Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πιθανότητες και Στατιστική

Ελισάβετ Κωνσταντίνου

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

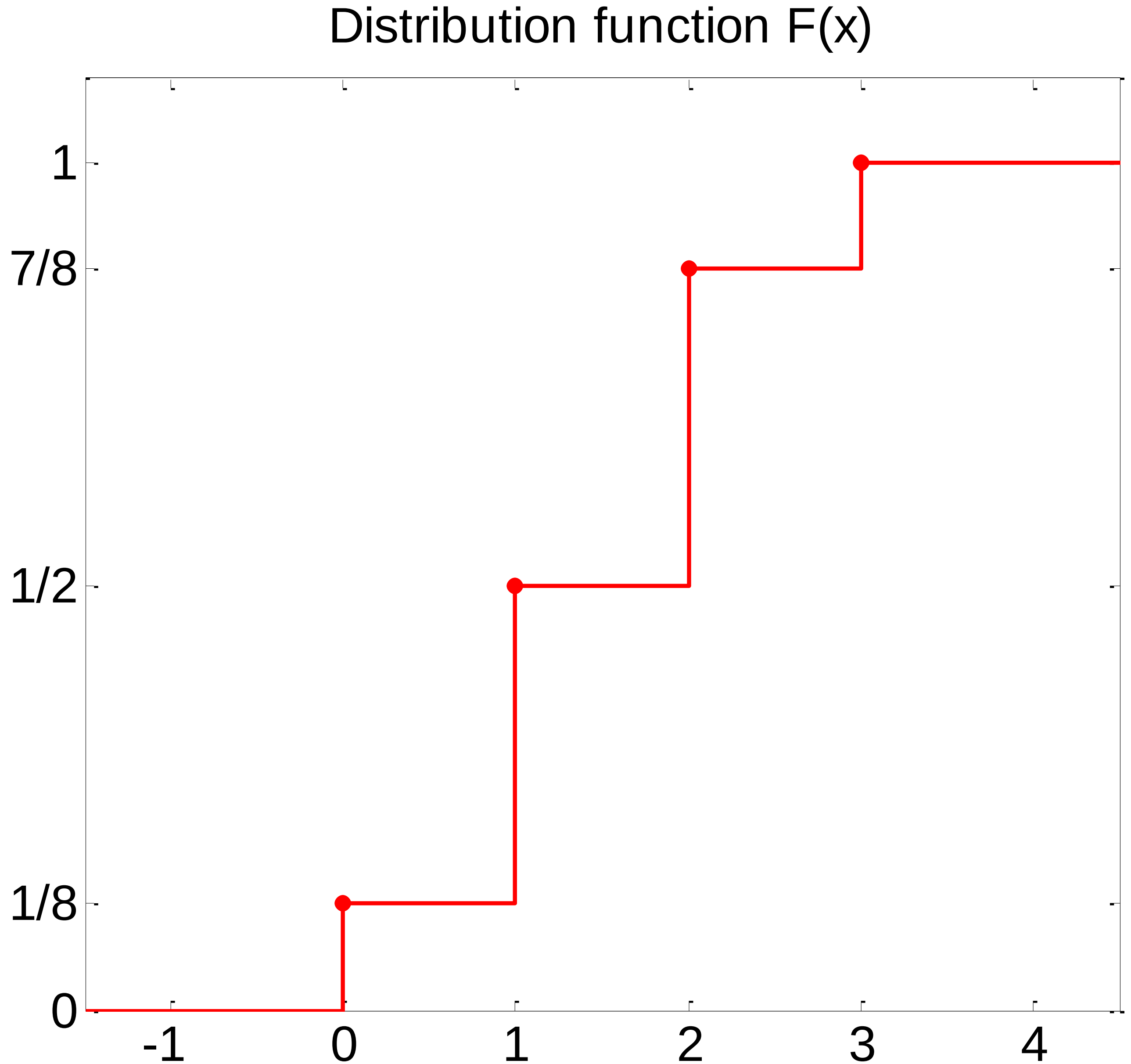
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ.

