ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Σχετική Κίνηση

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

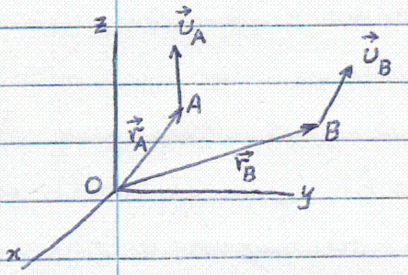
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σχετική κίνηση



$\vec{\upsilon}_{AB}$ = σχετική ταχύτητα του A ως προς το B

$$\vec{\upsilon}_{AB} = \vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_B$$

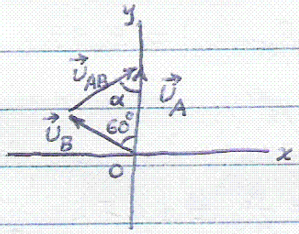
διότι $\vec{\upsilon}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_A - \vec{r}_B)}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_B$

$\vec{a}_{AB}$ = σχετική επιτάχυνση του A ως προς το B

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

διότι $\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{\upsilon}_{AB}}{dt} = \frac{d(\vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_B)}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_A}{dt} - \frac{d\vec{\upsilon}_B}{dt} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$

Παράδειγμα



$\vec{\upsilon}_A$ = ταχύτητα A αεροπλάνου, $\upsilon_A = 300\ \frac{km}{h}$

$\vec{\upsilon}_B$ = " B " , $\upsilon_B = 200\ \frac{km}{h}$

$\vec{\upsilon}_{AB} = ;$

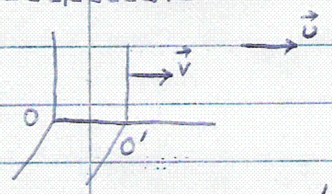
$\vec{\upsilon}_{AB} = \vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_B$

$\upsilon_{AB} = |\vec{\upsilon}_{AB}| = \sqrt{\upsilon_A^2 + \upsilon_B^2 - 2\upsilon_A \upsilon_B \cos 60^\circ} = \sqrt{300^2 + 200^2 - 2\times 300 \times 200 \cos 60^\circ} = 264.6\ km/h$

$\frac{\upsilon_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{\upsilon_B}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\upsilon_B}{\upsilon_{AB}} \sin 60^\circ = 0.655 \Rightarrow \alpha = 40.9^\circ$

Παράδειγμα

α)

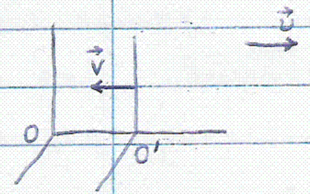


$\upsilon_{ήχου} = \upsilon = 346\ \frac{m}{sec}$ ως προς σύστημα που ηρεμεί

$v = 90\ \frac{km}{h} = 25\ \frac{m}{sec}$

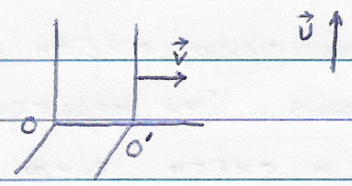
$\upsilon' = \upsilon_{ήχου,O'} = \upsilon_{ήχου} - \upsilon_{O'} = \upsilon - v = 346 - 25 = 321\ \frac{m}{sec}$

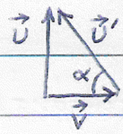
β)



$\upsilon' = \upsilon - \upsilon_{O'} = \upsilon - (-v) = \upsilon + v = 346 + 25 = 371\ \frac{m}{sec}$

γ)





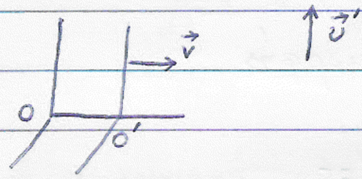
$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

