ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σημειώσεις Παραδόσεων

Κωνσταντίνου Ελισάβετ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σπύρος Κωτσάκης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Σημειώσεις Παραδόσεων

Σάμος 2010

Πρόλογος

Οι παρούσες χειρόγραφες σημειώσεις αντιστοιχούν στις παραδόσεις του μαθήματος `Εφαρμοσμένα Μαθηματικά' το οποίο διδάσκω στο Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Τα προαπαιτούμενα για την κατανόηση αυτών των σημειώσεων είναι η γνώση των βασικών στοιχείων της εισαγωγικής ανάλυσης, δηλ., η θεωρία των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Επίσης, μια εισαγωγική γνώση γενικής φυσικής χρησιμοποιώντας αυτές ακριβώς τις ``μονοδιάστατες'' μεθόδους, δεν είναι ίσως απαραίτητη για την κατανόηση αυτών των σημειώσεων, αλλά θα ήταν πολύ χρήσιμη ιδιαίτερα για τις παραγράφους των εφαρμογών στα μηχανικά συστήματα.

Σε αυτές τις σημειώσεις αναπτύσσουμε *διανυσματικές* μεθόδους εφαρμοσμένων μαθηματικών και παρουσιάζουμε διάφορες `εφαρμογές' αυτών στα μηχανικά συστήματα (ή στην κλασική και αναλυτική μηχανική, όπως παραδοσιακά ονομάζεται αυτός ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών). Στην ανάπτυξη των διανυσματικών μεθόδων ξεκινούμε από την διανυσματική άλγεβρα και γεωμετρία, και συνεχίζουμε με την διανυσματική ανάλυση (διανυσματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής), τα βαθμωτά πεδία (``συναρτήσεις πολλών μεταβλητών''), και ολοκληρώνουμε την διανυσματική προσέγγιση με την θεωρία των διανυσματικών πεδίων.

Εν τούτοις, οι έννοιες των μηχανικών συστημάτων τις οποίες εισάγουμε και μελετούμε δεν αποτελούν μόνο απλές εφαρμογές του καθαρά μαθηματικού μέρους της θεωρίας, αλλά είναι κεντρικό σημείο αναφοράς γύρω από το οποίο περιστρέφεται όλη η ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού. Αυτή είναι ίσως η πιο χρήσιμη εικόνα που μπορεί να σχηματίσει κάποιος κοιτώντας αυτές τις μεθόδους από τον τρόπο που χρησιμοποιούνται στο ερευνητικό επίπεδο.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο I

Γενική εισαγωγή

Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά μαζί με την θεωρητική φυσική αποτελούν τις δύο όψεις της επιστημονικής εικόνας που έχουμε για ό,τι ονομάζουμε πραγματικότητα, και σήμερα αυτές είναι τόσο άρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους όσο ποτέ άλλοτε στο παρελθόν. Οι τεχνικές και οι ιδέες που προκύπτουν και αναδύονται από αυτή την συνένωση χρησιμοποιούνται με τεράστια επιτυχία σε διάφορους άλλους τομείς της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας, δεν θα ήταν ίσως υπερβολή να πούμε ότι η σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία δεν θα μπορούσαν να αναπτυχθούν με έναν χρήσιμο τρόπο χωρίς να κάνουν αναγκαστική χρήση των εν λόγω εργαλείων.

Μπορούμε να συνοψίσουμε αυτό το σύνολο γνώσης και επιστημονικών μεθόδων και θεωρητικών κατασκευών με τον όρο **μαθηματική φυσική**:

$$\text{μαθηματική φυσική} = \text{εφαρμοσμένα μαθηματικά} + \text{θεωρητική φυσική}.$$

Ο κεντρικός στόχος της μαθηματικής φυσικής περιγράφεται πολύ καλά από την ακόλουθη διατύπωση του Αϊνστάιν: *Ο σκοπός της μαθηματικής φυσικής είναι η πλήρης περιγραφή και ανάλυση της φυσικής πραγματικότητας ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίον την παρατηρούμε.*

Σε μια πρώτη ματιά μπορεί κάποιος να μείνει με την εντύπωση ότι ο Αϊνστάιν εννοεί μόνο την κλασική φυσική, καθώς όπως είναι γνωστό στην περιγραφή των κβαντικών φαινομένων η παρατήρηση του συστήματος επηρεάζει και αλλοιώνει την εν γένει συμπεριφορά του. Εν τούτοις, ο Αϊνστάιν θεωρούσε ότι η περιγραφή της κβαντικής πλευράς της πραγματικότητας μέσω της θεωρίας πιθανοτήτων αποτελεί μια μεταβατική και μόνο κατάσταση για την επιστήμη της μαθηματικής φυσικής, και έτσι το γενικό πρόβλημα της πλήρους μαθηματικής ανάλυσης της φυσικής πραγματικότητας παραμένει σήμερα ανοικτό.

Πολλά φωτεινά πνεύματα, μαθηματικοί και επιστήμονες, ασχολήθηκαν και συνέβαλαν στην ανάπτυξη των εφαρμοσμένων μαθηματικών με τον τρόπο που τα διαπραγματευόμαστε εδώ: Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), Γαλιλαίος (1564-1642), Κέπλερ (1571-1630), Νεύτων (1642-1727), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1783), Hamilton (1805-1865), Jacobi (1804-1851), Riemann (1826-1866), Poincaré (1854-1912), Einstein (1879-1955). Από τους σύγχρονους εφαρμοσμένους μαθηματικούς και θεωρητικούς φυσικούς μπορούμε να αναφέρουμε τους Synge (1897-1995), Landau (1908-1968), Choquet-Bruhat (1923-), Arnold (1930-2010), Hawking (1942-), Χριστοδούλου (1951-). Όλοι αυτοί και πολλοί άλλοι έθεσαν τις βάσεις της μιας ή της άλλης θεωρίας της μαθηματικής φυσικής, και εισήγαγαν ιδιαίτερα καινοτόμες ιδέες για την φύση των τριών θεμελιωδών χαρακτηριστικών του σύμπαντος: του χώρου, του χρόνου, και της ύλης.

Το κεντρικό πρόβλημα των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι η διατύπωση, και η τελική ανάλυση των συνεπειών, θεωριών που περιγράφουν με έναν ενοποιημένο τρόπο τα τρία παραπάνω θεμελιώδη χαρακτηριστικά. Οι διάφορες περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών (μαθηματική φυσική) ταξινομούνται αναλόγως του κριτηρίου το οποίο χρησιμοποιούμε. Κάποια τέτοια κριτήρια είναι τα εξής:

- Ο βαθμός αμοιβαίας αλληλεπίδρασης του χώρου με τον χρόνο και την ύλη: Από την νευτώνεια δυναμική (απόλυτος χώρος, απόλυτος χρόνος, καμία αλληλεπίδραση χώρου χρόνου, ύλης μεταξύ τους), στην ειδική σχετικότητα (ενοποίηση χώρου και χρόνου με την έννοια του χωροχρόνου, η ύλη παραμένει μερικώς ανεξάρτητη του χωροχρόνου), στην γενική σχετικότητα (αλληλεπίδραση χωροχρόνου και ύλης), σε σύγχρονες θεωρίες ενοποίησης.

- Η κλίμακα που χρησιμοποιούμε: Κλασική θεωρία - μακρόκοσμος, κοσμικές κλίμακες, κβαντική θεωρία - μικρόκοσμος.

Είναι σκόπιμο να αναφερθούμε εδώ εν συντομία στα διάφορα στάδια της μαθηματικής μοντελοποίησης, δηλ., της διαδικασίας εκείνης που χρησιμοποιούμε στα εφαρμοσμένα μαθηματικά για να κατασκευάσουμε ένα αντίγραφο μιας πτυχής της πραγματικότητας.

Στο πρώτο στάδιο (καθαρά μαθηματικά) περικλείονται όλες οι καθαρά μαθηματικές θεωρίες, π.χ., η ευκλείδεια γεωμετρία, ο απειροστικός λογισμός, η ριμάνεια γεωμετρία, κλπ. Ο μαθηματικός ανακαλύπτει κάποια τέτοια δομή και την αναπτύσσει χωρίς κάποια απαραίτητα εξωτερική αιτία, μόνο για λόγους 'εσωτερικής' ομορφιάς της εν λόγω θεωρίας. (Βέβαια, πολλές φορές στο παρελθόν, αλλά και σήμερα, η θεωρητική φυσική έχει παίξει καθοριστικό ρόλο σε αυτήν την ανάπτυξη.)

