Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πιθανότητες και Στατιστική

Συνδυαστική ανάλυση

Ελισάβετ Κωνσταντίνου

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συνδυαστική ανάλυση

Η συνδυαστική ανάλυση (combinatorial analysis) περιλαμβάνει τεχνικές απαρίθμησης. Εφαρμόζεται:

- στην απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου
- στην απαρίθμηση των υποσυνόλων που μπορούμε να δημιουργήσουμε από ένα σύνολο (ή δειγμάτων από ένα πληθυσμό).

- Πόσες διαφορετικές πενταμελείς επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν από ένα τμήμα 100 φοιτητών;
- Πόσες διαφορετικές πεντάδες χαρτιών από μία τράπουλα περιλαμβάνουν δύο ρηγάδες και δύο ντάμες;

Ορισμοί

- Υποθέτουμε ότι το σύνολο ***S***, από το οποίο γίνεται η επιλογή, έχει n διακριτά στοιχεία $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.
  Το δείγμα μας έχει k στοιχεία ($k \leq n$).
  - <u>Μετάθεση</u> (permutation) k από n (n ανά k) είναι ένα διατεταγμένο σύνολο k στοιχείων του ***S***.
  - <u>Συνδυασμός</u> (combination) είναι ένα μη διατεταγμένο σύνολο k στοιχείων του ***S***.
- Η επιλογή μπορεί να γίνει με επανατοποθέτηση (replacement) ή χωρίς. Στην πρώτη περίπτωση επιτρέπεται ένα στοιχείο να εμφανίζεται πολλαπλές φορές στο δείγμα (διατεταγμένο ή μη).

Παράδειγμα

Για ***S*** = {x, y, z} και k = 2 υπάρχουν:

– 3 συνδυασμοί χωρίς επανατοποθέτηση:
xy, xz, yz

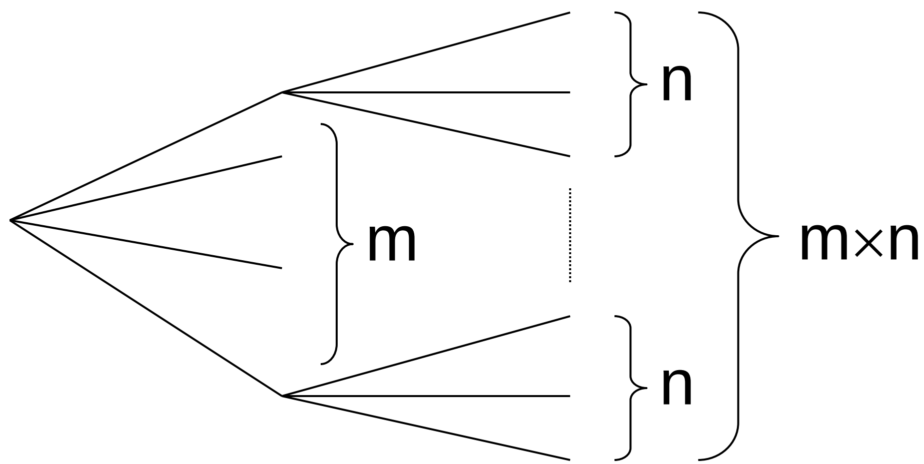
– 6 συνδυασμοί με επανατοποθέτηση:
xx, xy, xz, yy, yz, zz

– 6 μεταθέσεις χωρίς επανατοποθέτηση:
xy, xz, yx, yz, zx, zy

– 9 μεταθέσεις με επανατοποθέτηση:
xx, xy, xz, yx, yy, yz, zx, zy, zz

Πολλαπλασιαστική αρχή

- ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν μια ενέργεια Α μπορεί να εκτελεστεί με m διαφορετικούς τρόπους και ακολούθως μια ενέργεια Β μπορεί να εκτελεστεί με n διαφορετικούς τρόπους, τότε η διαδοχή ενεργειών (Α, Β) μπορεί να εκτελεστεί με $m \times n$ διαφορετικούς τρόπους.