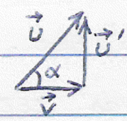
$$\Rightarrow u' = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos 90^\circ} = \sqrt{u^2+v^2} = 346.9\ \frac{m}{sec}$$

$$\tan\alpha = \frac{u}{v} = 13.84 \Rightarrow \alpha = 85.9^\circ$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{u}', \hat{i}}) = 180^\circ - 85.9^\circ = 94.1^\circ$$

δ)





$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$$

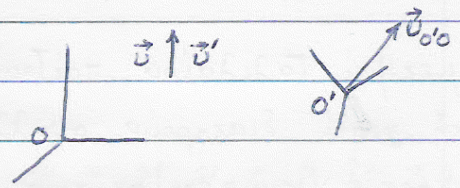
$$\Rightarrow u^2 = u'^2 + v^2 + 2u'v\cos 90^\circ \Rightarrow u^2 = u'^2 + v^2$$

$$\Rightarrow u'^2 = u^2 - v^2 \Rightarrow u' = \sqrt{u^2 - v^2} = 345.1\ \frac{m}{sec}$$

$$\tan\alpha = \frac{u'}{v} = 13.804 \Rightarrow \alpha = 85.8^\circ$$

Η ίδια έννοια της σχετικής ταχύτητας εμφανιζόμενη με μία άλλ
πολύ χρήσιμη μορφή είναι η εξής:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}_{O'O} \Leftrightarrow \vec{u}' = \vec{u} - \vec{u}_{O'O}$$



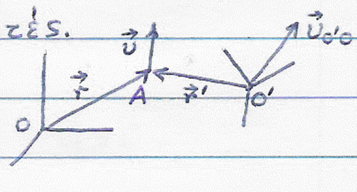
όπου

$\vec{u}$ = ταχύτητα κινητού ως προς O

$\vec{u}'$ = ταχύτητα κινητού ως προς O'

$\vec{u}_{O'O}$ = ταχύτητα του O' ως προς O

Εδώ δεν υπάρχουν δύο κινητά που παρατηρούνται από ένα παρατηρητή, αλλά ένα κινητό που παρατηρείται από δύο παρατηρητές.



Αν A είναι το υλικό σημείο που κινείται, τότε από την έννοια της σχετικής ταχύτητας έχουμε

$$\vec{u}' = \vec{u}_{AO'} = \vec{u}_A - \vec{u}_{O'} = \vec{u} - \vec{u}_{O'O}$$

Επίσης μπορεί να προκύψει και απ' ευθείας για $\vec{u}_{O'O} = σταθ.$

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}' = (\vec{OO'})_{t=0} + \vec{u}_{O'O}\,t + \vec{r}' \Rightarrow \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_{O'O} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{u}_{O'O} + \vec{u}'$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει όταν οι άξονες των δύο συστημάτων αναφοράς δεν περιστρέφονται του ενός ως προς το άλλο (διαφορετικά η σχέση είναι πιο περίπλοκη και περιλαμβάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\vec{\omega}$).

Για τις επιταχύνσεις ισχύει $\vec{a}' = \vec{a}$, όταν $\vec{v}_{o'o}$ = σταθερή ,
δηλαδή η επιτάχυνση είναι αναλλοίωτη για παρατηρητές που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλο με σταθερή ταχύτητα.

Ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων της μορφής

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad , \quad t' = t$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = x - v_x t \; , \; y' = y - v_y t \; , \; z' = z - v_z t \; , \; t' = t$$

όπου $\vec{v}$ = σταθερό λέγεται μετ/μός Γαλιλαίου.
Προφανώς ένας τέτοιος μετ/μός προκύπτει από τη σχετική κίνηση δύο συστημάτων αναφοράς που έχουν σταθερή σχετική ταχύτητα $\vec{v} = \vec{v}_{o'o}$.
Ο αντίστοιχος μετ/μός ταχυτήτων είναι βέβαια (νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων Γαλιλαίου)

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}$$

και των επιταχύνσεων

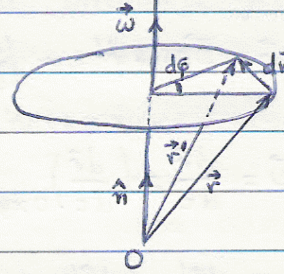
$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Οι μετ/μοί Γαλιλαίου παίζουν σημαντικό ρόλο στην κλασσική (Νευτώνεια) φυσική γιατί διατηρούν αναλλοίωτη (ίδια) τη μορφή των κλασσικών εξισώσεων (συμμετρία των εξισώσεων).