Στο δεύτερο στάδιο (θεωρητική φυσική) ο φυσικός 'παίρνει' από τον μαθηματικό την εν λόγω δομή την οποία ο μαθηματικός έχει ήδη αναπτύξει (π.χ., τον απειροστικό λογισμό) και διατυπώνει έναν φυσικό νόμο, π.χ., τον νόμο της παγκόσμιας έλξης. Η διατύπωση του φυσικού νόμου έχει την μορφή διαφορικής εξίσωσης.

Ο φυσικός έχει λοιπόν πάρει κάτι από τον μαθηματικό, και τώρα πρέπει να δώσει κάτι πίσω σε αυτόν. Στο τρίτο στάδιο (διαφορικές εξισώσεις) της διαδικασίας που περιγράφουμε, ο φυσικός δίνει στον μαθηματικό την διαφορική εξίσωση που έχει ανακαλύψει, και ο μαθηματικός την μελετά.

Τα συμπεράσματα του μαθηματικού από το τρίτο στάδιο συνίστανται στις ιδιότητες των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης. Στο τέταρτο στάδιο (πειραματική φυσική) ο φυσικός παίρνει αυτές τις λύσεις που ανακάλυψε ο μαθηματικός στο προηγούμενο στάδιο της μαθηματικής μοντελοποίησης και τις συγκρίνει με τα πειραματικά ή παρατηρησιακά δεδομένα που έχει συλλέξει. Αν υπάρχει σύμφωνία των ιδιοτήτων των λύσεων με αυτά, τότε η θεωρία του φυσικού στο δεύτερο στάδιο επαληθεύεται, ενώ η μαθηματική θεωρία του πρώτου σταδίου αποκτά μεγάλη σημασία και ενδιαφέρον, πέραν του καθαρά μαθηματικού της ενδιαφέροντος. Επίσης αποδεικνύεται η χρησιμότητα και η αξία του τρίτου σταδίου της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Σε κάθε περίπτωση, κλείνει ο κύκλος των τεσσάρων σταδίων της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η πρόοδος που επιτελείται κάθε στιγμή στην επιστήμη μπορεί να σταθμιστεί ανιχνεύοντας την αντίστοιχη πρόοδο σε κάθε ένα από τα τέσσερα παραπάνω βήματα που συναντάμε στα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Ευκλείδειοι

Χώροι

1

Διανύσματα

Ο n-διάστατος χώρος: Αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις αλγεβρικές ιδιότητες του n-διάστατου χώρου $\mathbb{V}^n$ και των στοιχείων του - n-διάστατα διανύσματα - και εφαρμόζουμε αυτά στην μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^3$.
Αυτά επεκτείνονται στην περίπτωση του n-διάστατου Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$.

Διανύσματα

Ορισμός

Ο n-διάστατος γραμμικός (ή διανυσματικός) χώρος $\mathbb{V}_n$ είναι το σύνολο των n-άδων πραγματικών αριθμών, συμβολισμός: $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, τα οποία ονομάζονται διανύσματα, όπου η σχέση ισότητας και οι πράξεις πρόσθεσης και πολ/σμού με έναν πραγματικό αριθμό ορίζονται ως εξής:

Ισότητα διανυσμάτων: Αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ είναι δύο διανύσματα του $\mathbb{V}_n$, τότε

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \quad \text{αν} \quad x_i = y_i \quad \text{γιά κάθε } i=1,\ldots,n. \tag{1}$$

Πρόσθεση διανυσμάτων: Αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ τότε

$$\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \tag{2}$$

Πολ/σμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό:
Αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $r \in \mathbb{R}$ τότε

$$r\underset{\sim}{x} = (rx_1, \ldots, rx_n). \tag{3}$$

Λόγω των ορισμών αυτών, οι αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών "περνούν" στον $\mathbb{V}_n$ και έχουμε:

Θεώρημα

Π1. Κλειστότητα πρόσθεσης : $\forall\, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{V}_n$, $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} \in \mathbb{V}_n$.

Π2. Αντιμεταθετική : $\forall\, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{V}_n$, $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{x}$.

Π3 Προσεταιριστική : $\forall\, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z} \in \mathbb{V}_n$, $(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}) + \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} + (\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{z})$.

Π4. Ουδέτερο : $\exists!$ διάνυσμα του $\mathbb{V}_n$, το $\underset{\sim}{0}$, - το μηδενικό διάνυσμα έτσι: $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{V}_n$. $(\underset{\sim}{0} = (0, 0, \ldots, 0))$.

Π5. Συμμετρικό : Σε κάθε $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{V}_n$ αντιστοιχεί το μοναδικό διάνυσμα που συμβολίζουμε με $-\underset{\sim}{x}$ έτσι:

$$\underset{\sim}{x} + (-\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0} \quad . \quad (-\underset{\sim}{x} = (-1)\,\underset{\sim}{x}).$$

Πολ1. Κλειστότητα πολ/σμού : $\forall\, \underset{\sim}{x} \in \mathbb{V}_n$ και $r \in \mathbb{R}$, $r\underset{\sim}{x} \in \mathbb{V}_n$

Πολ2. Επιμεριστική 1 : $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ και $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{V}_n$, $(r+s)\underset{\sim}{x} = r\underset{\sim}{x} + s\underset{\sim}{x}$.

Πολ3. Επιμεριστική 2 : $\forall\, r \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \mathbb{V}_n$, $r(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}) = r\underset{\sim}{x} + r\underset{\sim}{y}$.

Πολ4. Προσεταιριστική : $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{V}_n$, $r(s\underset{\sim}{x}) = (rs)\,\underset{\sim}{x}$.

Πολ5. Ουδέτερο : $\forall\, x \in \mathbb{V}_n$, $1 \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}$.

Απόδειξη : Άσκηση. Μέσω των αλγεβρικών ιδιοτήτων του $\mathbb{R}$. $\boxtimes$

Ορισμός (αφαίρεση)

Γιά όλα τα $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{V}_n$, ορίζουμε την διαφορά τους,

$$\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + (-\underset{\sim}{y}), \qquad (4)$$

δηλ., $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$.

Συμβολισμοί: Άλλοι συμβολισμοί γιά ένα διάνυσμα είναι $\vec{x}$, $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\mathbf{x}$. Εμείς χρησιμοποιούμε τον: $\underset{\sim}{x}$.

Γεωμετρική αναπαράσταση

Ποιά είναι η γεωμετρική αναπαράσταση των διανυσμάτων;

Στην περίπτωση του $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$, αναπαριστούμε ένα διάνυσμα με ένα βέλος όπως θα δούμε αμέσως. Αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση βοηθά στην ανάλυση, η οποία με την σειρά της βοηθά την γεωμετρία. Όταν έχουμε έναν $\mathbb{V}_n$, $n>3$, τότε η γλώσσα που χρησιμοποιούμε γιά την ανάλυση των διανυσμάτων σε αυτόν τον χώρο απορρέει από αυτήν την γεωμετρική αναπαράσταση.

Ένα "καρτεσιανό (ή ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων" (ή σύστημα αναφοράς) αποτελείται από τα εξής (είμαστε στον $\mathbb{V}_3$):

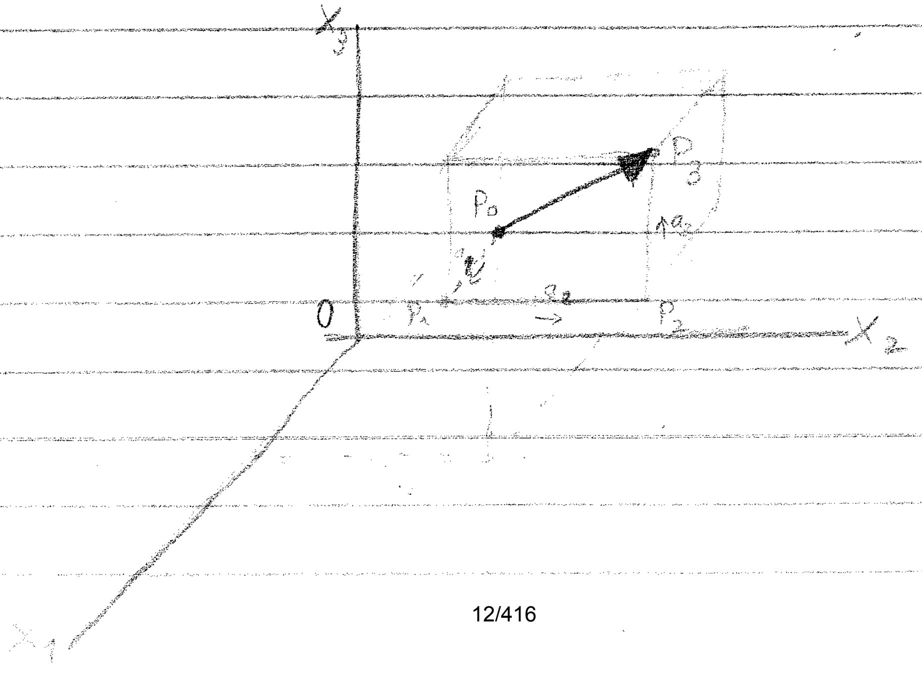
(1) Ένα σημείο O

(2) Τρείς κάθετες μεταξύ τους ευθείες που διέρχονται από το $\underset{\sim}{O}$, X_1, X_2, X_3.