Πολλαπλασιαστική αρχή

- Γενίκευση: Αν k ενέργειες A_1, A_2, …, A_k μπορούν να εκτελεστούν με n_1, n_2, …, n_k διαφορετικούς τρόπους αντίστοιχα, τότε η διαδοχή ενεργειών (A_1, A_2, …, A_k) μπορεί να εκτελεστεί με $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ τρόπους.
- Αν ένα πείραμα έχει k στάδια με n_1, …, n_k αποτελέσματα αντίστοιχα, ο δειγματικός χώρος έχει $n_1 \times \ldots \times n_k$ σημεία.

Παράδειγμα

Αν κάποιος για να πάρει ένα πιστοποιητικό πρέπει να περάσει από ένα γραμματέα, έναν ελεγκτή, ένα ταμία, ένα προϊστάμενο και πάλι από ένα γραμματέα και υπάρχουν 8 γραμματείς, 5 ελεγκτές, 3 ταμίες και 2 προϊστάμενοι, ο αριθμός των πιθανών διαδρομών είναι:

$$8 \times 5 \times 3 \times 2 \times 8 = 1920$$

Μεταθέσεις (permutations)

- ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο αριθμός των μεταθέσεων k στοιχείων από n χωρίς επανατοποθέτηση είναι:

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Ο αριθμός των μεταθέσεων με επανατοποθέτηση είναι n^k.
- Ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων (orderings) n στοιχείων είναι P(n, n) = n! (οι όροι χρησιμοποιούνται συχνά αντίστροφα στα Ελληνικά).

Παράδειγμα

Σε ένα τελικό τρέχουν 8 αθλητές Α, Β, ..., Θ.

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν να μοιραστούν τα μετάλλια;
- Πόσοι τρόποι υπάρχουν να μοιραστούν τις 8 θέσεις (πρώτη έως τελευταία);
- Αν οι αθλητές είναι ισοδύναμοι, υπολογίστε την πιθανότητα ο Α να είναι πρώτος, ο Β δεύτερος και ο Γ τρίτος.

Συνδυασμοί (combinations)

- ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο αριθμός των συνδυασμών k στοιχείων από n χωρίς επανατοποθέτηση είναι:

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Ο αριθμός των συνδυασμών k στοιχείων από n με επανατοποθέτηση είναι C(n+k–1, k).

Ειδικές περιπτώσεις

$C(n,n) = 1$ τρόπος να διαλέξουμε n από n

$C(n,1) = n$ τρόποι να διαλέξουμε 1 από n

$C(n,n-1) = n$ τρόποι να διαλέξουμε $n-1$ από n

$C(n,2) = n(n-1)/2$ τρόποι να διαλέξουμε 2 από n

Γενικά $C(n,k) = C(n,n-k)$

Συνδυασμοί (παραδείγματα)

- Στο παράδειγμα των αθλητών, αν μας ενδιαφέρουν οι 3 πρώτοι ανεξαρτήτως σειράς, ο αριθμός συνδυασμών είναι

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$$

Συνδυασμοί (παραδείγματα)

- Μια παρτίδα έχει 500 chips, από τα οποία 9 είναι καμένα. Διαλέγουμε 3 στην τύχη χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα να διαλέξουμε 3 καμένα;

  Ο αριθμός πιθανών δειγμάτων είναι $C(500,3) = 20708500$

  Ο αριθμός δειγμάτων που περιέχουν 3 καμένα chips είναι $C(9,3) = 84$.

  Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $84/20708500 = 4\times10^{-6}$.

Παραδείγματα

- Τραβάμε 5 φύλλα από μια τράπουλα. Ποια η πιθανότητα να μας έρθουν ακριβώς 2 ντάμες και 2 ρηγάδες;

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε ένα password των 8 χαρακτήρων χρησιμοποιώντας τα 26 γράμματα του αλφαβήτου;

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 5 γλυκά από ένα ζαχαροπλαστείο που έχει 10 είδη;

Συνδυασμένα πειράματα

- Εχουμε δύο πειράματα που αντιστοιχούν σε δύο δειγματικούς χώρους $\boldsymbol{S}_1$ και $\boldsymbol{S}_2$. Μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως ένα συνδυασμένο πείραμα με δ.χ. το καρτεσιανό γινόμενο των $\boldsymbol{S}_1$ και $\boldsymbol{S}_2$: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2$.
- Τα ενδεχόμενα του συνδυασμένου πειράματος είναι της μορφής $A \times B$, όπου $A \subset \boldsymbol{S}_1$ και $B \subset \boldsymbol{S}_2$.