Θα μελετήσουμε τώρα πως τροποποιούνται οι παραπάνω εξισώσεις όταν υπεισέρχεται περιστροφή των αξόνων του ενός συστήματος ως προς το άλλο.

Για στροφή του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ ισχύει:

$$\underline{d\vec{r} = \hat{n}\times\vec{r}\,d\varphi} \quad , \quad \underline{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}} \quad , \quad \vec{\omega} = \omega\hat{n} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{n}$$



Είναι $d\vec{r} = dr\,\dfrac{\hat{n}\times\vec{r}}{|\hat{n}\times\vec{r}|}$

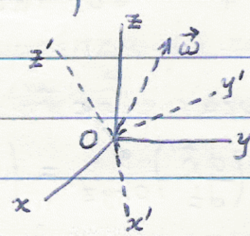
$$|\hat{n}\times\vec{r}| = r\sin(\hat{n},\hat{\vec{r}})$$

$$dr = r\sin(\hat{n},\hat{\vec{r}})\,d\varphi = |\hat{n}\times\vec{r}|\,d\varphi$$

$$d\vec{r} = \hat{n}\times\vec{r}\,d\varphi$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{n}\times\vec{r}\,\frac{d\varphi}{dt} = \omega\hat{n}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Αν $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του $Ox'y'z'$ ως προς το $Oxyz$, τότε για το τυχόν διάνυσμα $\vec{G}$ ισχύει:



$$\underline{\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}\times\vec{G}}$$

Είναι $\vec{G} = G_x\hat{i} + G_y\hat{j} + G_z\hat{k} = G_x'\hat{i}' + G_y'\hat{j}' + G_z'\hat{k}'$

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Oxyz} = \dot{G}_x\hat{i} + \dot{G}_y\hat{j} + \dot{G}_z\hat{k}$$

$$= (\dot{G}_x'\hat{i}' + \dot{G}_y'\hat{j}' + \dot{G}_z'\hat{k}') + (G_x'\dot{\hat{i}}' + G_y'\dot{\hat{j}}' + G_z'\dot{\hat{k}}')$$

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} = \dot{G}_x'\hat{i}' + \dot{G}_y'\hat{j}' + \dot{G}_z'\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + G_x'\dot{\hat{i}}' + G_y'\dot{\hat{j}}' + G_z'\dot{\hat{k}}'$$

Αλλά $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, άρα για $\vec{r} = \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ είναι $\dot{\hat{i}}' = \vec{\omega}\times\hat{i}'$, $\dot{\hat{j}}' = \vec{\omega}\times\hat{j}'$, $\dot{\hat{k}}' = \vec{\omega}\times\hat{k}'$.

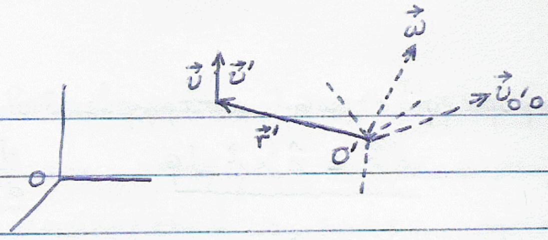
Τελικά $\left(\dfrac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\dfrac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + G_x'\,\vec{\omega}\times\hat{i}' + G_y'\,\vec{\omega}\times\hat{j}' + G_z'\,\vec{\omega}\times\hat{k}'$

$$= \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}\times(G_x'\hat{i}' + G_y'\hat{j}' + G_z'\hat{k}') = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}\times\vec{G}$$

Ισχύει $\underline{\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} = \dot{\vec{\omega}}}$

που προκύπτει από την προηγούμενη θέτοντας $\vec{G} = \vec{\omega}$.