(3) Τις θετικές κατευθύνσεις πάνω σε αυτές τις ευθείες

(4) Μία μονάδα μέτρησης απόστασης.

Έστω τώρα το διάνυσμα $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$ του $\mathbb{V}_3$. Κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα το οποίο αναπαριστά το $\underset{\sim}{a}$ ως εξής:



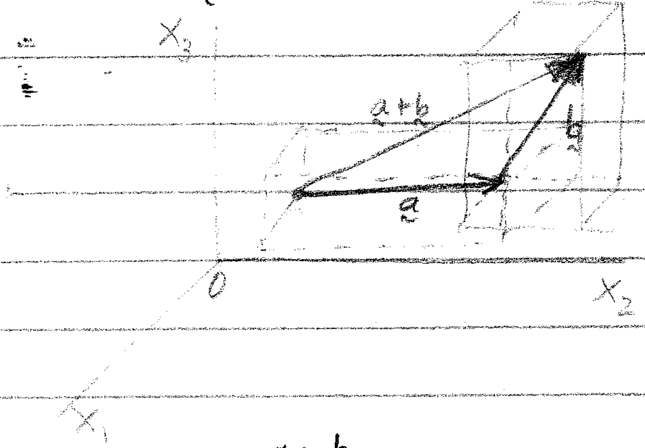
Θέτουμε $\overrightarrow{P_0P_3} = \underset{\sim}{a}$ γιά την γεωμετρική αναπαράσταση του $\underset{\sim}{a}$

P_0 : το αρχικό σημείο του $\underset{\sim}{a}$ (αυθαίρετα επιλεγμένο)

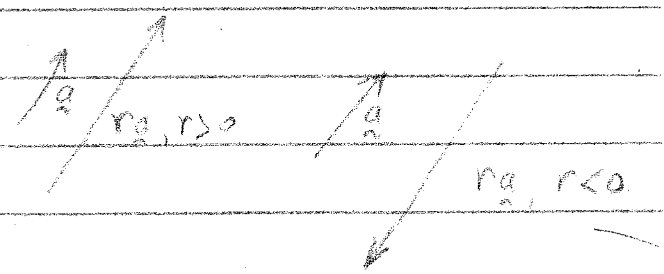
P_3 : το τελικό σημείο του $\underset{\sim}{a}$.

Αντιστρόφως, δοθέντος ενός βέλους από το P_0 στο P_3, κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με έδρες παράλληλες στα επίπεδα X_1X_2, X_2,X_3 και X_3X_1, το διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$ αντιστοιχίζεται σε αυτό το βέλος.

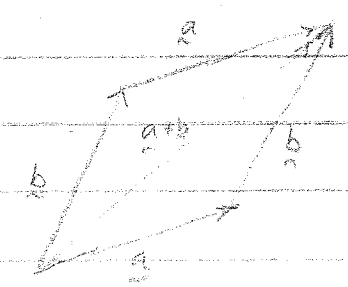
Αν το P_0 θεωρηθεί το O τότε το $\underset{\sim}{a}$ ονομάζεται ένα <u>ακτινικό διάνυσμα</u>. Γενικώς, το $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$ μας δίνει και το μήκος αλλά και την διεύθυνση του βέλους: κάθε δύο βέλη που παριστούν το ίδιο διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$ θα έχουν το ίδιο μήκος (μέτρο) και την ίδια διεύθυνση. Όλες οι πράξεις και οι ιδιότητες των διανυσμάτων μπορούν να παρασταθούν γεωμετρικά. Βλέπε. Σχήματα.

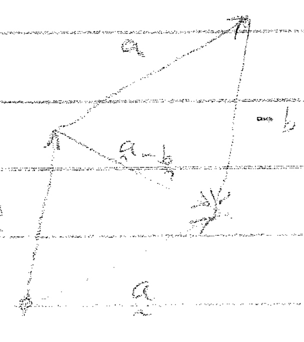


$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$



$r\underset{\sim}{a}$





Αντιμεταθετική ιδιότητα

$\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}$ και ότι $\underset{\sim}{b} + (\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}$

Παραλληλία & μοναδιαιότητα

Τα βέλη που παριστούν τα διανύσματα $\underset{\sim}{a}$ και $r\underset{\sim}{a}$, $r \neq 0$ είναι παράλληλα. Γενικότερα έχουμε:

Ορισμός

Δύο διανύσματα του $\mathbb{V}_n$ είναι <u>παράλληλα</u> αν το ένα είναι ίσο με έναν πραγματικό αριθμό επί το άλλο.

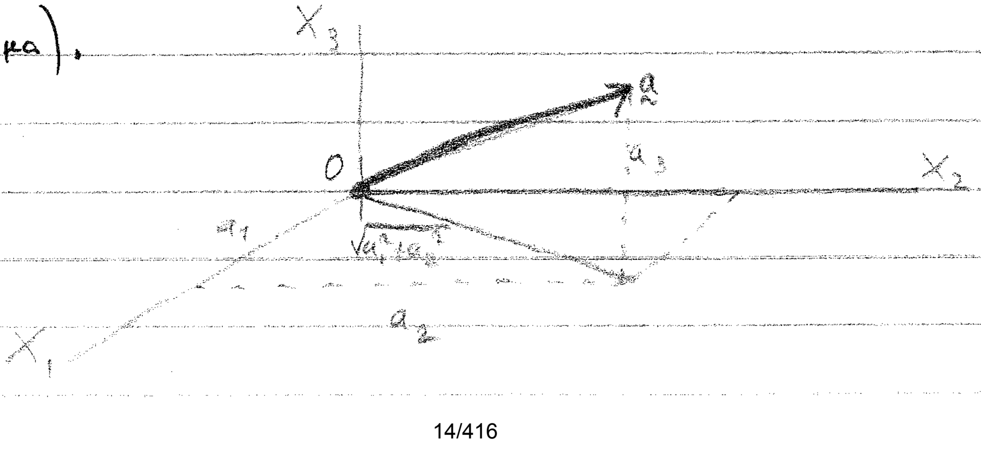
Παρατηρούμε ότι επειδή $\underset{\sim}{0} = 0\,\underset{\sim}{a}$, το $\underset{\sim}{0}$ είναι παράλληλο προς όλα τα διανύσματα του $\mathbb{V}_n$. Αν $\underset{\sim}{b} = r\,\underset{\sim}{a}$ όπου $r>0$, τότε λέμε ότι τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ έχουν την <u>ίδια φορά</u>, ενώ αν $r<0$, έχουν <u>αντίθετες φορές</u> (ή λιγότερο λογικά (!) αντίθετη φορά).

Ορισμός

Το <u>μήκος</u> ενός $\underset{\sim}{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{V}_n$, $|\underset{\sim}{a}|$, είναι ο θετικός αριθμός

$$|\underset{\sim}{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \left[\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa^2\right]^{1/2}. \qquad (5)$$

Ένα διάνυσμα 1-αίου μήκους ονομάζεται ένα <u>μοναδιαίο διάνυσμα.</u> Ο $\mathbb{V}_n$ με το μήκος όπως ορίστηκε ονομάζεται ο n-διάστατος γραμμικός <u>Ευκλείδιος χώρος.</u> Π.χ., στο $\mathbb{V}_3$, αν $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $|\underset{\sim}{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (βλ. Σχήμα).



