Πανεπιστήμιο Αιγαίου

# Πιθανότητες και Στατιστική

Ελισάβετ Κωνσταντίνου



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

Προηγούμενα μαθήματα: τυχαίες μεταβλητές

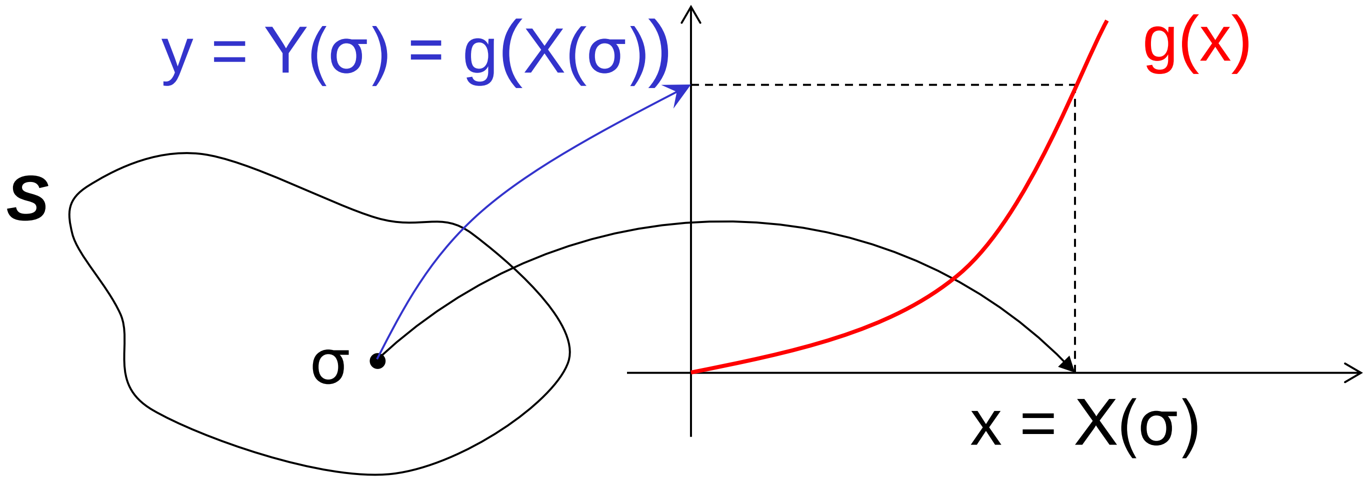
- Συνεχείς τ.μ. :
  - συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και
  - πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = dF(x)/dx$
- Διακριτές τ.μ. :
  - συνάρτηση πιθανότητας $p(x_i) = P(X = x_i)$

Σημερινό αντικείμενο:

- Αν X τ.μ. και g πραγματική συνάρτηση, τι είναι η $Y = g(X)$;

# Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή και g μια πραγματική συνάρτηση, η Y = g(X) είναι τ.μ. (αρκεί το πεδίο ορισμού της g να περιλαμβάνει το πεδίο τιμών της X).



# Παραδείγματα

- Διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης $\rightarrow$ κόστος ($Y = cX$)
- Ρεύμα σε ένα κύκλωμα $\rightarrow$ ισχύς ($Y = cX^2$)
- Συχνότητα ενός σήματος $\rightarrow$ περίοδος ($Y = 1/X$)
- Χρόνος μεταξύ βλαβών σε ένα σύστημα $\rightarrow$ χρόνος μέχρι την εμφάνιση της δεύτερης βλάβης ($Y = X_1 + X_2$)

# Διατύπωση του προβλήματος

- Εστω συνεχής τ.μ. X με γνωστές π.π. $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x)$. Εστω επίσης η τ.μ. Y = g(X). Ζητούνται:
  - Υπολογισμός της π.π. $f_Y(y)$ της Y από την $f_X(x)$
  - Υπολογισμός της σ.κ. $F_Y(y)$ από την $F_X(x)$
- Ειδικές περιπτώσεις: γραμμικές συναρτήσεις, δυνάμεις

# Γραμμικές συναρτήσεις

Περίπτωση 1: Y = aX + b, a>0:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Περίπτωση 2: Y = aX + b, a<0:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Και στις δύο περιπτώσεις παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

# Παραδείγματα

- Η X είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $(x_1, x_2)$ και
  $Y = aX + b$:

$$f_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \le x \le x_2$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|(x_2 - x_1)}, \quad ax_1 + b \le y \le ax_2 + b$$

# Παραδείγματα (συν.)

- $X \sim N(\mu, \sigma)$ και $Y = aX + b$:

  $Y \sim N(a\mu+b, |a|\sigma)$
- Η $X$ είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda$ και $Y = aX$, $a>0$:

  Η $Y$ είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\lambda/a$.