Ισχύει $\quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\upsilon}_{o'o} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$



Είναι $\quad \vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}\,' \Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{Oxyz} + \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Oxyz}$

όπου $\quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Oxyz} \equiv \dot{x}^{\mu}\hat{e}_{\mu}$

$$\vec{\upsilon}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Ox'y'z'} \equiv \dot{x}'^{\mu}\hat{e}'_{\mu}$$

$$\vec{\upsilon}_{o'o} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{Oxyz}$$

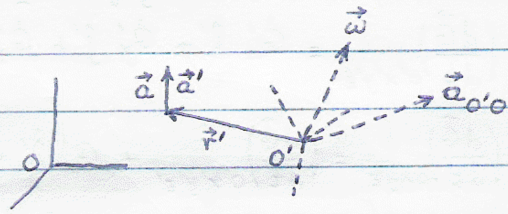
Άρα $\quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{o'o} + \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Oxyz}$

Θέτοντας $\vec{G} = \vec{r}\,'$ στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

Τελικά $\quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{o'o} + \vec{\upsilon}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$

Ισχύει $\quad \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{o'o} + \overset{\text{Coriolis}}{2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,'} + \overset{\text{κεντρομόλος}}{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'$



Είναι $\quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\upsilon}_{o'o} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt}\right)_{Oxyz} + \left(\frac{d\vec{\upsilon}_{o'o}}{dt}\right)_{Oxyz} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{O}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Oxyz}$$

όπου $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)_{Oxyz}, \quad \vec{a}\,' = \frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt} = \left(\frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt}\right)_{Ox'y'z'}, \quad \vec{a}_{o'o} = \frac{d\vec{\upsilon}_{o'o}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\upsilon}_{o'o}}{dt}\right)_{Oxyz}$

Για $\vec{G} = \vec{\upsilon}\,'$, $\quad \left(\frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,' = \vec{a}\,' + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,'$

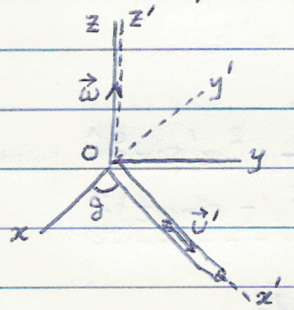
Για $\vec{G} = \vec{r}\,'$, $\quad \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$

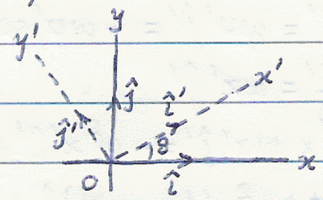
Άρα, $\quad \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,' + \vec{a}_{o'o} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\upsilon}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

$$= \vec{a}\,' + \vec{a}_{o'o} + 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'$$

Παράδειγμα

Σωλήνας στο επίπεδο xy περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega=$ σταθ. γύρω από τον άξονα z. Μέσα στο σωλήνα υπάρχει μαμούνι το οποίο κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon'=$σταθ. προς τα έξω, ξεκινώντας από την αρχή Ο. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ως προς το σταθερό σύστημα αναφοράς





Έστω $Ox'y'z'$ το περιστρεφόμενο σύστημα όπου ο άξονας Ox' συμπίπτει με το σωλήνα. Θεωρούμε ότι αρχικά ο σωλήνας συμπίπτει με τον άξονα Ox, οπότε $\vartheta_0=0$ άρα $\vartheta=\vartheta(t)=\omega t$. Εξάλλου $x'=x'(t)=\upsilon' t$

Οι ταχύτητες στα δύο συστήματα είναι

$$\vec{\upsilon}=\upsilon_x\hat{i}+\upsilon_y\hat{j} \quad , \quad \vec{\upsilon}'=\upsilon'\hat{i}'+0\,\hat{j}'$$

και ισχύει $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'$

Θα εκφράσουμε τα $\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\times\vec{r}'$ στη βάση των $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ και μετά θα κάνουμε την αντικατάσταση.