Θεώρημα (Θεμελιώδεις ιδιότητες του μήκους)

$\forall\ \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in V_n$ και $r \in \mathbb{R}$, έχουμε:

(1) $|\underset{\sim}{a}| \geq 0$ και επιπλέον $|\underset{\sim}{a}| = 0 \iff \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$. (6)

(2) $|r\underset{\sim}{a}| = |r|\,|\underset{\sim}{a}|$ (7)

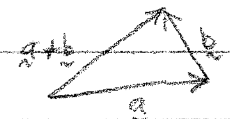
(3) $|\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}| \leq |\underset{\sim}{a}| + |\underset{\sim}{b}|$ (Τριγωνική ανισότητα). (8)

Απόδειξη

(1) Εξ' ορισμού, $|\underset{\sim}{a}| \geq 0$. Τώρα επειδή $|\underset{\sim}{a}|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ έπεται ότι αν $a_i \neq 0$ γιά κάποιο $i = 1, \ldots, n$, τότε $|\underset{\sim}{a}| \neq 0$. Άρα αν $|\underset{\sim}{a}| = 0 \Rightarrow a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$ και έτσι $\underset{\sim}{a} = (a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0) = \underset{\sim}{0}$. Αντιστρόφως, αν $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$ τότε $|\underset{\sim}{a}| = 0$.

(2) $|r\underset{\sim}{a}| = |(ra_1, \ldots, ra_n)| = \sqrt{(ra_1)^2 + \cdots + (ra_n)^2} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{r^2} \cdot |\underset{\sim}{a}| = |r|\,|\underset{\sim}{a}|$.

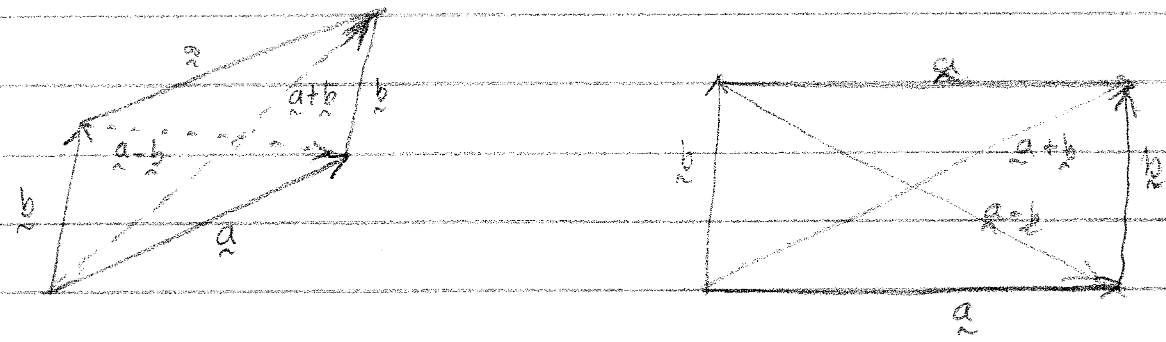
(3) Η απόδειξη θα δοθεί αργότερα. Η τριγωνική ανισότητα αντιστοιχεί στο θεώρημα της γεωμετρίας ότι το μήκος μιάς πλευράς ενός τριγώνου (μη-εκφυλισμένου) είναι μικρότερο του αθροίσματος των δύο άλλων πλευρών.



Παρατήρηση

Ο συμβολισμός $|\underset{\sim}{a}|$ είναι δόκιμος αφού το $|\underset{\sim}{a}|$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με την απόλυτη τιμή $|r|$, $r \in \mathbb{R}$. Έτσι μπορούμε να θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς ως διανύσματα του χώρου V_1 (1-διάστατα διανύσματα) και τότε η απόλυτη τιμή είναι ίση με το μήκος: $|r| = \sqrt{r^2}$.

Ερχόμαστε τώρα στην καθετότητα (ή συνωνύμως ορθογωνιότητα) δύο διανυσμάτων $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$. Βλέπε σχήματα



Αν οι διαγώνιοι $a+b$, $a-b$ του //γράμμου πλευρών a, b είναι ίσες (ορθογώνιο //γραμμο) τότε $a \perp b$.

Ορισμός

Ένα διάνυσμα a είναι ορθογώνιο του διανύσματος b, αν

$$|a+b| = |a-b|. \qquad (9)$$

Επειδή $|a+b| = |b+a|$ και $|a-b| = |b-a|$, έπεται ότι αν $a \perp b$ τότε και $b \perp a$, γι'αυτό και πολλές φορές χρησιμοποιείται ο όρος "αμοιβαία ορθογώνια" ή "κάθετα μεταξύ τους" ή λέμε ότι "τα a, b είναι ορθογώνια".

2

Το βαθμωτό γινόμενο

Το βαθμωτό γινόμενο

Όπως είδαμε γιά τα διανύσματα $\underset{\sim}{a} = (a_1, \dots, a_n)$ και $\underset{\sim}{b} = (b_1, \dots, b_n)$, αν $\underset{\sim}{a} \perp \underset{\sim}{b}$ τότε $|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}|$ και άρα

$$|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|^2 - |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}|^2 = \hat{0}.$$

Επειδή

$$|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|^2 - |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}|^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2 - a_k^2 + 2a_k b_k - b_k^2 \right)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \qquad (10)$$

έπεται ότι $\underset{\sim}{a} \perp \underset{\sim}{b}$ αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

Ορισμός

Το <u>βαθμωτό γινόμενο</u> $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}$ δύο διανυσμάτων $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b} \in W_n$, όπου $\underset{\sim}{a} = (a_1, \dots, a_n)$ και $\underset{\sim}{b} = (b_1, \dots, b_n)$, ορίζεται ως εξής:

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n, \qquad (11)$$

το οποίο είναι ένας πραγματικός αριθμός (ή <u>βαθμωτό</u>) (και όχι ένα διάνυσμα)

* Άλλα ονόματα: εσωτερικό γινόμενο, γινόμενο τελεία. *

Από την εξ. (10) $\rightsquigarrow$

$$|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|^2 - |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}|^2 = 4(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b})$$

και έτσι έχουμε:

Θεώρημα

Δύο διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = 0$. ⊠

Θεώρημα (Θεμελιώδεις ιδιότητες του βαθμ. γιν.)

Έχουμε:

(1) $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{a}$ (12) Αντιμεταθετική

(2) $(r\underset{\sim}{a}) \cdot \underset{\sim}{b} = r(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b})$ (13) Προσεταιριστική

(3) $\underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b}_1 + \underset{\sim}{b}_2) = \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}_1 + \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}_2$ (14) Επιμεριστική

(4) $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{a} \geq 0$ και επιπλέον $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{a} = 0 \iff \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$.

(αναδιατύπωση της εξ. (6) αφού $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = |\underset{\sim}{a}|^2$.)

Απόδειξη

Απλή και παραλείπεται. ☒

Θεώρημα (Πυθαγόρειο θεώρημα)

$\underset{\sim}{a} \perp \underset{\sim}{b}$ αν και μόνο αν $|\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}|^2 = |\underset{\sim}{a}|^2 + |\underset{\sim}{b}|^2$. (15)

Απόδειξη

Μέσω χρήσης των θεμελιωδών ιδιοτήτων του βαθμωτού γινομένου, έχουμε

$$
\begin{aligned}
|\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}|^2 &= (\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}) \cdot (\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}) = \\
&= \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{b} \cdot (\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}) \\
&= \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{b} \\
&= |\underset{\sim}{a}|^2 + 2\, \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} + |\underset{\sim}{b}|^2.
\end{aligned}
$$

Άρα $|\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}|^2 = |\underset{\sim}{a}|^2 + |\underset{\sim}{b}|^2 \iff \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = 0 \iff \underset{\sim}{a} \perp \underset{\sim}{b}$. ☒

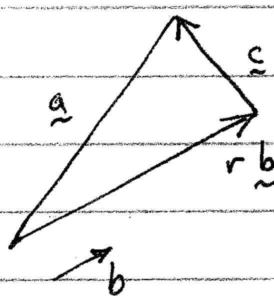
Το βαθμωτό γινόμενο έχει ιδιαίτερη γεωμετρική σημασία. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα στο οποίο χρησιμοποιούνται έννοιες που είδαμε μέχρι τώρα.