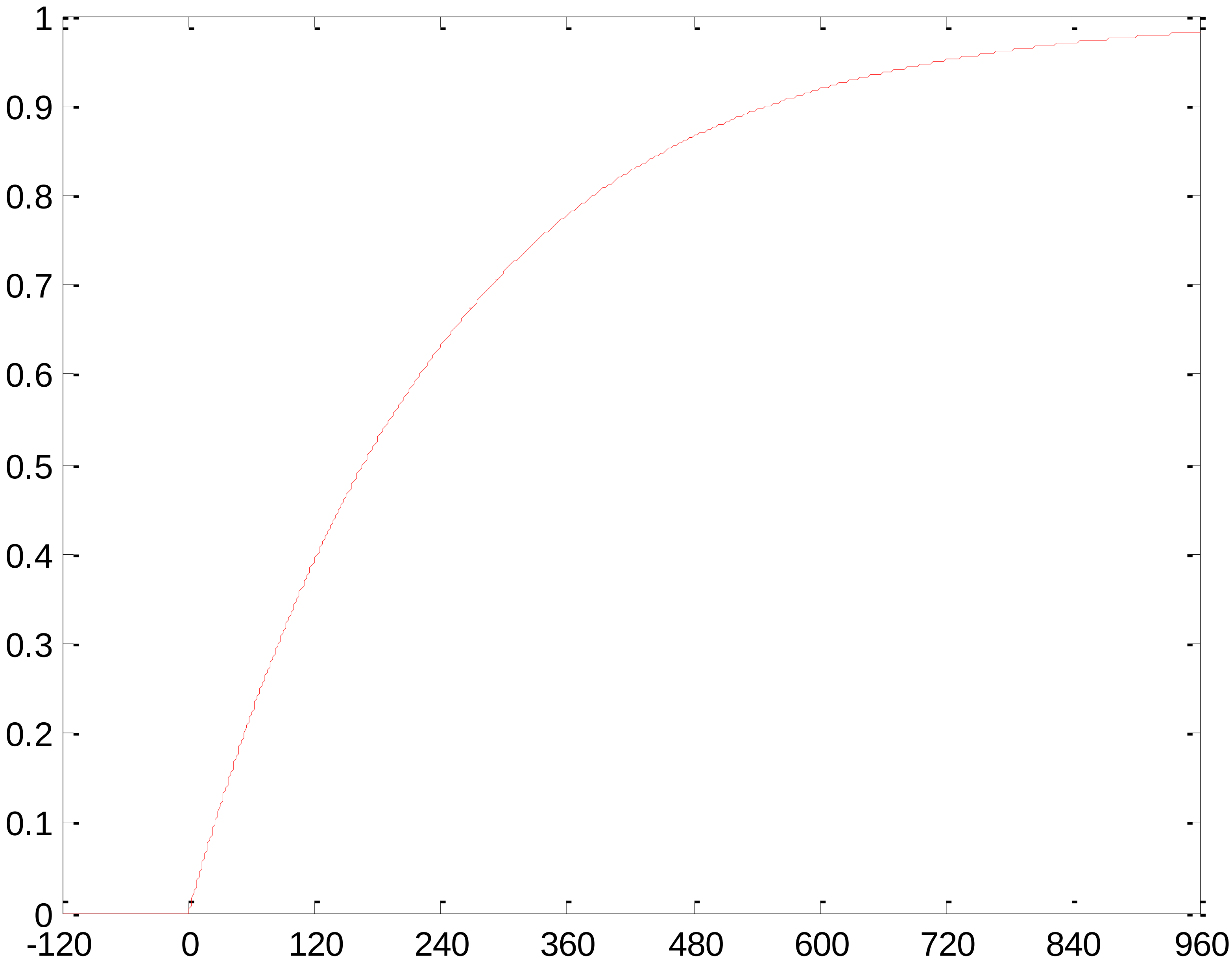
- ΟΡΙΣΜΟΣ: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function, cdf) ή απλά συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η εξής πραγματική συνάρτηση ($\mathbf{R} \to \mathbf{R}$):

$$F(x) = P(X \leq x), \ -\infty < x < \infty$$

- Εχουμε δει δύο διαφορετικές μορφές της συνάρτησης κατανομής (υπάρχουν περισσότερες):
  - κλιμακωτή (σταθερή κατά τμήματα)
  - συνεχή



Distribution function F(x)
1
7/8
1/2
1/8
0
-1
0
1
2
3
4


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-120
0
120
240
360
480
600
720
840
960

Ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής

$0 \leq F(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ (η F είναι αύξουσα συνάρτηση)

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$\lim_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$ (η F είναι συνεχής από δεξιά)

Υπολογισμός πιθανοτήτων από την σ.κ.

- $P(X \leq \alpha) = F(\alpha)$ (από τον ορισμό)
- $P(X > \beta) = 1 - P(X \leq \beta) = 1 - F(\beta)$
- $P(\alpha < X \leq \beta) = P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$
- $P(X = \alpha) = F(\alpha) - F(\alpha-)$

  (Με $F(\alpha-)$ εννούμε το όριο από αριστερά)

Συνεχείς τ.μ.

- ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια τ.μ. λέγεται συνεχής όταν:

α) η συνάρτηση κατανομής της είναι συνεχής για κάθε x

β) η σ.κ. είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού (δηλ. για κάθε x, εκτός ίσως από πεπερασμένο αριθμό σημείων)

γ) η παράγωγος της σ.κ. είναι κατά τμήματα συνεχής

Παρατηρήσεις

- Σε αντίθεση με την «κλιμακωτή» (ασυνεχή) μορφή της σ.κ. μιας διακριτής τ.μ., η σ.κ. μιας συνεχούς τ.μ. είναι μια συνεχής καμπύλη.
- Το πεδίο τιμών μιας συνεχούς τ.μ. είναι το **R**, ή ένα διάστημα του **R**, ή η ένωση ή τομή περισσότερων διαστημάτων του **R** (συνεχές).

Παρατηρήσεις

- Ποιά είναι η $P(X = \alpha)$?

  $P(X = \alpha) = F(\alpha) – F(\alpha) = 0$ (παρ’ όλα αυτά το ενδεχόμενο $X = \alpha$ μπορεί να συμβεί).
- Επομένως στις συνεχείς τ.μ.:
  $P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta)$
- Ποιά είναι η $P(X \approx \alpha)$?

  $P(\alpha \leq X \leq \alpha + dx) = F(\alpha + dx) – F(\alpha) \approx F'(\alpha)\, dx$

Πυκνότητα πιθανότητας συνεχούς τ.μ.

