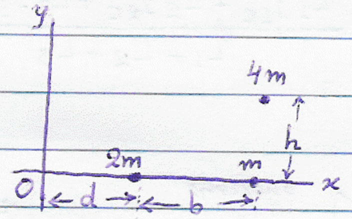
π.χ.



ομογενές

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_j A_j \vec{r}_{jc}}{\sum_j A_j}$$

Παράδειγμα



$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

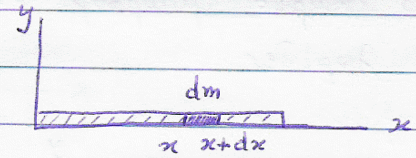
$$\Rightarrow x_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

$$= \frac{2m\, d + m(d+b) + 4m(d+b)}{2m + m + 4m} = d + \frac{5}{7} b$$

$$y_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{2m\,(0) + m\,(0) + 4mh}{7m} = \frac{4}{7} h$$

Άρα $\vec{r}_c = \left(d + \frac{5}{7} b\right) \hat{i} + \frac{4}{7} h\, \hat{j}$

Παράδειγμα



ομογενής ράβδος

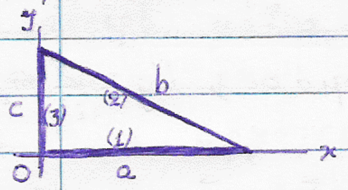
$$x_c = \frac{1}{M} \int x\, dm = \frac{\int_0^L x\, dx}{\int_0^L dx} = \frac{1}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L}{2}$$

διότι $dm = \lambda\, dx$, λ = γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους)

Αν η ράβδος δεν είναι ομογενής, αλλά έχει γραμμική πυκνότητα ανάλογη του x, δηλ. $\lambda = \alpha x$ τότε

$$x_c = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^L x \lambda\, dx}{\int_0^L \lambda\, dx} = \frac{\alpha \int_0^L x^2 dx}{\alpha \int_0^L x\, dx} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^L}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^L} = \frac{2L}{3}$$

Παράδειγμα



$a = 24, \quad b = 26, \quad c = 10$

$\vec{r}_{1c} = \left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad \vec{r}_{2c} = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), \quad \vec{r}_{3c} = \left(0, \frac{c}{2}\right)$

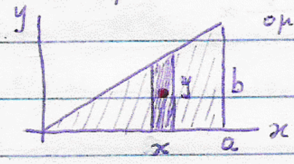
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_j L_j \vec{r}_{jc}}{\sum_j L_j}$$

$$x_c = \frac{\sum_j L_j x_{jc}}{\sum_j L_j} = \frac{L_1 x_{1c} + L_2 x_{2c} + L_3 x_{3c}}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{a\frac{a}{2} + b\frac{a}{2} + c \cdot 0}{a+b+c} =$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{a+b}{a+b+c} = 10$$

$$y_c = \frac{\sum_j L_j y_{jc}}{\sum_j L_j} = \frac{L_1 y_{1c} + L_2 y_{2c} + L_3 y_{3c}}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot \frac{c}{2} + c \cdot \frac{c}{2}}{a+b+c} = \frac{c}{2}\,\frac{b+c}{a+b+c} = 3$$

Παράδειγμα



ομογενής

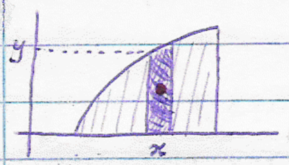
$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}_\sigma\, dA}{\int dA}, \quad A = \int dA = \text{area} = \text{εμβαδό}$$

dA = στοιχειώδες εμβαδό

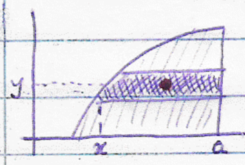
$dm = \sigma\, dA$

σ = επιφανειακή πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας)

Γενικά, για ένα επίπεδο χωρίο μπορούμε να διαλέξουμε κάθετες ή οριζόντιες στοιχειώδεις λωρίδες



$x_\sigma = x, \quad y_\sigma = \frac{y}{2}, \quad dA = y\, dx$



$x_\sigma = x + \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2}, \quad y_\sigma = y, \quad dA = (a-x)\,dy$