Πρόβλημα

Κατασκευή ορθογώνιου τριγώνου υποτείνουσας $\underset{\sim}{a}$ και βάσης παράλληλης του b. Δηλ. ζητούμε ορθογώνιο τρίγωνο πλευρών a, rb $(r \in \mathbb{R})$, και $c = a - rb$ έτσι ώστε $c \perp b$.

Λύση

Επειδή $a - rb \perp b \iff (a - rb) \cdot b = a \cdot b - r|b|^2 = 0$,



έπεται ότι ο μοναδικός αριθμός r έτσι $a - rb \perp b$ είναι ο

$$r = \frac{a \cdot b}{|b|^2}.$$

Άρα το ζητούμενο τρίγωνο υποτείνουσα a έχει πλευρές $\frac{a \cdot b}{|b|^2} b$ και $a - \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$. Η πλευρά $\frac{a \cdot b}{|b|^2} b$ είναι παράλληλη με το b και ονομάζεται η ορθογώνια προβολή του a στο b. ⊠

Ορισμός

Έστω $a, b \in V_n$ με $b \neq 0$. Η ορθογώνια προβολή του a στο b, συμβολικά $\Pi_b(a)$, είναι το διάνυσμα

$$\Pi_b(a) = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b. \qquad (15)$$ ⊠

Η (15) γράφεται

$$\Pi_b(a) = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

και επειδή το $b/|b|$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του b, έπεται ότι το $|a \cdot b|/|b|$ είναι το μήκος του διανύσματος $\Pi_b(a)$. Ο αριθμός $a \cdot b/|b|$ ονοπ.χ. αν $a = (a_1, a_2)$ το a_1 είναι η συνιστώσα του a στην κατεύθυνση του $i = (1,0)$: $\frac{a \cdot i}{|i|} = a \cdot i = (a_1, a_2)\cdot(1,0) = a_1$.

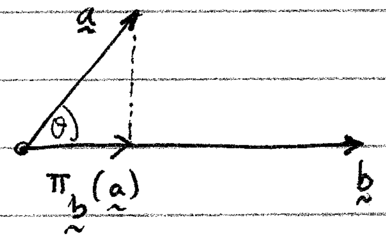
μάζεται η συνιστώσα του a στην κατεύθυνση του b.

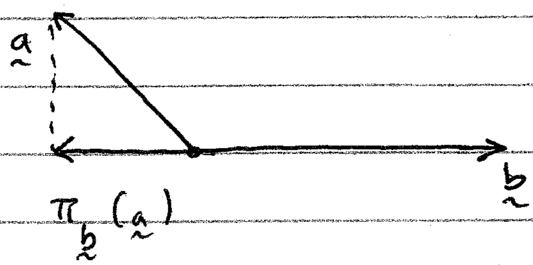
Συμβολισμός: $\sigma_b(a) = \dfrac{a \cdot b}{|b|}$. (17)

Η σχέση μεταξύ των π και σ είναι:

$$\pi_b(a) = \frac{a\cdot b}{|b|^2}\, b = \sigma_b(a)\,\frac{b}{|b|}. \qquad (18)$$

Αν $\sigma_b(a) > 0$ (<0), τότε η $\pi_b(a)$ είναι στην ίδια (αντίθετη) κατεύθυνση με το b, ενώ αν $\sigma_b(a) = 0$, τότε $a \perp b$ (βλ. Σχήματα).





Άρα $|\pi_b(a)| = |\sigma_b(a)|$

- Από την (17) έπεται ότι

$$a \cdot b = |b|\,\sigma_b(a) \qquad (19)$$

δηλ., "το βαθμωτό γινόμενο $a\cdot b$ ισούται με το μήκος του b επί την συνιστώσα του a στην διεύθυνση του b." Παρατηρούμε ότι στο 2-διάστατο Σχήμα ($\mathbb{V}_2$) παραπάνω,

$$\sigma_b(a) = |a| \cos\theta \qquad (20)$$

όπου θ η γωνία από το b στο a και άρα από την (19

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta. \qquad (21)$$

Αυτή η ορολογία επεκτείνεται και ισχύει στον $\mathbb{V}_n$. Δηλ., η "γωνία" θ μεταξύ δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων a, b του $\mathbb{V}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}. \qquad (21)$$

Σημείωση

Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τις έννοιες $\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})$ και $\sigma_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})$ γιά να περιγράψουν αυτό που εμείς ορίσαμε ως $\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})$, και άλλοι γιά να περιγράψουν το $\sigma_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})$.

Παρατηρείστε η $\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})$ δεν αλλάζει αν στη θέση του $\underset{\sim}{b}$ έχουμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\underset{\sim}{b}' \parallel \underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{b}' \neq \underset{\sim}{0}$, ενώ η $\sigma_{\underset{\sim}{b}'}(\underset{\sim}{a})$ αλλάζει πρόσημο αν τα $\underset{\sim}{b}'$ και $\underset{\sim}{b}$ έχουν την ίδια ή αντίθετες φορές.

Ως συνέπεια της γεωμετρικής ερμηνείας του (•) έχουμε:

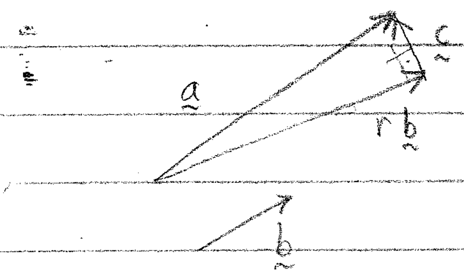
Θεώρημα (Ανισότητα Schwarz)

Γιά κάθε $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathbb{V}_n$,

$$|\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}| \leq |\underset{\sim}{a}|\,|\underset{\sim}{b}| \qquad (22)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι παράλληλ

Απόδειξη



Αν $\underset{\sim}{a} \not\parallel \underset{\sim}{b}$, τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσ $\underset{\sim}{a}$ και βάση $\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})$. Έστω $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} - \pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a}) \neq \underset{\sim}{0}$ η τρίτη πλευρά του τριγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$|\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})|^2 = |\underset{\sim}{a}|^2 - |\underset{\sim}{c}|^2 < |\underset{\sim}{a}|^2$$

ή,

$$|\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})| < |\underset{\sim}{a}|.$$

Από τις εξ. (18), (19), έπεται

$$|\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{b}|\,|\sigma_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})| = |\underset{\sim}{b}|\,|\pi_{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{a})| < |\underset{\sim}{b}|\,|\underset{\sim}{a}|,$$

δηλ. αν $\underset{\sim}{a} \not\parallel \underset{\sim}{b} \Rightarrow$

$$|\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}| < |\underset{\sim}{a}|\,|\underset{\sim}{b}|.$$

Αν $\underset{\sim}{a} \parallel \underset{\sim}{b}$ και ένα από τα $\underset{\sim}{a}$ ή $\underset{\sim}{b}$ είναι το $\underset{\sim}{0}$, τότε ισχύει η ισότητα $(0=0)$, ενώ αν $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$ και $\underset{\sim}{a} \parallel \underset{\sim}{b}$ τότε γιά κάποιο $r \in \mathbb{R}$ $\underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{b}$ και έτσι

$$|\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}| = |(r\underset{\sim}{b}) \cdot \underset{\sim}{b}| = |r| \, |\underset{\sim}{b}|^2 = |r\underset{\sim}{b}| \, |\underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a}| \, |\underset{\sim}{b}|.$$

$\boxtimes$

Μιά πρώτη συνέπεια της ανισότητας Schwarz είναι ότι το $\cos\theta$ από την (21) ικανοποιεί $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Μιά δεύτερη είναι η:

Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας (8)

Επειδή $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} \leq |\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}|$, από την ανισότητα Schwarz έχουμε

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} \leq |\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}| \leq |\underset{\sim}{a}| \, |\underset{\sim}{b}|$$

και έτσι

$$|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|^2 = (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) \cdot (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = |\underset{\sim}{a}|^2 + 2\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} + |\underset{\sim}{b}|^2$$
$$\leq |\underset{\sim}{a}|^2 + 2|\underset{\sim}{a}| \, |\underset{\sim}{b}| + |\underset{\sim}{b}|^2 = (|\underset{\sim}{a}| + |\underset{\sim}{b}|)^2,$$

το οποίο δίνει την τριγωνική ανισότητα

$$|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}| \leq |\underset{\sim}{a}| + |\underset{\sim}{b}|. \quad \boxtimes$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Όταν τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$, ισότητα ισχύει όταν $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = |\underset{\sim}{a}| \, |\underset{\sim}{b}|$ και γνωρίζουμε ότι ισότητα στην αν. Schwarz ισχύει όταν $\underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{b}$, γιά κάποιο r. Α $\underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{b}$ τότε

$$|\underset{\sim}{a}| \, |\underset{\sim}{b}| = |r\underset{\sim}{b}| \, |\underset{\sim}{b}| = |r| \, |\underset{\sim}{b}|^2,$$

και

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = (r\underset{\sim}{b}) \cdot \underset{\sim}{b} = r|\underset{\sim}{b}|^2,$$

και άρα $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = |\underset{\sim}{a}| \, |\underset{\sim}{b}|$ αν και μόνο αν $r = |r|$, δηλ. $r \geq 0$. Δηλ. η ισότητα ισχύει όταν $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$ ή $\underset{\sim}{b} = 0$ ή όταν τα $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ έχουν την ίδια φορά.