Είναι $\hat{i}'=\alpha\hat{i}+\beta\hat{j} \Rightarrow \hat{i}'\cdot\hat{i}=\alpha \Rightarrow \alpha=\cos\vartheta$
$\hat{i}'\cdot\hat{j}=\beta \Rightarrow \beta=\sin\vartheta$
$\Rightarrow \hat{i}'=\cos\vartheta\,\hat{i}+\sin\vartheta\,\hat{j}$

$\hat{j}'=\gamma\hat{i}+\delta\hat{j} \Rightarrow \hat{j}'\cdot\hat{i}=\gamma \Rightarrow \gamma=\cos(\frac{\pi}{2}+\vartheta)=-\sin\vartheta$
$\hat{j}'\cdot\hat{j}=\delta \Rightarrow \delta=\cos\vartheta$
$\Rightarrow \hat{j}'=-\sin\vartheta\,\hat{i}+\cos\vartheta\,\hat{j}$

Άρα $\vec{\upsilon}'=\upsilon'\hat{i}'=\upsilon'\cos\vartheta\,\hat{i}+\upsilon'\sin\vartheta\,\hat{j}$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}'=\omega\hat{k}\times x'\hat{i}'=\omega x'\hat{j}'=-\omega x'\sin\vartheta\,\hat{i}+\omega x'\cos\vartheta\,\hat{j}$$

επομένως $\upsilon_x\hat{i}+\upsilon_y\hat{j}=\upsilon'\cos\vartheta\,\hat{i}+\upsilon'\sin\vartheta\,\hat{j}-\omega x'\sin\vartheta\,\hat{i}+\omega x'\cos\vartheta\,\hat{j}$

$$\Rightarrow \upsilon_x=\upsilon'\cos\vartheta-\omega x'\sin\vartheta \quad , \quad \upsilon_y=\upsilon'\sin\vartheta+\omega x'\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\upsilon}=(\upsilon'\cos\omega t-\omega\upsilon' t\sin\omega t)\hat{i}+(\upsilon'\sin\omega t+\omega\upsilon' t\cos\omega t)\hat{j}}$$

Αλλιώς: $x=x'\cos\vartheta \quad , \quad y=x'\sin\vartheta$

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}\cos\vartheta-x'\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}=\upsilon'\cos\vartheta-\omega x'\sin\vartheta$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dx'}{dt}\sin\vartheta+x'\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}=\upsilon'\sin\vartheta+\omega x'\cos\vartheta$$

Ως παρατήρηση αναφέρουμε ότι το $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ υπολογίζεται και ως εξής:

$$\vec{\omega}\times\vec{r}' = \omega\hat{k}\times x'\hat{i}' = \omega\hat{k}\times x'(\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}) = \omega x'\cos\theta(\hat{k}\times\hat{i}) + \omega x'\sin\theta(\hat{k}\times\hat{j}) =$$
$$= \omega x'\cos\theta\,\hat{j} - \omega x'\sin\theta\,\hat{i}$$

Για τις επιταχύνσεις έχουμε

$$\vec{a}' = 0 \quad , \quad \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

και ισχύει $\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{u}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

όπου $\vec{\omega}\times\vec{u}' = \omega\hat{k}'\times u'\hat{i}' = \omega u'\hat{j}' = -\omega u'\sin\theta\,\hat{i} + \omega u'\cos\theta\,\hat{j}$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}' = \omega\hat{k}'\times x'\hat{i}' = \omega x'\hat{j}'$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \omega\hat{k}'\times\omega x'\hat{j}' = -\omega^2 x'\hat{i}' = -\omega^2 x'\cos\theta\,\hat{i} - \omega^2 x'\sin\theta\,\hat{j}$$