$= \ldots y \ldots$

Επομένως, στην περίπτωση μας έχουμε $dA = y\,dx$, όπου $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, άρα $dA = \frac{b}{a} x\, dx$ και

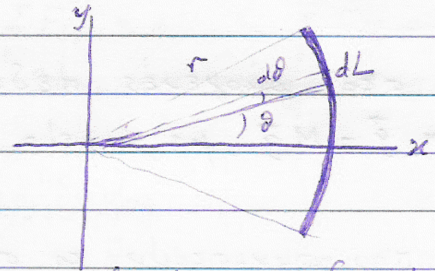
$$x_c = \frac{\int x_\sigma dA}{\int dA} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a x^2 dx}{\frac{b}{a}\int_0^a x\, dx} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a} = \frac{2a}{3}$$

$$y_c = \frac{\int y_\sigma dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \int_0^a x^2 dx}{\frac{b}{a}\int_0^a x\, dx} = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\,\frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^a}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^a} = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\,\frac{2a}{3} = \frac{b}{3}$$

(αν γράφαμε $y_c = \int y\, dA / \int dA$ θα ήταν λάθος ως προς το $\frac{1}{2}$)

Άρα $\vec{r}_c = \frac{2a}{3}\hat{i} + \frac{b}{3}\hat{j}$.

Παράδειγμα



ομογενής γωνίας 2α

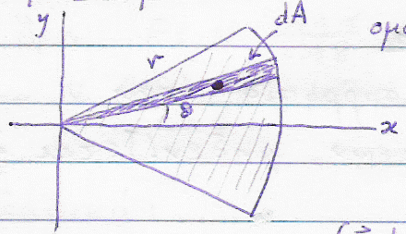
$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\, dL}{\int dL}, \quad dm = \lambda\, dL, \quad \lambda = \text{γραμμική πυκνότης}$$

$dL = r\, d\theta$

$$x_c = \frac{\int x\, dL}{\int dL} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta \cdot r\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\, d\theta} = r\,\frac{\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = r\,\frac{2\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{r}{\alpha}\sin\alpha$$

$$y_c = \frac{\int y\, dL}{\int dL} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\sin\theta \cdot r\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\, d\theta} = -r\,\frac{\cos\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = 0$$

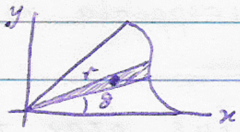
Παράδειγμα



ομογενής γωνίας 2α

Είναι $\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}_\sigma\, dA}{\int dA}$, όπου $dA = \frac{1}{2} r (r\, d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

Γενικά, για τυχόν χωρίο



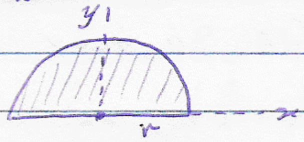
$x_\sigma = \frac{2}{3} r\cos\theta, \; y_\sigma = \frac{2}{3} r\sin\theta$

$$\text{Άρα } x_c = \frac{\int x_\sigma\, dA}{\int dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} r\cos\theta \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta\right)}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{r^2}{2}}\,\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2r}{3}\,\frac{\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{2r}{3}\,\frac{2\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{2r}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Για $\alpha \to 0$, $x_c \to \frac{2r}{3}$

$$y_c = \frac{\int y_\sigma \, dA}{\int dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} r \sin\theta \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta\right)}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{r^2}{2}} \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin\theta \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2r}{3} \frac{\cos\theta|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta|_{-\alpha}^{\alpha}} = 0$$

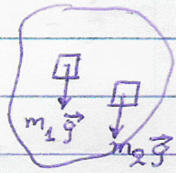
π.χ. για το 

$$y_c = \frac{2r}{3} \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$

Κέντρο βάρους

Για ένα σώμα που βρίσκεται μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της γης $\vec{g}$ ασκείται $\vec{W} = \sum_i m_i \vec{g} = M\vec{g}$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας $\vec{r}_c$ (βάρος).