3

$0 \quad \mathbb{R}^3$.

Ο 3-διάστατος Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^3$

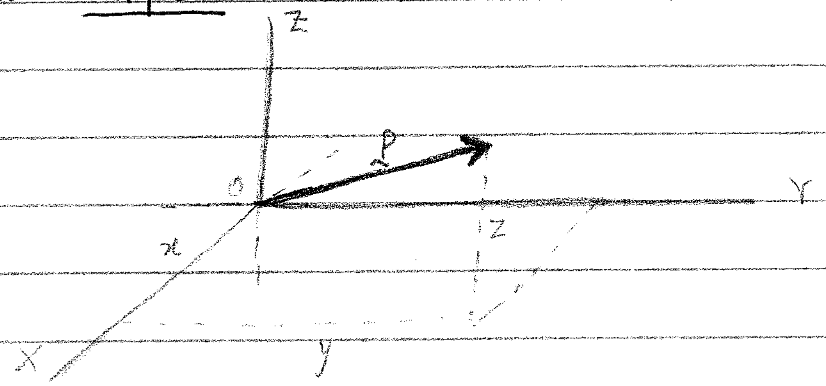
<u>Ορολογία</u>: $\underset{\sim}{P} = (x,y,z)$: 1) <u>σημείο</u> (το τελικό σημείο του αυτινικού διανύσματος) και τα x,y,z : <u>συντεταγμένες του $\underset{\sim}{P}$</u>

ή 2) <u>Ακτινικό διάνυσμα</u>, και τα x,y,z: <u>συνιστώσες του $\underset{\sim}{P}$</u>

3) Ο συμβολισμός $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$: <u>διάνυσμα</u> με συγκεκριμμένη διεύθυνση και φορά. Η επιλογή εξαρτάται από την εφαρμογή.

Ο 3-διάστατος Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^3$ (διαβάζεται $\mathbb{R}$ τρία) είναι ο $\mathbb{V}_3$ στον οποίον έχουμε ορίσει τις έννοιες <u>σημείο</u> <u>ευθεία</u>, <u>επίπεδο</u> και <u>απόσταση</u> δύο σημείων.

1) Τα <u>σημεία</u> του $\mathbb{R}^3$ είναι τα στοιχεία (x,y,z) του $\mathbb{V}_3$.

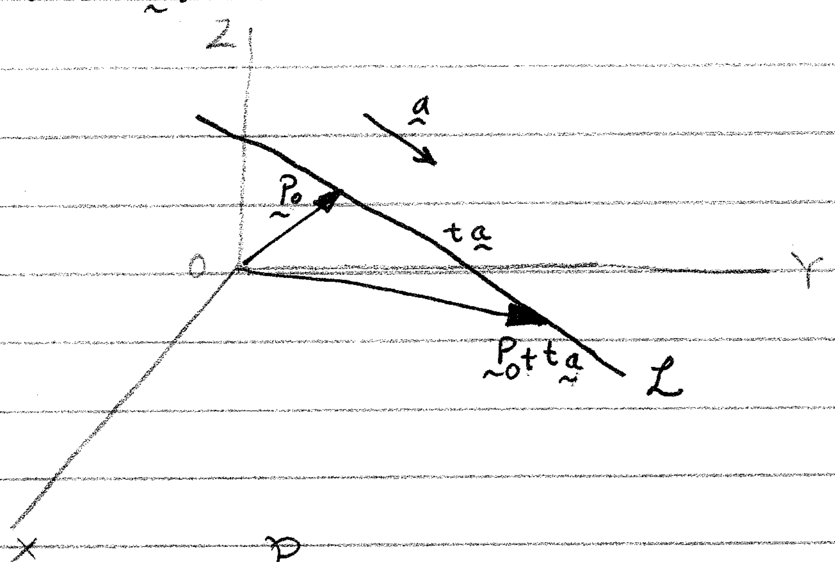


Οι αριθμοί x,y,z θεωρούνται ως οι καρτεσιανές συν/νες του σημείου $\underset{\sim}{P}$.

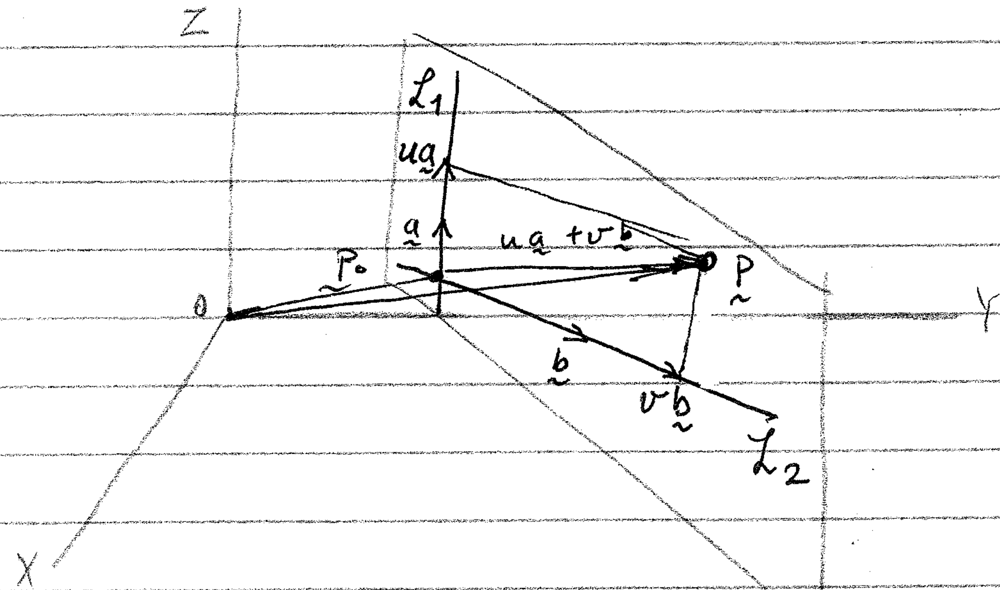
2) Μία <u>ευθεία</u> του $\mathbb{R}^3$, L, καθορίζεται από ένα σημείο $\underset{\sim}{P_0} \in \mathbb{R}^3$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$ $\in \mathbb{V}_3$ (μία "διεύθυνση"), έτσι ώστε τα σημεία της L είναι <u>σημεία</u> της μορφής $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P_0} + t\underset{\sim}{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Αηλ.,

$$L = \{ \underset{\sim}{P_0} + t\underset{\sim}{a} \ : \ t \in \mathbb{R} \}$$

Η L διέρχεται από το σημείο $\underset{\sim}{P_0}$ και είναι (παράλληλη) στην διεύθυνση (του) $\underset{\sim}{a}$. Κάθε σημείο της L μπορεί να προσεγγισθεί από το $\underset{\sim}{P_0}$ προχωρώντας από το $\underset{\sim}{P_0}$ στην διεύθυνση του $\underset{\sim}{a}$.