Συνδυασμένα πειράματα

- Π.χ. αν $\boldsymbol{S}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\boldsymbol{S}_2 = \{Κ, Γ\}$, τότε $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2 = \{(1,Κ), (1,Γ), (2,Κ), (2,Γ), (3,Κ), (3,Γ), (4,Κ), (4,Γ), (5,Κ), (5,Γ), (6,Κ), (6,Γ)\}$
- Αν τα δύο πειράματα έχουν n_1 και n_2 αποτελέσματα, το συνδυασμένο πείραμα έχει $n_1 n_2$ αποτελέσματα.
- Τα παραπάνω γενικεύονται για συνδυασμό k πειραμάτων.

Ανεξάρτητα πειράματα

- Δύο πειράματα λέγονται ανεξάρτητα αν $\forall$ A $\subset$ $\boldsymbol{S}_1$, B $\subset$ $\boldsymbol{S}_2$: P(A $\times$ B) = P(A) P(B), δηλ. όλα τα ενδεχόμενα του $\boldsymbol{S}_1$ είναι ανεξάρτητα με όλα τα ενδεχόμενα του $\boldsymbol{S}_2$.
- Παράδειγμα: Ενα κουτί Κ1 έχει 8 κόκκινες και 2 μαύρες κάρτες και ένα κουτί Κ2 έχει 6 κόκκινες και 6 μαύρες. Τραβάμε μία κάρτα από κάθε κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε 2 μαύρες;

  P(μαύρη από το Κ1 και μαύρη από το Κ2)
  = P(μαύρη από το Κ1) $\times$ P(μαύρη από το Κ2)
  = 0.2 $\times$ 0.5 = 0.1

Πειράματα Bernoulli

- ΘΕΩΡΗΜΑ: Εχουμε ένα πείραμα σε ένα δειγματικό χώρο ***S*** και ένα ενδεχόμενο A με $P(A) = p$, $P(A') = q = 1-p$.

  Εκτελούμε n ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος (οπότε ο δ.χ. είναι $\boldsymbol{S}^n = \boldsymbol{S} \times \ldots \times \boldsymbol{S}$).