- ΟΡΙΣΜΟΣ: Ως πυκνότητα πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ. ορίζουμε την παράγωγο της σ.κ:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

- Ισοδύναμα ισχύει:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Ιδιότητες της π.π. συνεχούς τ.μ.

α) $f(x) \geq 0$ για κάθε x (αφού η F είναι αύξουσα συνάρτηση)
$f(x) = 0$ αν το x βρίσκεται εκτός του πεδίου τιμών της X (εκεί η F είναι σταθερή)

β) Η f είναι κατά τμήματα συνεχής (έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών)

γ) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ (η πιθανότητα του βέβαιου ενδεχομένου)

- Αν μια συνάρτηση έχει τις παραπάνω ιδιότητες, είναι π.π. κάποιας συνεχούς τ.μ.

Υπολογισμός πιθανοτήτων από την π.π.

- Από τον ορισμό της π.π. έχουμε:

$$P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

- Θυμηθήτε ότι $P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta)$.

$$P(X \geq \alpha) = 1 - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(t)dt$$

$$P(X \leq \beta) = F(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(t)dt$$

- Αρα από την π.π. μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου που αντιστοιχεί σε ανοικτό ή κλειστό διάστημα του **R**. Στην πράξη χρησιμοποιούμε την π.π. ή την σ.κ. (ότι είναι ευκολότερο).

Παράδειγμα

- Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

  είναι π.π. γιατί:

  – $f(x) \ge 0$ για κάθε x

  – η f είναι κατά τμήματα συνεχής με μια ασυνέχεια στο 1

  – και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = 1$

- Η αντίστοιχη σ.κ. είναι:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα

- Από την προηγούμενη π.π. ή την σ.κ. μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες διαστημάτων όπως:

$$P\left(x \leq \tfrac{1}{2}\right) = P\left(x < \tfrac{1}{2}\right) = F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} 2x\,dx = \tfrac{1}{4}$$

$$P\left(\tfrac{1}{4} < x < \tfrac{3}{4}\right) = P\left(\tfrac{1}{4} \leq x \leq \tfrac{3}{4}\right) = F\left(\tfrac{3}{4}\right) - F\left(\tfrac{1}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} 2x\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Εκθετική κατανομή

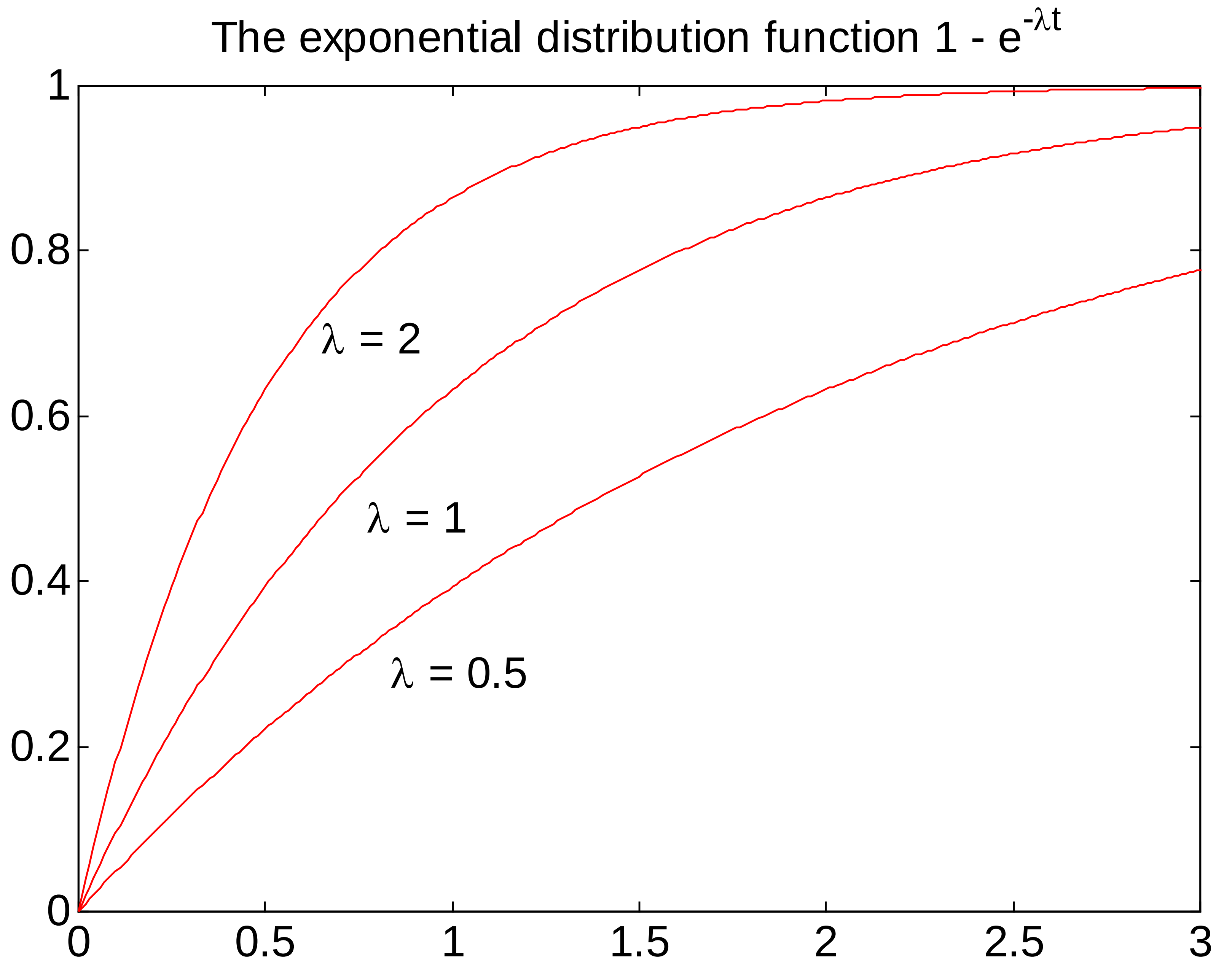
- Εχουμε δει την ακόλουθη σ.κ., που λέγεται **εκθετική**:

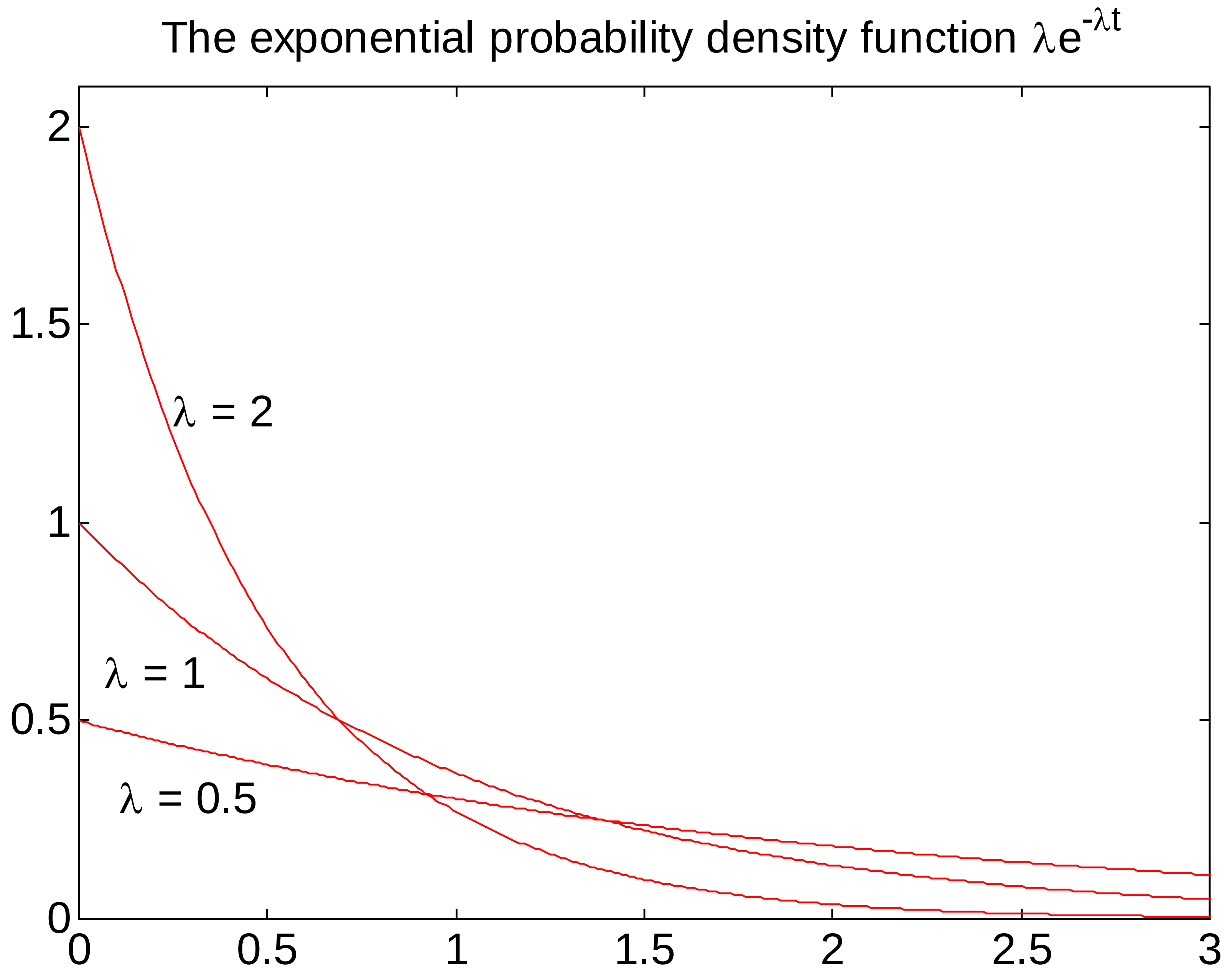
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Η αντίστοιχη π.π. είναι:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{\alpha}^{\beta} = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}$
- $P(X \geq \alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{\alpha}^{+\infty} = e^{-\lambda \alpha} \quad (\beta \geq \alpha \geq 0)$


The exponential distribution function $1 - e^{-\lambda t}$
λ = 2
λ = 1
λ = 0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



The exponential probability density function λe^{-λt}
λ = 2
λ = 1
λ = 0.5
0
0.5
1
1.5
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Κατανομή Weibull

- Η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^b} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

  όπου b θετική σταθερά, είναι συνεχής σ.κ. και παραγωγίσιμη για $x \neq 0$. Η παράγωγός της

  $$f(x) = \begin{cases} bx^{b-1}e^{-x^b} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  είναι συνεχής κατά τμήματα και επομένως είναι π.π. κάποιας συνεχούς τ.μ.
- Η κατανομή αυτή λέγεται Weibull και έχει σημαντικές εφαρμογές σε θέματα αξιοπιστίας.