3) Ένα <u>επίπεδο</u> $\mathcal{P}$ στον $\mathbb{R}^3$ καθορίζεται από δύο μη-παράλληλες ευθείες $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$ στις διευθύνσεις $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ αντίστοιχα, που τέμνονται σε ένα σημείο $\underset{\sim}{P_0} \in \mathbb{R}^3$. Ένα



σημείο $\underset{\sim}{P}$ του επιπέδου $\mathcal{P}$ είναι της μορφής $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P_0} + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b}$ με $u, v \in \mathbb{R}$. Δηλ.:

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P_0} + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} : u, v \in \mathbb{R} \}.$$

4) Η <u>απόσταση</u>, γράφεται $d(\underset{\sim}{P_1}, \underset{\sim}{P_2})$, από το σημείο $\underset{\sim}{P_1} = (x_1, y_1, z_1)$ στο σημείο $\underset{\sim}{P_2} = (x_2, y_2, z_2)$ στον $\mathbb{R}^3$

είναι το μήκος του διανύσματος $\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1$ από το $\underset{\sim}{P}_1$ στο $\underset{\sim}{P}_1$

$$d(\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2) = |\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Ορολογία

Οι εξισώσεις

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_0 + t\underset{\sim}{a}$$

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_0 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b}$$

ονομάζονται οι διανυσματικές εξισώσεις της ευθείας και του επιπέδου αντίστοιχα, και οι αντίστοιχες εξισώσει για τις συνιστώσες

$$x = x_0 + ta_1, \; y = y_0 + ta_2, \; z = z_0 + ta_3$$

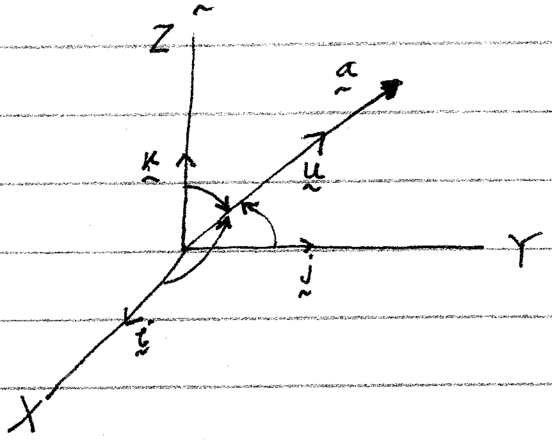
και

$$x = x_0 + u a_1 + v b_1, \; y = y_0 + u a_2 + v b_2, \; z = z_0 + u a_3 + v b_3$$

ονομάζονται οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας και του επιπέδου.

Είναι χρήσιμο να εκφράζουμε συχνά τα διανύσματα του $\mathbb{V}_3$ ως προς τα εξής τρία 1-αια διανύσματα του $\mathbb{V}_3$:

$$\underset{\sim}{i} = (1,0,0) \ , \ \underset{\sim}{j} = (0,1,0) \ , \ \underset{\sim}{k} = (0,0,1).$$



Αυτά τα τρία διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά με τους θετικούς άξονες X, Y, Z. Γιά ένα $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{V}_3$, έχουμε

$$\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1,0,0) + (0,a_2,0) + (0,0,a_3)$$
$$= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

ή

$$\underset{\sim}{a} = a_1 \underset{\sim}{i} + a_2 \underset{\sim}{j} + a_3 \underset{\sim}{k}. \qquad (1)$$

Έστω $\underset{\sim}{a} = (l, m, n)$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα παράλληλο σε μία ευθεία $\mathcal{L}$ (βλ. Σχήμα). Θέτουμε $\alpha = \widehat{\underset{\sim}{i}\underset{\sim}{a}}$, $\beta = \widehat{\underset{\sim}{j}\underset{\sim}{a}}$, $\gamma = \widehat{\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{a}}$: οι <u>γωνίες κατεύθυνσης της $\mathcal{L}$</u> και $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$: τα <u>συνημίτονα κατεύθυνσης της $\mathcal{L}$</u>. Θέτοντας $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{a}/|\underset{\sim}{a}| = (l,m,n)/\sqrt{l^2+m^2+n^2}$, το 1-αιο διάνυσμα στην διεύθυνση του $\underset{\sim}{a}$, έχουμε:

$$\cos\alpha = \underset{\sim}{i}\cdot\underset{\sim}{u} \ , \quad \cos\beta = \underset{\sim}{j}\cdot\underset{\sim}{u} \ , \quad \cos\gamma = \underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{u} \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad (3)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$

Αν οι γωνίες κατεύθυνσης δύο ευθειών $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$

είναι $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ και $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ αντίστοιχα, και ορίζονται από τα διανύσματα $\underset{\sim}{a}_1$ και $\underset{\sim}{a}_2$ αντίστοιχα, και αν θ είναι η γωνί[α]

$\theta = \widehat{\underset{\sim}{a}_1 \underset{\sim}{a}_2}$ τότε

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 . \qquad (5)$$

Ευθείες

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι ότι από δύο διαφορετικά σημεία του χώρου διέρχεται μία και μοναδική ευθεία. Πριν το αποδείξουμε, ανακαλούμε κάποια ορολογία από την θεωρία συνόλων. Έστω A και B δύο σύνολα.

$A \subset B \iff$ κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B

$A = B \iff$ έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία ($A \subset B$ και $B \subset A$)

$A \cap B$: το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο A και στο B. Το κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία : $\emptyset$. Με την εισαγωγή του $\emptyset$, η $A \cap B$ είναι πάντοτε σύνολο

$A \cup B$: το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν είτε στο A ή στο B.

Θεώρημα 1.

Από κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων του $\mathbb{R}^3$ διέρχεται μία και μοναδική ευθεία.

Απόδειξη ($\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ και $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$)

Αν $\underset{\sim}{P_1}$ και $\underset{\sim}{P_2}$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^3$, τότε η

$$\mathcal{L} = \{ \underset{\sim}{P_1} + t(\underset{\sim}{P_2} - \underset{\sim}{P_1}) : t \in \mathbb{R} \}$$

είναι μία ευθεία που διέρχεται από τα $\underset{\sim}{P_1}, \underset{\sim}{P_2}$. Αν

$$\mathcal{L}' = \{ \underset{\sim}{P_0} + s\underset{\sim}{a} : s \in \mathbb{R} \}$$

είναι μία άλλη ευθεία που διέρχεται από τα $\underset{\sim}{P_1}$ και $\underset{\sim}{P_2}$ πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Επειδή τα $\underset{\sim}{P_1}, \underset{\sim}{P_2}$ είναι διαφορετικά σημεία της $\mathcal{L}'$, έπεται ότι $\exists$ διαφορετικοί αριθμοί s_1, s_2 ε/ω $\underset{\sim}{P_1} = \underset{\sim}{P_0} + s_1\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{P_2} = \underset{\sim}{P_0} + s_2\underset{\sim}{a}$. Αν θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο της $\mathcal{L}$, έστω $\underset{\sim}{P}$, τότε γιο κάποιο $t \in \mathbb{R}$,

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + t\,(\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1) = \underset{\sim}{P}_0 + s_1 \underset{\sim}{a} + t\,(s_2 - s_1)\underset{\sim}{a}$$

$$= \underset{\sim}{P}_0 + [\,s_1 + t\,(s_2 - s_1)]\underset{\sim}{a}$$

δηλ. $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{L}'$ και άρα $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$. Αντιστρόφως, αν $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{L}'$, τότ
γιά κάποιο $s \in \mathbb{R}$

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_0 + s\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{P}_1 - s_1\underset{\sim}{a} + s\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{P}_1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}\,(\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1)$$

δηλ., $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{L}$ και άρα $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$. Αφού $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ και $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ έχουμε $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. ☒

<u>Ορισμός</u>

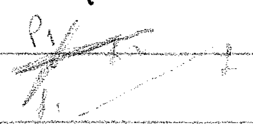
Δύο ευθείες

$$\mathcal{L}_1 = \{\underset{\sim}{P}_1 + s a : s \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}_2 = \{\underset{\sim}{P}_2 + t\underset{\sim}{b} : t \in \mathbb{R}\}$$

ονομάζονται <u>παράλληλες</u> αν τα διανύσματα $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ είναι παράλληλα.

<u>Πόρισμα 1</u>

Από ένα σημείο $\underset{\sim}{P}_1 \in \mathbb{R}^3$ εκτός της ευθείας $\mathcal{L} = \{\underset{\sim}{P}_0 + s\underset{\sim}{a} : s \in \mathbb{R}\}$, υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη της $\mathcal{L}$ που διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}_1$.