Πράγματι, τα βάρη των σωματιδίων που συνιστούν το σώμα είναι παράλληλα, άρα το συνιστάμενο βάρος είναι $\vec{W} = \sum_i m_i \vec{g} = M\vec{g}$, το δε σημείο εφαρμογής του είναι



$$\vec{r} = \frac{\sum_i m_i g \vec{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_c$$

Προφανώς, το $\vec{W}$ είναι ισοδύναμο να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε άλλο σημείο εκτός από το $\vec{r}_c$ που είναι στον ίδιο φορέα και αποτελεί μόνο σύμβαση να λέμε ότι το $\vec{W}$ εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας.

Ισορροπία στερεού σώματος

Λέμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία όταν

- η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (ισορροπία ως προς τις μετατοπίσεις)
- η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς κάθε σημείο $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$ (ισορροπία ως προς τις περιστροφές).

Στατική ισορροπία λέμε όταν το σώμα δεν έχει ούτε μεταφορική ούτε γωνιακή ταχύτητα.

Ισχύει: Αν $\sum_i \vec{F}_i = 0$ και $\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0$ ως προς κάποιο σημείο O $\Rightarrow$ $\sum_i \vec{\tau}_{i,O'} = 0$ ως προς κάθε σημείο O'

Πράγματι, $\sum_i \vec{\tau}_{i,o'} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{o'o}) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{o'o} \times \sum_i \vec{F}_i$

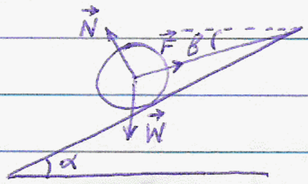
$$= \sum_i \vec{\tau}_{i,o} + 0 = 0$$

Εν γένει, οι συνθήκες ισορροπίας είναι 6 βαθμωτές εξισώσεις άρα λύνονται όταν υπάρχουν 6 άγνωστες ποσότητες. Αντίστοιχα, για ομοεπίπεδες δυνάμεις οι εξισώσεις είναι 3:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i \tau_{iz} = 0$$

και λύνονται όταν υπάρχουν 3 άγνωστες ποσότητες.

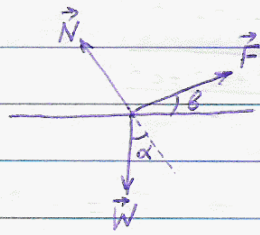
Παράδειγμα



Δίνονται τα W, α, β

Ζητούνται τα $\vec{F}$, $\vec{N}$

Αναλυτικά:



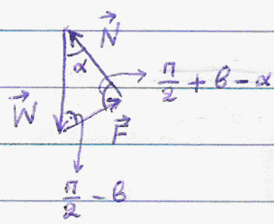
Ισορροπία $\quad \Sigma F_{ix} = 0 \leftrightarrow F\cos\beta - N\sin\alpha = 0$

$\quad\quad \Sigma F_{iy} = 0 \leftrightarrow F\sin\beta + N\cos\alpha - W = 0$

Άρα $\quad F = N \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} \rightsquigarrow N \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}\sin\beta + N\cos\alpha - W = 0$

$\rightarrow N \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = W \rightsquigarrow N = W \dfrac{\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}, \quad F = W \dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$

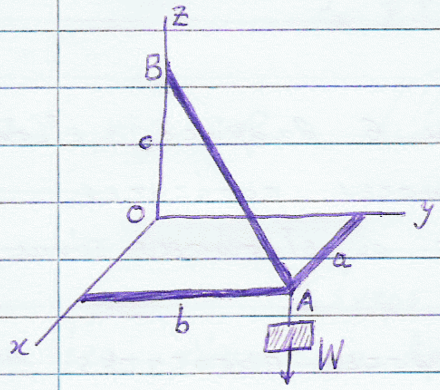
Γραφικά:

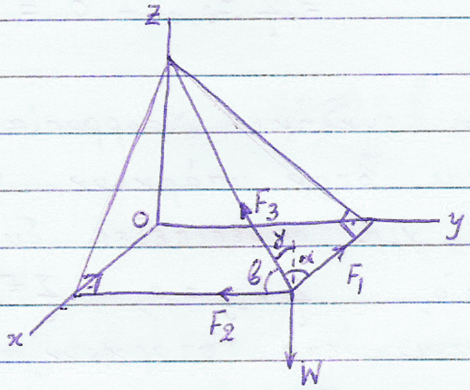


$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha\right)} \leftrightarrow F = W \frac{\sin\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{N}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha\right)} \leftrightarrow N = W \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