Ομοιόμορφη κατανομή

- Η ομοιόμορφη π.π. είναι σταθερή σε ένα διάστημα [α, β]:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

- Η αντίστοιχη σ.κ. είναι:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta\\ 1 & x>\beta\end{cases}$$

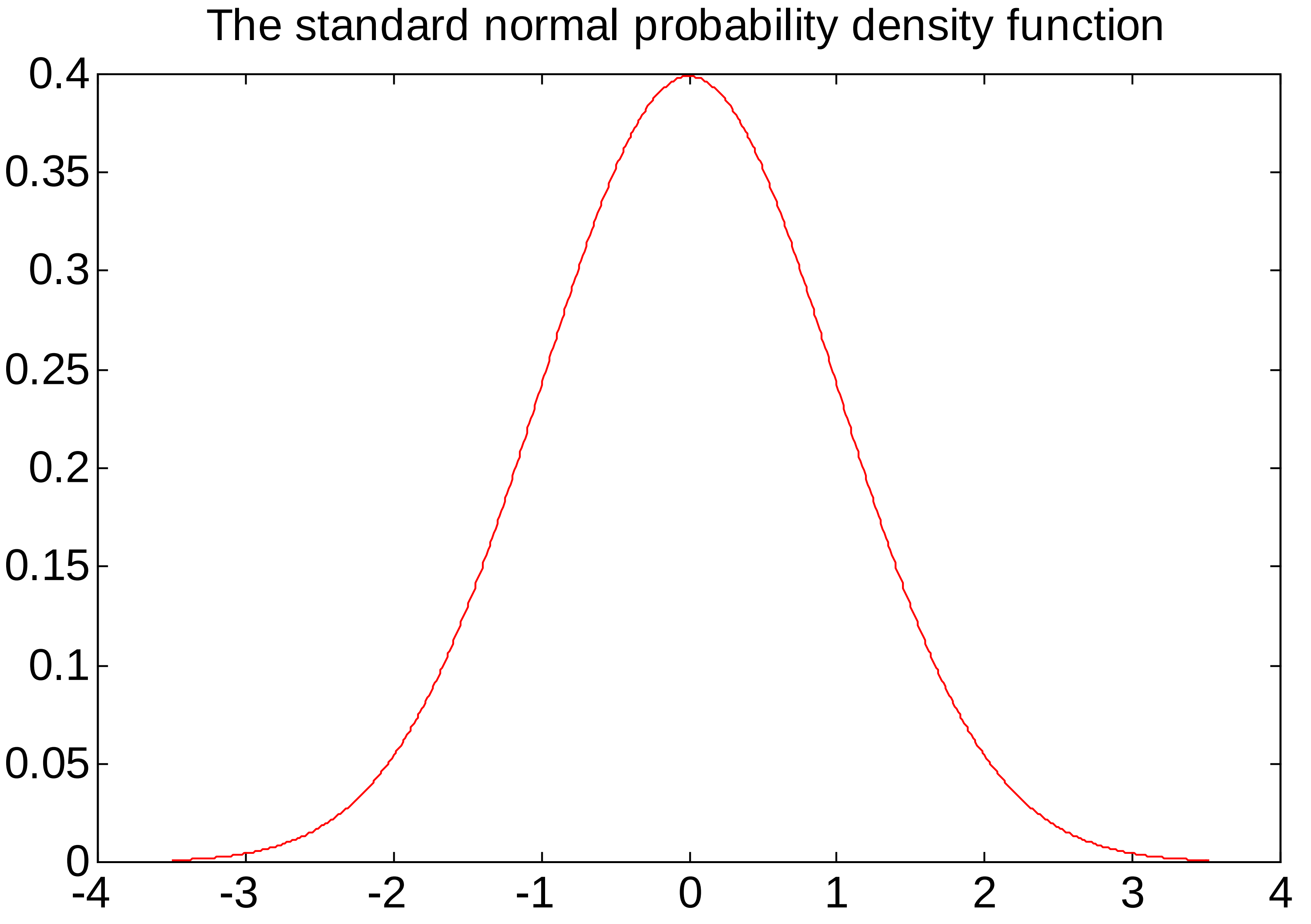
Κανονική κατανομή

- Μια τ.μ. X έχει **κανονική (normal)** π.π. όταν:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

  όπου μ, σ σταθερές (σ > 0). Η f(x) είναι συμμετρική ως προς x = μ, δηλ. f(x – μ) = f(x + μ).

- Συνήθως λέμε ότι η X είναι κανονική τ.μ. ή X~N(μ,σ). Αν X~N(0,1), η X λέγεται **τυπική κανονική** (standard normal) τ.μ.