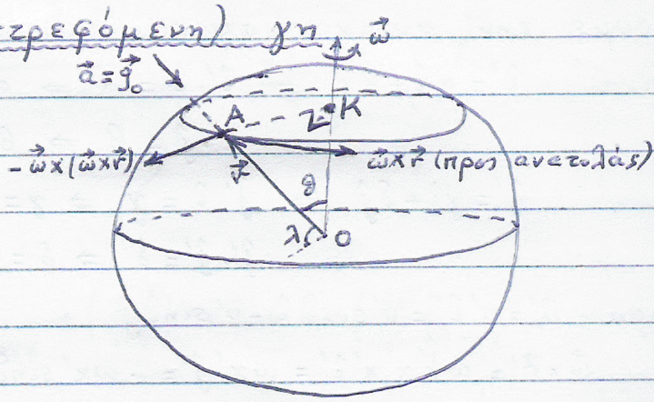
Άρα $\underline{\vec{a} = (-2\omega u'\sin\omega t - \omega^2 u' t\cos\omega t)\hat{i} + (2\omega u'\cos\omega t - \omega^2 u' t\sin\omega t)\hat{j}}$

Αλλιώς: $a_x = \dfrac{du_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}(u'\cos\omega t - \omega u' t\sin\omega t)$

$$= -u'\omega\sin\omega t - \omega u'\sin\omega t - \omega^2 u' t\cos\omega t$$
$$= -2\omega u'\sin\omega t - \omega^2 u' t\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d}{dt}(u'\sin\omega t + \omega u' t\cos\omega t)$$
$$= u'\omega\cos\omega t + \omega u'\cos\omega t - \omega^2 u' t\sin\omega t$$
$$= 2\omega u'\cos\omega t - \omega^2 u' t\sin\omega t$$

Κίνηση ως προς την (περιστρεφόμενη) γη



Έστω ένα θεωρούμενο σημείο πάνω στην επιφάνεια της γης ή κάπου έξω απ' αυτήν.
Λόγω της παγκόσμιας έλξης, η επιτάχυνση που μετρά ένας (υποθετικός) παρατηρητής O που δεν περιστρέφεται μαζί με τη γη είναι $\vec{a} = \vec{g}_0 = -g_0\dfrac{\vec{r}}{r}$, $g_0 = \dfrac{GM_\Gamma}{r^2}$, όπου $\vec{r} = \vec{OA}$ το διάνυσμα θέσης του κινητού ως προς τον O.

Όμως, η γη περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 7.292\times 10^{-5}\,\frac{rad}{sec}$ και $R_\Gamma = 6.37\times 10^6\,m$ είναι η ακτίνα της γης. Ένας παρατηρητής O' πάνω στην επιφάνεια της γης χρησιμοποιεί το διάνυσμα θέσης για το κινητό $\vec{r}' = \vec{O'A} = \vec{r} - \vec{OO'}$ και μετράει επιτάχυνση $\vec{a}'$ την οποία ζητούμε να προσδιορίσουμε.

Είναι $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'o} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

όπου $\vec{a}_{o'o} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{KO'}) = \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\vec{OO'}-\vec{OK})] = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OO'})$,

άρα $\vec{a}_{o'o} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OO'}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{O'A}) = \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\vec{OO'}+\vec{O'A})]$

$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OA}) = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

Άρα $\underline{\vec{a}' = \vec{g}_o - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

(Σχεδόν) ακίνητο σώμα $(\vec{v}' \simeq 0)$

Είναι $\vec{a}' = \vec{g}_o - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

Το ακίνητο σώμα μπορεί να είναι το νήμα της στάθμης και επομένως η κατεύθυνση $\vec{a}'$ που ορίζει δεν κατευθύνεται προς το κέντρο της γης όπως η $\vec{g}_o$, αλλά έχει μια δεδομένη απόκλιση ανεξαρτήτως του γήινου παρατηρητή, λόγω του όρου $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ της φυγόκεντρης επιτάχυνσης. Η φυγόκεντρη επιτάχυνση μετατοπίζει ελαφρώς από την ακτινική διεύθυνση προς το νότο στο Βόρειο ημισφαίριο και προς το βορά στο Νότιο ημισφαίριο

Το $\underline{\vec{a}' = \vec{g} = \vec{g}_o - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$ λέγεται ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας, είναι $\vec{g} \not\parallel \vec{r}$ και είναι αυτό που μετράμε με τα πειράματα της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων, π.χ. $g = 9.80\ m/sec^2$ στην Ελλάδα.