# Παραδείγματα – δυνάμεις

Αν η X έχει σ.κ. $F_X(x)$ και $Y = X^2$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = \begin{cases} F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right) & (y \ge 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy} = \begin{cases} \dfrac{f_X\left(\sqrt{y}\right) + f_X\left(-\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} & (y \ge 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

Π.χ. για X ομοιόμορφη στο [–1, 1], οπότε $F_X(x) = (1+x)/2$ για $-1 \le x \le 1$, παίρνουμε:

$$F_Y(y) = \sqrt{y}\,, \quad 0 \le y \le 1$$

# Αύξουσα ή φθίνουσα g(x)

Αν η g είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x = g^{-1}(y)$, οπότε:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P\left(X \le g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \left.\frac{dF_X(x)}{dy}\right|_{x=g^{-1}(y)} = \left.\frac{dF_X(x)}{dx}\frac{dx}{dy}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

$$= f_X(x)\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=g^{-1}(y)} = \left.\frac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

όπου $g'(x) = \dfrac{dg}{dx}$ για $x = g^{-1}(y)$

# Αύξουσα ή φθίνουσα g(x)

Για g γνησίως φθίνουσα καταλήγουμε στα εξής:

$$F_Y(y) = P(g(X) \le y) = P\left(X \ge g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = -f_X(x)\frac{dx}{dy}\bigg|_{x=g^{-1}(y)} = -\frac{f_X(x)}{g'(x)}\bigg|_{x=g^{-1}(y)}$$

Και στις δύο περιπτώσεις (αύξουσα / φθίνουσα g) έχουμε

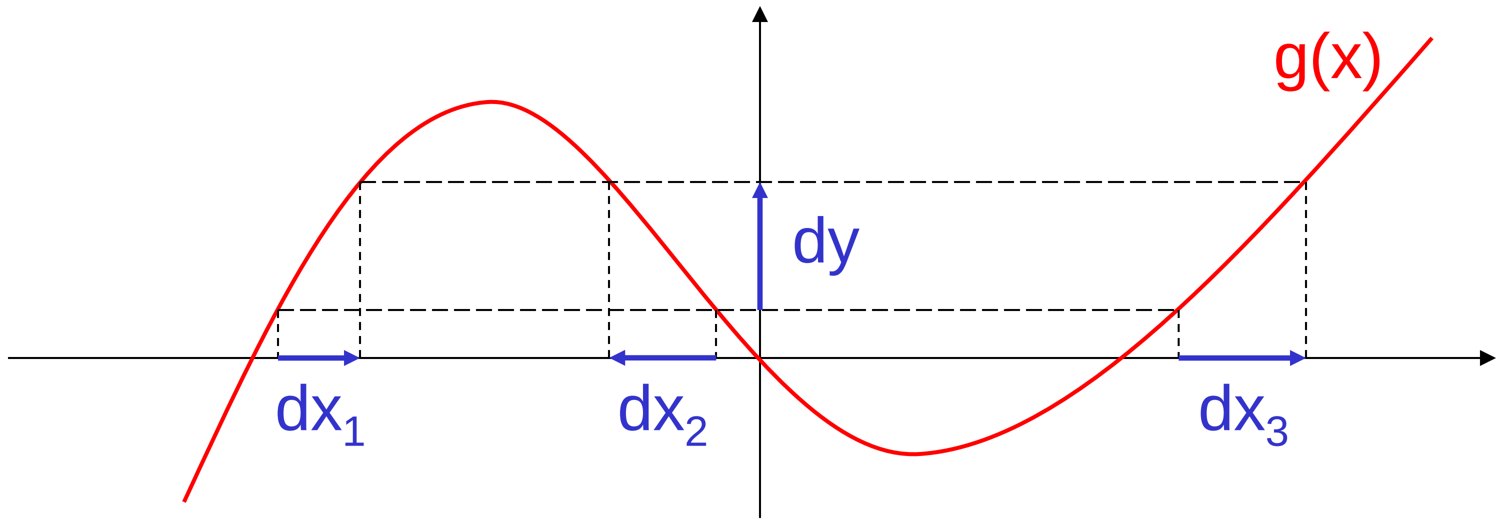
$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Bigg|_{x=g^{-1}(y)} = \frac{f_X(x)}{\left|g'(x)\right|}\Bigg|_{x=g^{-1}(y)}$$