The standard normal probability density function
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Κανονική κατανομή (2)

- Η κανονική σ.κ. δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} dt$$

  το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.
- Η τυπική κανονική σ.κ. (συνήθως συμβολίζεται με Φ(x)) βρίσκεται σε στατιστικούς πίνακες ή υπολογίζεται αριθμητικά:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

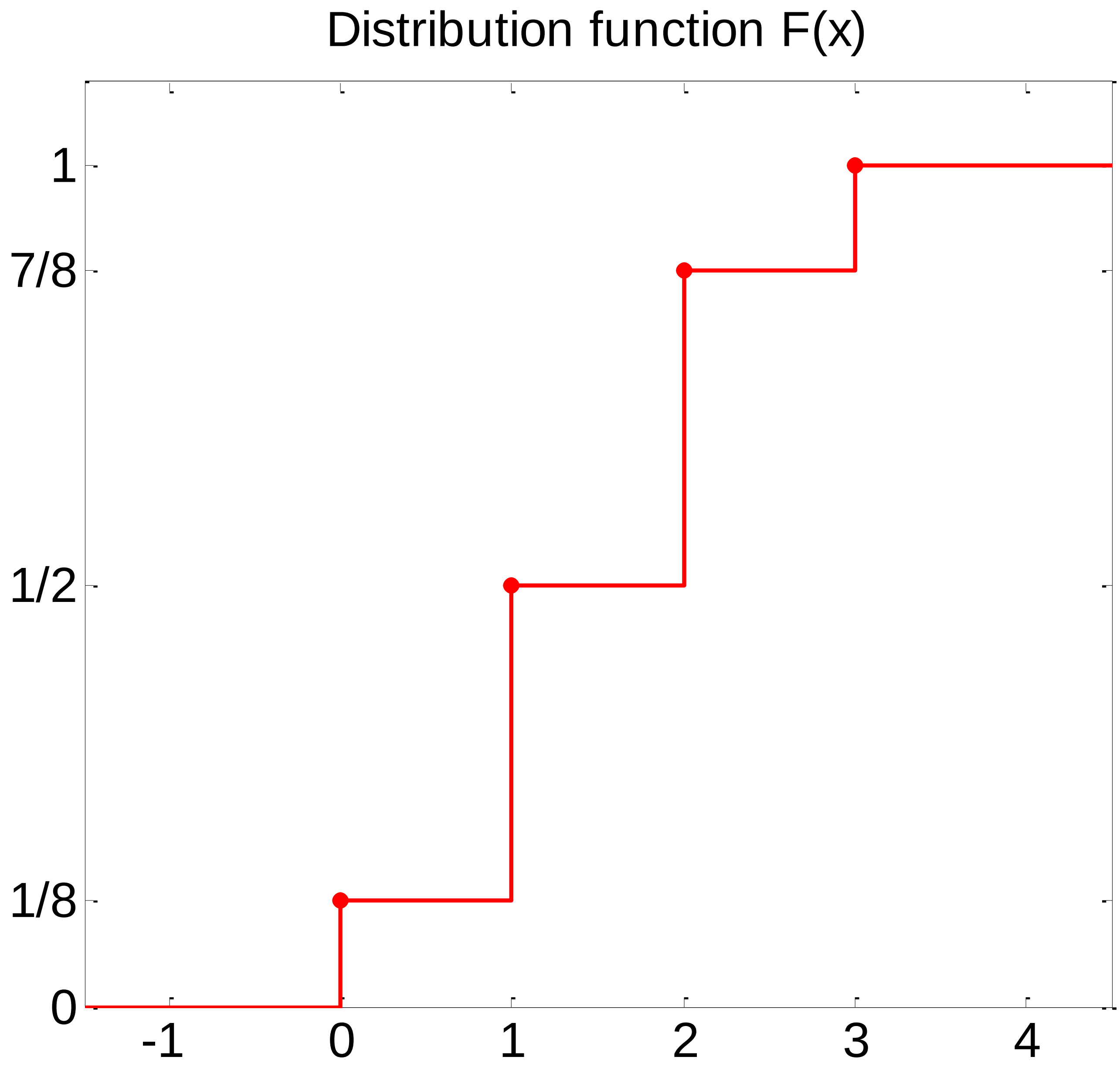
- Η Φ(x) έχει τη χρήσιμη ιδιότητα Φ(–x) = 1 – Φ(x).

Πίνακας τιμών της Φ(x)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,1	0,539828	1,1	0,864334	2,1	0,982136
0,2	0,579260	1,2	0,884930	2,2	0,986097
0,3	0,617911	1,3	0,903199	2,3	0,989276
0,4	0,655422	1,4	0,919243	2,4	0,991802
0,5	0,691462	1,5	0,933193	2,5	0,993790
0,6	0,725747	1,6	0,945201	2,6	0,995339
0,7	0,758036	1,7	0,955435	2,7	0,996533
0,8	0,788145	1,8	0,964070	2,8	0,997445
0,9	0,815940	1,9	0,971284	2,9	0,998134
1	0,841345	2	0,977250	3	0,998650

Διακριτές τ.μ.

- ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια τ.μ. λέγεται διακριτή όταν η σ.κ. της είναι κατά τμήματα σταθερή.
- Πιο απλά η σ.κ. μιας διακριτής τ.μ. είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, όπως στην περίπτωση των 3 ρίψεων του νομίσματος που έχουμε δεί.
- Ο αριθμός των ασυνεχειών της σ.κ. μπορεί να πεπερασμένος, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ή άπειρος αριθμήσιμος.
- Μια διακριτή τ.μ. μπορεί να πάρει διακριτές τιμές x_0, x_1, x_2, ... (αριθμήσιμες), που συμπίπτουν με τα σημεία ασυνέχειας της σ.κ.