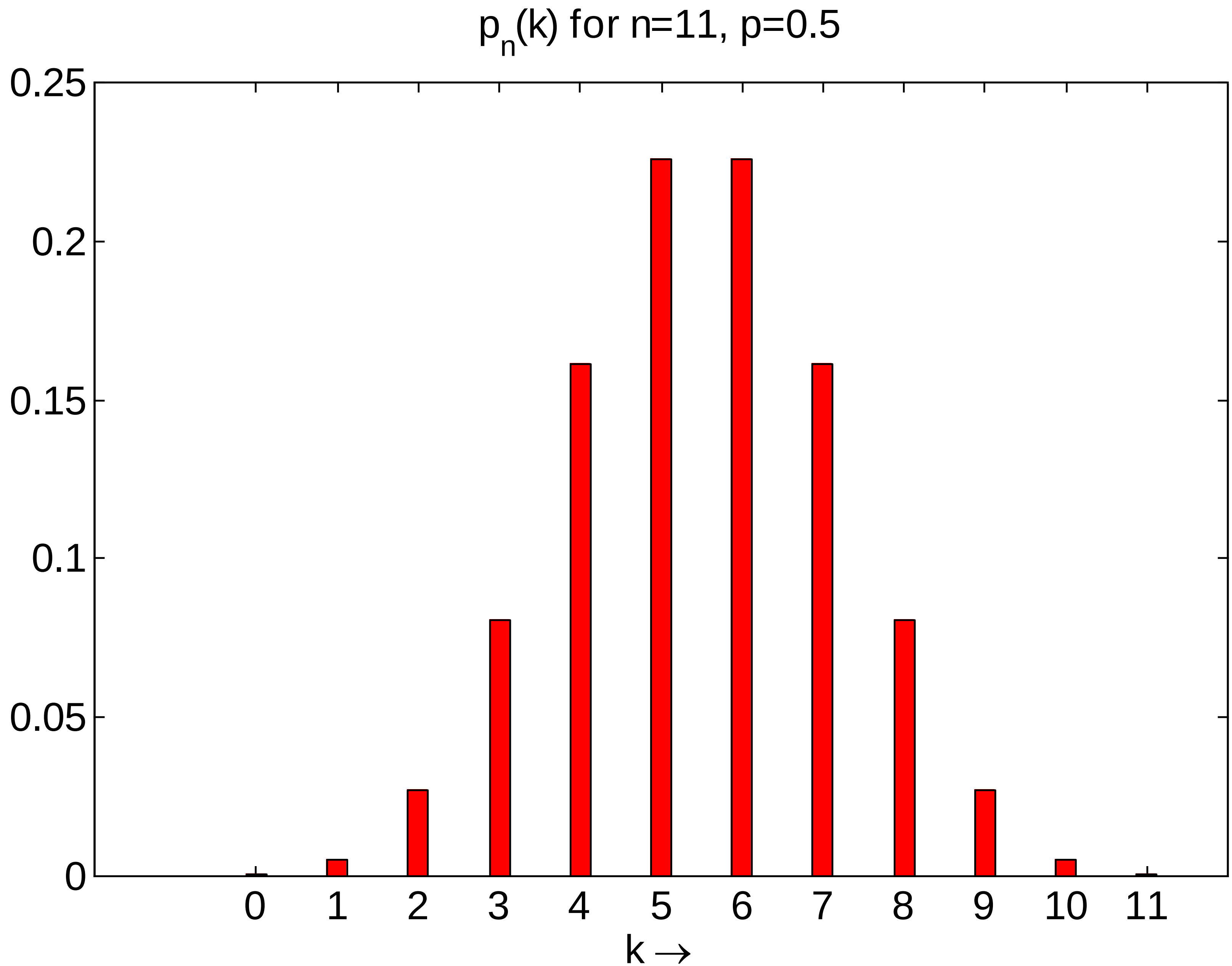
  Η πιθανότητα να συμβεί το A *ακριβώς* τις k φορές στις n (και το A΄ k–n), με οποιαδήποτε σειρά, είναι:

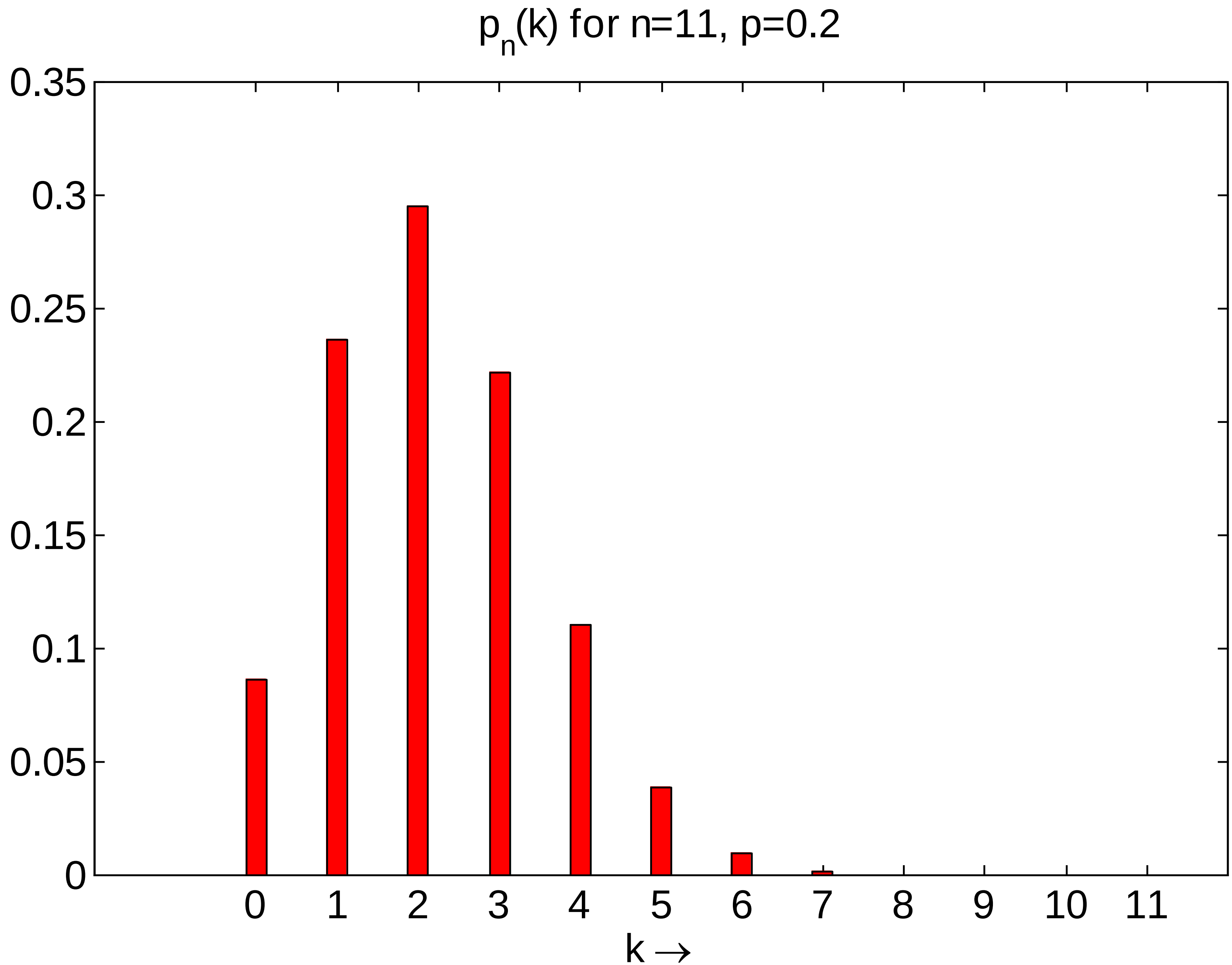
  $$p_n(k) = C(n,k)\, p^k\, q^{n-k}$$

- Απόδειξη: Υπάρχουν C(n,k) τρόποι να συμβεί το A k φορές στις n (δηλ. C(n,k) τρόποι να επιλεγούν k από τις n επαναλήψεις). Καθένας από αυτούς έχει πιθανότητα να συμβεί $p^k\, q^{n-k}$.

Πειράματα Bernoulli

- Η $p_n(k)$ ως συνάρτηση του k:
  - είναι συμμετρική όταν $p = 0.5$
  - έχει μέγιστο για $k = [(n+1)p]$
  - αν το $(n+1)p$ είναι ακέραιος, έχει δύο συνεχόμενα μέγιστα για $k = (n+1)p$ και $k = (n+1)p – 1 = np – q$


$p_n(k)$ for n=11, p=0.5
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
k →


$p_n(k)$ for n=11, p=0.2
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
k →

Πειράματα Bernoulli – παραδείγματα

- Η πιθανότητα να φέρουμε ακριβώς 2 εξάρια ρίχνοντας ένα ζάρι 5 φορές είναι:

$$p_5(2) = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

- Η πιθανότητα να φέρουμε ακριβώς 5 κορώνες στις 10 ρίψεις ενός νομίσματος είναι:

Πειράματα Bernoulli – παραδείγματα

- Παράδειγμα: Ενα μηχάνημα λειτουργεί το 90% του χρόνου (λόγω βλαβών κλπ). Αν έχουμε 150 ολόιδια μηχανήματα και οι βλάβες του καθενός είναι ανεξάρτητες από τις βλάβες των άλλων, η πιθανότητα να λειτουργούν κάποια στιγμή τα 130 από τα 150 είναι:

$$p_{150}(130) = \frac{150!}{130!\,20!}(0.9)^{130}(0.1)^{20} \approx 0.04$$

- Η πιθανότητα να λειτουργούν τουλάχιστο τα 130 είναι:

$$\sum_{k=130}^{150} p_{150}(k) = \sum_{k=130}^{150} \frac{150!}{k!(150-k)!}(0.9)^{k}(0.1)^{150-k} \approx 0.93$$