(Προφανώς η επιφάνεια ενός υγρού είναι κάθετη στο $\vec{g}$ και όχι στο $\vec{g}_o$)

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της g συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους λ ως εξής:

Η γωνία των $\vec{g}_o$, $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ είναι $\frac{\pi}{2}+\vartheta$, και $|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})| = \omega|\vec{\omega}\times\vec{r}| = \omega^2 r\sin\vartheta$, άρα

$$g = \sqrt{g_o^2 + \omega^4 r^2\sin^2\vartheta + 2g_o\omega^2\sin\vartheta\cos(\tfrac{\pi}{2}+\vartheta)} = \sqrt{g_o^2+\omega^4 r^2\sin^2\vartheta - 2g_o\omega^2 r\sin^2\vartheta}$$
$$= \sqrt{g_o^2 - \omega^2 r\sin^2\vartheta(2g_o-\omega^2 r)} = \sqrt{g_o^2 - \omega^2 r\cos^2\lambda\,(2g_o-\omega^2 r)}$$

Επομένως, αυξάνοντας το γεωγραφικό πλάτος, αυξάνει το g. Για $\lambda=0$ (ισημερινός) έχουμε την ελάχιστη τιμή $g_{min} = \sqrt{g_o^2-\omega^2 r(2g_o-\omega^2 r)}$ $= \sqrt{g_o^2 - 2g_o\omega^2 r + \omega^4 r^2} = \sqrt{(g_o-\omega^2 r)^2} = g_o - \omega^2 r$, ενώ στους πόλους έχουμε τη μέγιστη τιμή $g_{max} = g_o$ (και το $\vec{g}$ κατευθύνεται προς το κέντρο της γης)

Στην επιφάνεια της γης είναι $\omega^2 R_\Gamma \simeq 3.39\times10^{-2}\ \frac{m}{sec}$, ενώ $g_{o,\Gamma} \simeq 9.82\frac{m}{sec^2}$, άρα αν και μικρή η τιμή της φυγόκεντρης επιτάχυνσης (μερικά εκατοστά του m/sec^2) είναι αυτή που προκαλεί σχεδόν εξολοκλήρου τη μεταβολή του g με το λ. Επομένως, στο Βόρειο πόλο $g \simeq 9.82\ \frac{m}{sec^2}$, στην Αγγλία $g \simeq 9.81 \ m/sec^2$, στην Ελλάδα $g \simeq 9.80 \ m/sec^2$, στον ισημερινό $g \simeq 9.78 \ m/sec^2$. Στην πραγματικότητα υπάρχουν κάποιες μικρές αποκλίσεις και από τις τιμές αυτές λόγω του ότι η γη δεν είναι τελείως σφαιρική, αλλά η ακτίνα της κυμαίνεται από $6.353 \times 10^6 m$ στους πόλους έως $6.384 \times 10^6 m$ στον ισημερινό και η τιμή $6.371 \times 10^6 m$ αποτελεί μόνο μία μέση τιμή διαφόρων μοντέλων της γης ως σφαίρα.

Κινούμενο σώμα

Είναι $\vec{a}' = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$, όπου $\vec{g}$ η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας που μετράμε.

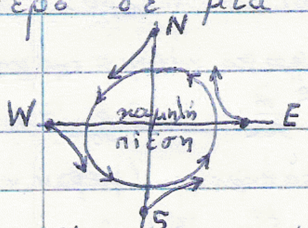
(i) κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω: $\vec{v}' = -v' \frac{\vec{r}}{r}$, οπότε $-\vec{\omega} \times \vec{v}' = \frac{v'}{r} \vec{\omega} \times \vec{r}$, άρα η επιτάχυνση Coriolis είναι προς την ανατολή.