Distribution function F(x)
1
7/8
1/2
1/8
0
-1
0
1
2
3
4

Συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τ.μ.

- ΟΡΙΣΜΟΣ: Συνάρτηση πιθανότητας (probability mass function, pmf) μιας διακριτής τ.μ. είναι η συνάρτηση:

$$p(x) = P(X = x)$$

- Επομένως η τιμή της p(x) είναι ίση με το άλμα της F(x) (δηλ. το ύψος του «σκαλοπατιού») στα διακριτά σημεία ασυνέχειας x_0, x_1, x_2, ..., και 0 οπουδήποτε αλλού.

Συνάρτηση πιθανότητας (2)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

α) $0 \leq p(x) \leq 1$ για κάθε x

β) $p(x) = 0$ αν το x δεν ανήκει στο πεδίο τιμών της τ.μ. $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$

γ) $\Sigma\, p(x_i) = \Sigma\, P(X = x_i) = 1$ (το άθροισμα λαμβάνεται σε όλη την περιοχή τιμών της X, δηλ. για κάθε x_i)

- Αν μια συνάρτηση έχει τις παραπάνω ιδιότητες, είναι σ.π. κάποιας διακριτής τ.μ.

Συνάρτηση πιθανότητας (3)

- Σχέση σ.π. και σ.κ.:

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_i -) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i -} F(x)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

- Από την παραπάνω σχέση και τον ορισμό της σ.π. φαίνεται ότι από την p(x) μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου που αντιστοιχεί σε ανοικτό ή κλειστό διάστημα του **R**. Π.χ.

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \sum_{\alpha \le x_i \le \beta} p(x_i)$$

Παραδείγματα

- Στο παράδειγμα των 3 ρίψεων του κέρματος η σ.π. της τ.μ. X (αριθμός Κ του αποτελέσματος) είναι:

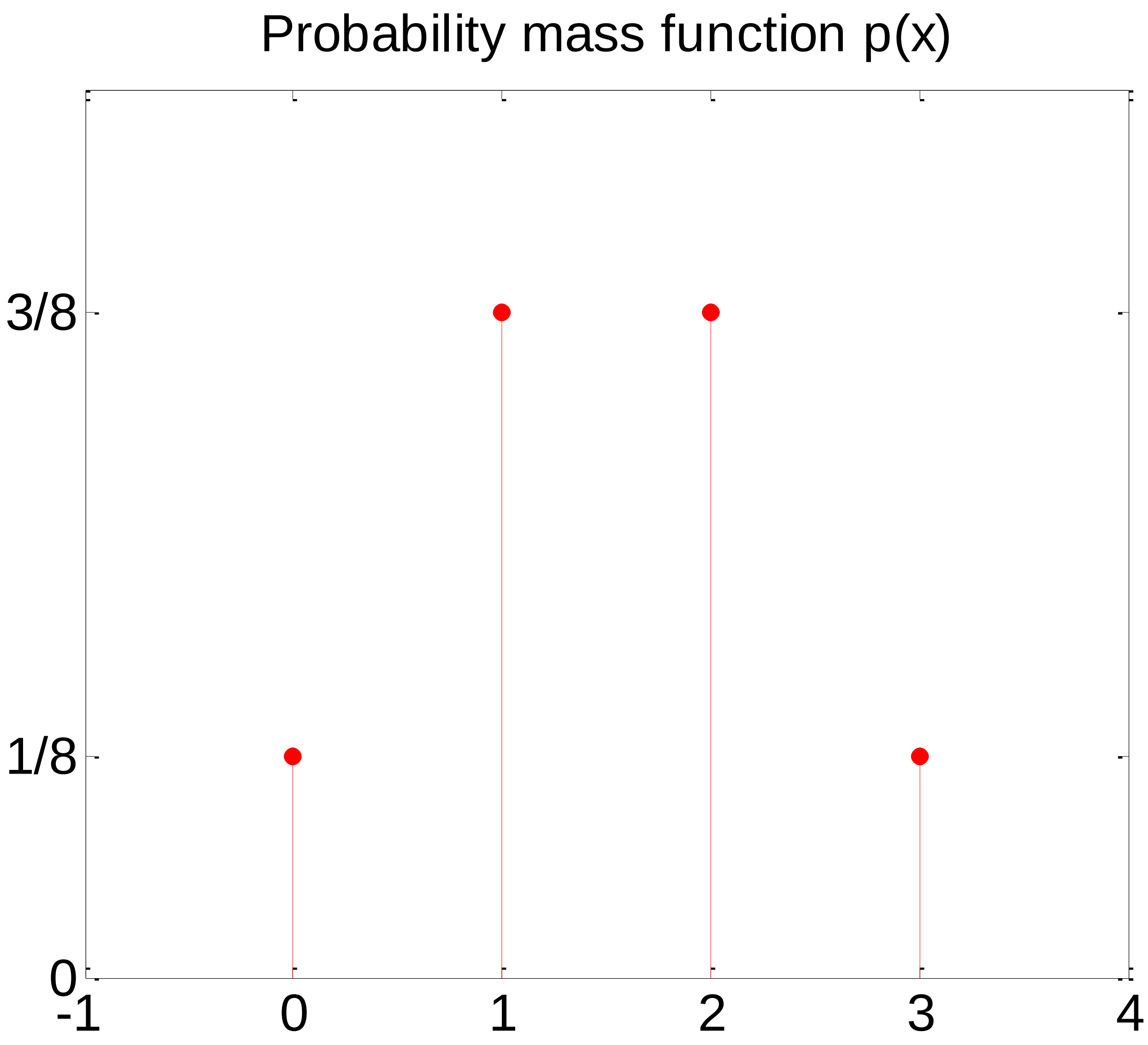
  $p(0) = P(X = 0) = 1/8$

  $p(1) = P(X = 1) = 3/8$

  $p(2) = P(X = 2) = 3/8$

  $p(3) = P(X = 3) = 1/8$

  $p(x) = 0$ για $x \neq 0, 1, 2, 3$.