Παράδειγμα   Γνωστά: W, a, b, c , Ζητούνται: F_1, F_2, F_3





Ισορροπία $\Sigma F_{ix} = 0 \Leftrightarrow F_1 + F_3 \cos\alpha = 0$

$\Sigma F_{iy} = 0 \Leftrightarrow F_2 + F_3 \cos\beta = 0$

$\Sigma F_{iz} = 0 \Leftrightarrow F_3 \cos\gamma - W = 0$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} , \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} , \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Άρα $F_3 = \frac{W}{\cos\gamma} \Rightarrow F_3 = W\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}$

$$F_1 = -F_3 \cos\alpha = -W\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \Rightarrow F_1 = -W\frac{a}{c}$$

$$F_2 = -F_3 \cos\beta = -W\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \Rightarrow F_2 = -W\frac{b}{c}$$

Αλλιώς (με διανύσματα)

$$\vec{F}_1 = F_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = F_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{W} = W\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \quad \hat{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

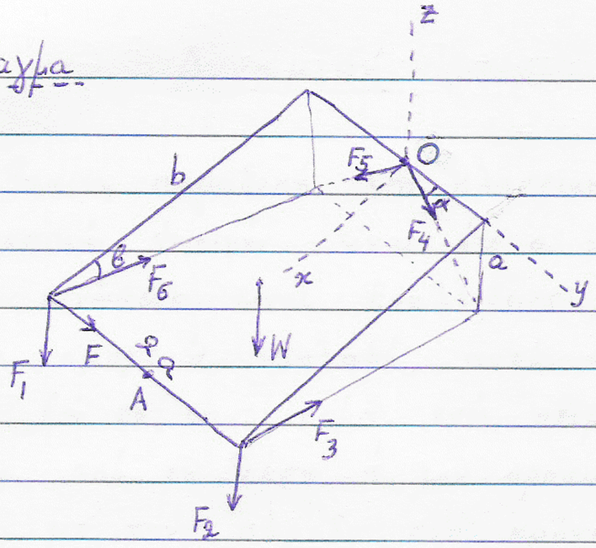
$$\vec{F}_3 = F_3\,\hat{e}_{AB} = \frac{F_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{W} = 0 \Leftrightarrow F_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{F_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + W\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow F_1 + \frac{aF_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0, \quad F_2 + \frac{bF_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0, \quad -W + \frac{cF_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$$

που είναι οι ίδιες εξισώσεις.

Παράδειγμα



Δίνονται W, F, a, b

Ζητούνται $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F$

Ισορροπία $\Sigma F_{ix} = 0 \Leftrightarrow -F_3 \cos\beta - F_6 \cos\beta = 0$

$\Sigma F_{iy} = 0 \Leftrightarrow F_4 \cos\alpha - F_5 \cos\alpha + F = 0$

$\Sigma F_{iz} = 0 \Leftrightarrow -F_1 - F_2 - F_3 \sin\beta - F_6 \sin\beta - F_4 \sin\alpha - F_5 \sin\alpha - W =$

$\Sigma \tau_{ix,O} = 0 \Leftrightarrow aF_1 - aF_2 + aF_6 \sin\beta - aF_3 \sin\beta = 0$

$\Sigma \tau_{iy,O} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2} W + bF_1 + bF_2 + bF_6 \sin\beta + bF_3 \sin\beta = 0$

$\Sigma \tau_{iz,O} = 0 \Leftrightarrow bF + aF_3 \cos\beta - aF_6 \cos\beta = 0$

όπου $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Άρα $F_3 = -F_6 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a} F$

$$F_1 = -\frac{W}{4} - \frac{F}{2}, \quad F_2 = -\frac{W}{4} + \frac{F}{2}$$

$$F_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{W}{2} + F\right), \quad F_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{W}{2} - F\right)$$

Επαλήθευση: Υπολογίζουμε συνολική y-ροπή ως προς A

$$\Sigma \tau_{iy,A} = -\frac{b}{2} W - bF_4 \sin\alpha - bF_5 \sin\alpha$$

$$= -b\left[\frac{W}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{W}{2} + F\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{W}{2} - F\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$