# Η γενική περίπτωση

Αν η y = g(x) δεν είναι μονότονη, έχει περισσότερες από μία λύσεις ως προς x: $x_i(y)$, i=1, …, n. Τότε:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x=x_i(y)} = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} \right|_{x=x_i(y)}$$

Μπορούμε να δούμε αυτό το αποτέλεσμα γραφικά για n=3:




$$
\begin{aligned}
f_Y(y)dy &= P(y < Y \le y + dy) = P(y < g(X) \le y + dy) \\
&= P(x_1 < X \le x_1 + dx_1) + P(x_2 + dx_2 < X \le x_2) \\
&\quad + P(x_3 < X \le x_3 + dx_1) \\
&= f_X(x_1)|dx_1| + f_X(x_2)|dx_2| + f_X(x_3)|dx_3| \\
&= \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}dy + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}dy + \frac{f_X(x_3)}{|g'(x_3)|}dy
\end{aligned}
$$

$$dy = g'(x_i)dx_i$$

# Παραδείγματα (1)

- Η τ.μ. X είναι Cauchy με παράμετρο a. Βρείτε την π.π. της Y = 1/X.

  Υπάρχει μία λύση της y = g(x) = 1/x ως προς x: $x_1 = 1/y$

  Η π.π. της X είναι:

$$f_X(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2}$$

  Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα παίρνουμε:

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=1/y} = x^2 \left.\frac{a/\pi}{x^2 + a^2}\right|_{x=1/y} = \frac{1/a\pi}{y^2 + (1/a)^2}$$

  δηλ. η Y είναι πάλι Cauchy με παράμετρο 1/a.

# Παραδείγματα (2α)

- Η X είναι N(0, σ). Βρείτε την π.π. της Y = aX$^2$.

  Για y>0 υπάρχουν δύο λύσεις της y = g(x) ως προς x:

  $$x_{1,2} = \sqrt{y/a}$$

  Για y<0 δεν υπάρχουν λύσεις, οπότε $f_Y(y) = 0$.

  Με το γνωστό θεώρημα παίρνουμε:

  $$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}}\left[f_X\left(\sqrt{y/a}\right) + f_X\left(-\sqrt{y/a}\right)\right], \quad y \geq 0$$

  Με παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε:

  $$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{y/a}\right) - F_X\left(-\sqrt{y/a}\right), \quad y \geq 0$$

# Παραδείγματα (2β)

Αν η X είναι N(0, σ):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

οπότε:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a y}} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right), \quad y \geq 0$$

# Παραδείγματα (3)

- Η X είναι N(μ, σ). Βρείτε την π.π. της $Y = e^X$.

  Για y>0 υπάρχει μία λύση, $x_1 = \ln y$, για $y \leq 0$ καμμία.

  Πάλι με το γνωστό θεώρημα:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left( -\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad y > 0$$

Η παραπάνω κατανομή λέγεται λογαριθμοκανονική (lognormal).

# Παραδείγματα (4)

- Ενα βλήμα εκτοξεύεται με σταθερή αρχική ταχύτητα v και υπό γωνία φ~U(0, π/2) με το οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η κατανομή του βεληνεκούς D.

$$d = \frac{v^2}{g}\sin\varphi = a\sin X \qquad \text{όπου a σταθερά και X\textasciitilde U(0, π)}$$

Για $0 \leq d \leq a$ υπάρχουν δύο λύσεις, $x_1 = \sin^{-1}(y/a)$ και $x_2 = \pi - \sin^{-1}(y/a)$. Η π.π. του D είναι τελικά:

$$f_D(d) = \frac{2}{\pi\sqrt{a^2 - d^2}}, \quad 0 \leq d < a$$

# Συναρτήσεις διακριτών τ.μ.

- Αν η διακριτή τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας $p_X(i)$ για $i \in S$, η σ.π. $p_Y(j)$ της $Y = g(X)$ είναι:

  $p_Y(j) = P(Y = j) = P(g(X) = j)$ για $j = g(i)$, $i \in S$
- Παράδειγμα: X ομοιόμορφη με $p_X(i) = 1/6$, $i = 1, ..., 6$.
  - Αν $Y = X^2$:
    $p_Y(j) = 1/6$ για $j = 1, 4, 9, 16, 25, 36$
  - Αν $Y = (X–3)^2$:
    $p_Y(j) = 1/3$ για $j = 1$ ή $4$
    $p_Y(j) = 1/6$ για $j = 0$ ή $9$