Probability mass function p(x)
3/8
1/8
0
-1
0
1
2
3
4

Παραδείγματα (2)

- Εχουμε n σταθμούς εργασίας και έστω p η πιθανότητα να είναι κάποιος εκτός λειτουργίας. Εστω X ο αριθμός των σταθμών που δεν δουλεύουν. Η X είναι τ.μ. (λέγεται **διωνυμική**) με πεδίο τιμών 0, 1, ..., n. Η σ.π. της X είναι:

$$p(i) = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad i = 0, 1, ..., n$$

- Η πιθανότητα να μη δουλεύουν από 2 μέχρι 6 από ένα σύνολο 16 σταθμών είναι:

$$\sum_{i=2}^{6} p(i) = \sum_{i=2}^{6} \binom{16}{i} p^i (1-p)^{16-i}$$

Παραδείγματα (3)

- Ρίχνουμε ένα φυσιολογικό νόμισμα μέχρι να έρθει η πρώτη κορώνα. Εστω Χ ο συνολικός αριθμός ρίψεων που θα χρειαστούν. Η Χ είναι τ.μ. με πεδίο τιμών το σύνολο των φυσικών αριθμών (άπειρο αριθμήσιμο). Η σ.π. της Χ είναι:

$$p(i) = P(X = i) = (1/2)^i, \ i = 1, 2, \ldots$$

- Η σ.κ. της Χ (η πιθανότητα να χρειαστούν μέχρι και i ρίψεις) είναι:

$$F(i) = \sum_{j=1}^{i} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^i$$

Παραδείγματα (4)

- Γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος: Εστω p η πιθανότητα κορώνας σε κάθε ρίψη, ανεξάρτητα από τις προηγούμενες. Πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη κορώνα με την i ακριβώς ρίψη:

$$p(i) = P(X = i) = (1 - p)^{i-1} p, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- Συνάρτηση κατανομής:

$$F(i) = P(X \le i) = 1 - (1 - p)^{i}$$

Τυχαίες μεταβλητές ιδιαίτερου ενδιαφέροντος

Μέχρι τώρα έχουμε μάθει να περιγράφουμε:

- Συνεχείς τ.μ. με:
  - τη συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και
  - την πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = dF(x)/dx$
- Διακριτές τ.μ. με:
  - τη συνάρτηση κατανομής $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ και
  - τη συνάρτηση πιθανότητας $p(x_i) = P(X = x_i)$

Διακριτές τ.μ.

- Τ.μ. Bernoulli:
  $p(0) = 1 - p$, $p(1) = p$

- Διωνυμική τ.μ.:
  $$p(k) = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, \ldots, N$$

- Ομοιόμορφη τ.μ.:
  $p(k) = 1 / N$, $\quad k = 0, \ldots, N - 1$

Διακριτές τ.μ. (συνέχεια)

- Γεωμετρική τ.μ.:
  $p(k) = p^{k-1}\,(1 - p)\ , \quad k = 1, 2, \ldots$

- Poisson:
  $$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Συνεχείς τ.μ.

- Ομοιόμορφη τ.μ.:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

- Εκθετική τ.μ.:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Κανονική κατανομή

- Μια τ.μ. X έχει κανονική (normal ή Gaussian) π.π. όταν:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

  όπου μ, σ σταθερές (σ > 0). Η f(x) είναι συμμετρική ως προς x = μ, δηλ. f(x – μ) = f(x + μ).
- Για μ = 0 και σ = 1, η X λέγεται τυπική κανονική (standard normal) τ.μ.

Κανονική κατανομή – υπολογισμός πιθανότητας

- Αν X~N(0,1), υπολογίζουμε πιθανότητες της μορφής $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ βρίσκοντας τα $\Phi(\alpha)$, $\Phi(\beta)$ από πίνακες.
- Αν X~N(μ,σ), αντικαθιστώντας $z = (t - \mu) / \sigma$ παίρνουμε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

οπότε $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Παραδείγματα

- Αν $X \sim N(0,1)$:

$P(X < 0) = \Phi(0) = 0.5$

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

$P(1 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

$P(X > -0.5) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915$

$P(-1/2 < X < 1/3) = \Phi(1/3) - \Phi(-1/2)$

$= \Phi(1/3) - 1 + \Phi(1/2) = 0.6306 - 1 + 0.6915 = 0.3221$

Παραδείγματα

- Αν $X \sim N(60,3)$:

  $P(X < 60) = \Phi(0) = 0.5$

  $P(X > 57) = 1 - P(X \leq 57) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$

  $P(57 < X < 64) = \Phi(4/3) - \Phi(-1) = \Phi(4/3) - 1 + \Phi(1) =$

  $0.9088 - 1 + 0.8413 = 0.7501$