Δηλαδή ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα εκτρέπεται ελαφρώς σε σχέση με το νήμα της στάθμης προς την ανατολή.

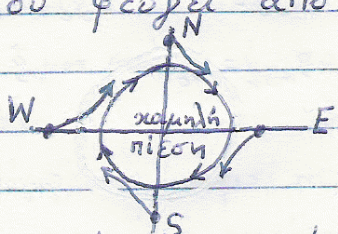
(ii) οριζόντια κίνηση:

Η επιτάχυνση Coriolis προσδίδει στην κίνηση μια δεξιά απόκλιση στο βόρειο ημισφαίριο όπως κοιτάζουμε από πάνω (αριστερή στο νότιο ημισφαίριο). Η απόκλιση αυξάνει όσο πλησιάζουμε προς τους πόλους. Π.χ. στις ρουκέτες, όπου η ταχύτητα v' είναι μεγάλη υπάρχει σημαντική εκτροπή.

Στους ανεμοστρόβιλους, αν δημιουργηθεί ένα κέντρο χαμηλής πίεσης στην ατμόσφαιρα, αέριες μάζες κινούνται ακτινικά προς το κέντρο. Λόγω της Coriolis δημιουργείται στροβιλώδης κίνηση με φορά αντίθετη προς τους δείκτες του ρολογιού στο βόρειο ημισφαίριο (και σύμφωνα με τους δείκτες στο νότιο). Επίσης το ίδιο συμβαίνει για νερό σε μια λεκάνη που φεύγει από μια τρύπα.

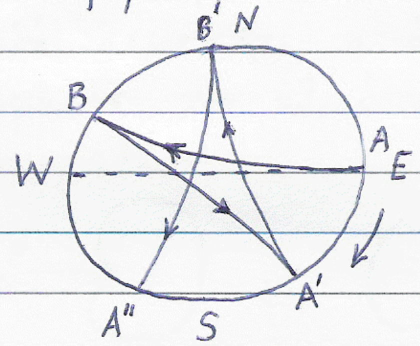


Βόρειο ημισφαίριο



Νότιο ημισφαίριο

Στο εκκρεμές του Foucault έχουμε οριζόντια σχεδόν κίνηση και κατά τη διάρκεια των επαναλαμβανόμενων αιωρήσεων έχουμε διαρκή εκτροπή προς τα δεξιά (στο βόρειο ημισφαίριο), επομένως προκύπτει περιστροφή του επιπέδου των αιωρήσεων σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού στο βόρειο ημισφαίριο (αντίθετα στο νότιο) με κυκλική συχνότητα $\omega = 11^\circ 15'/h$. Κι αν η γη ήταν συνέχεια καλυμμένη με σύννεφα, η περιστροφή του εκκρεμούς θα αποδείκνυε την περιστροφή της γης.



Παράδειγμα

Για σώμα που πέφτει από την ηρεμία από ύψος h στον ισημερινό, βρείτε την απόκλιση του προς την ανατολή.

Στον ισημερινό $\vec{\upsilon}' \perp \vec{\omega}$, άρα $|-2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'| = 2\omega\upsilon'$ και το $-2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'$ κατευθύνεται οριζόντια προς ανατολάς.

Από τη σχέση $\vec{a}' = \dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'$ έχουμε

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = g \quad , \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega\upsilon'$$

Είναι $\dfrac{dy'}{dt} = gt$ και αυτή η τιμή της κατακόρυφης ταχύτητας μπορεί με καλή προσέγγιση να θεωρηθεί ως η τιμή του υ' (μιας και η επίδραση της επιτάχυνσης Coriolis αναμένεται μικρή).

Άρα $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\omega g t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \omega g t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g t^3$

Αλλά $h = \frac{1}{2} g t^2$, άρα $x = \dfrac{\omega}{3}\sqrt{\dfrac{8h^3}{g}} \Rightarrow x = 1.53\times10^{-5}\ h^{3/2}$ (m)

Για $h = 100\,m \Rightarrow x = 1.53\times10^{-2}\,m$