<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\mathcal{L}_1 = \{\underset{\sim}{P}_1 + t\underset{\sim}{a} : t \in \mathbb{R}\}$ μία ευθεία που διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}_1$ παράλληλη στην $\mathcal{L}$ και $\mathcal{L}_2 = \{\underset{\sim}{P}_2 + u\underset{\sim}{b} : u \in \mathbb{R}\}$ μία δεύτερη ευθεία που διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}_1$ παράλληλη στην $\mathcal{L}$. Αφού $\underset{\sim}{P}_1 \in \mathcal{L}_2$, $\exists\, u_1 \in \mathbb{R}$:

$$\underset{\sim}{P}_1 = \underset{\sim}{P}_0 + u_1 \underset{\sim}{b}\,.$$

Επίσης επειδή $\mathcal{L}_2 \parallel \mathcal{L} \Rightarrow \underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{b}$ γιά κάποιο $r \in \mathbb{R}$

Άρα έχουμε

$$\underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{P}_2 + (u_1 + r)\underset{\sim}{b}$$

και $\underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{a} \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Αφού όμως τα $\underset{\sim}{P}_1$ και $\underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{a}$ είναι διαφορετικά σημεία της $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, έπεται από το προηγούμενο Θεώρημα ότι $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. ☒

Πόρισμα 2

Αν οι ευθείες $\mathcal{L}_1 = \{\underset{\sim}{P}_1 + s\underset{\sim}{a} : s \in \mathbb{R}\}$ και $\mathcal{L}_2 = \{\underset{\sim}{P}_2 + t\underset{\sim}{b} : t \in \mathbb{R}\}$ είναι παράλληλες, τότε είτε $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ ή $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$ τότε $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Εστω $\underset{\sim}{P}_0 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ (δηλ. το $\underset{\sim}{P}_0$ είναι ένα σημείο της τομής). Τότε $\exists\, s_0, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\underset{\sim}{P}_0 = \underset{\sim}{P}_1 + s_0\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{P}_2 + t_0\underset{\sim}{b}.$$

Επειδή $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Rightarrow \underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{b}$ γιά κάποιο $r \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\underset{\sim}{P}_0 + \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{P}_1 + (s_0 + 1)\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{P}_2 + (t_0 + r)\underset{\sim}{b}$$

και έτσι $\underset{\sim}{P}_0 + \underset{\sim}{a} \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Επειδή όμως τα $\underset{\sim}{P}_0$ και $\underset{\sim}{P}_0 + \underset{\sim}{a}$ είναι διαφορετικά σημεία της $\mathcal{L}_1$ και της $\mathcal{L}_2$, έπεται ότι $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. ☒

Πόρισμα 3

Αν οι ευθείες $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ δεν είναι παράλληλες, τότε είτε $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$ ($\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ είναι ασύμβατες) ή η $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ περιέχει ένα μόνο σημείο.

Απόδειξη

Αν η $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ περιείχε περισσότερα του ενός σημεία, τότε από το προηγούμενο θεώρημα, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. Άλλα αφού $\mathcal{L}_1 \not\parallel \mathcal{L}_2$, οι $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$ δεν μπορεί να συμπίπτουν. Άρα η $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ περιέχει <u>το πολύ</u> ένα σημείο (ένα ή κανένα). ☒

Ο ακόλουθος ορισμός μας επιτρέπει να μιλούμε γιά την γωνία που σχηματίζουν δύο ευθείες ακόμη και όταν αυτές δεν τέμνονται.

<u>Ορισμός</u>

Η θ είναι <u>η γωνία</u> μεταξύ των δύο ευθειών $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$ αν γιά μη-μηδενικά διανύσματα $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ έχουμε $\mathcal{L}_1 = \{ \underset{\sim}{P}_1 + s\underset{\sim}{a} : s \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{L}_2 = \{ \underset{\sim}{P}_2 + t\underset{\sim}{b} : t \in \mathbb{R} \}$ και θ είναι η γωνία μεταξύ των $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω οι ευθείες

$$\mathcal{L}_1 = \{ (1,3,-2) + t(3,-6,9) \}, \quad \mathcal{L}_2 = \{ (2,1,7) + s(1,-3,4) \}$$

Τότε $\mathcal{L}_1 \not\parallel \mathcal{L}_2$ αφού $\nexists\, r \in \mathbb{R}$ ε/ω

$$(3,-6,9) = r(1,-3,4).$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \phi$. Εν τούτοις αν θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\underset{\sim}{a} = (3,-6,9)$ και $\underset{\sim}{b} = (1,-3,4)$, τότε

$$\cos\theta = \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}}{|\underset{\sim}{a}|\,|\underset{\sim}{b}|} = \frac{3+18+36}{3\sqrt{14}\,\sqrt{26}} = \frac{57}{6\sqrt{91}} = 0{,}99587$$

δηλ. $\theta = 5^\circ 12'$ ή $354^\circ 48'$. ☒

4

Γραμμική ανεξαρτησία

Το εξωτερικό γινόμενο και γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός

Το εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο των διανυσμάτων $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\underset{\sim}{b} = (b_1, b_2, b_3)$ του $\mathbb{V}_3$, συμβολικά $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$, είναι το διάνυσμα:

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1). \qquad (1)$$

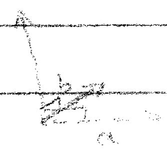
Επειδή

$$\underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) = a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= 0 \qquad (2)$$

και

$$\underset{\sim}{b} \cdot (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) = b_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= 0 \qquad (3)$$

Έπεται ότι $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \perp a$ και $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \perp \underset{\sim}{b}$.



Οι βασικές ιδιότητες του $(\times)$–γινομένου είναι

Θεώρημα

Για όλα τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \mathbb{V}_3$ και $r \in \mathbb{R}$,

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = -\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a} \qquad (4)$$

$$(r\underset{\sim}{a}) \times \underset{\sim}{b} = r(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) \qquad (5)$$

$$\underset{\sim}{a} \times (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{c} \qquad (6)$$

Απόδειξη

Απλή, μέσω του ορισμού (1). $\boxtimes$

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ έχουμε:
($\underset{\sim}{i} = (1, 0, 0)$, κλπ)

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{k} = -\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{i} \\ \underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{i} = -\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{j} \\ \underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{j} = -\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{k} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Μέσω των σχέσεων (7) βρίσκουμε ότι $\forall\, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in V_3$:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b} &= (a_1\underset{\sim}{i} + a_2\underset{\sim}{j} + a_3\underset{\sim}{k}) \times (b_1\underset{\sim}{i} + b_2\underset{\sim}{j} + b_3\underset{\sim}{k}) = \\ &= a_1b_1(\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{i}) + a_1b_2(\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{j}) + a_1b_3(\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{k}) + \\ &+ a_2b_1(\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{i}) + a_2b_2(\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{j}) + a_2b_3(\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{k}) + \\ &+ a_3b_1(\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{i}) + a_3b_2(\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{j}) + a_3b_3(\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{k}) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underset{\sim}{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underset{\sim}{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\underset{\sim}{k}, \end{aligned} \quad (8)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν και οι ιδιότητες (5), (6).

Ωστόσο, ο πιό κομψός και βολικός τρόπος αναπαράστασης του $\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}$ είναι μέσω οριζουσών. Θεωρούμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

όπου η πρώτη σειρά (αριθμών) έχει αντικατασταθεί από τα τρία διανύσματα $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$. Παρατηρούμε ότι (μέσω της (8) και του αναπτύγματος της ορίζουσας)

$$\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Αυτός ο "ορισμός" μας βοηθά να δώσουμε μία πολύ ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία (ή ιδιότητα!) του μήκους του $\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}$. Έχουμε :

$$|\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}|^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

δηλαδή,

$$|\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}|^2 = |\underset{\sim}{a}|^2|\underset{\sim}{b}|^2-(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})^2. \qquad (10)$$

Επειδή

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = |\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|\cos\theta,$$

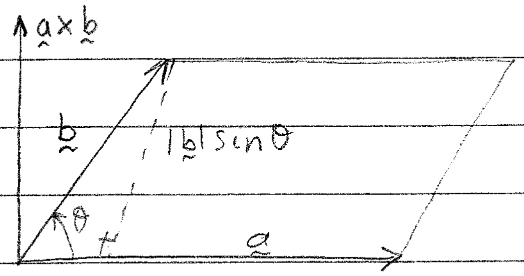
αν πάρουμε την γωνία θ να είναι η γωνία $0\le\theta\le\pi$ μεταξύ των $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ τότε

$$|\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}|^2 = |\underset{\sim}{a}|^2|\underset{\sim}{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\underset{\sim}{a}|^2|\underset{\sim}{b}|^2\sin^2\theta$$

δηλ.,

$$|\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a}|\,|\underset{\sim}{b}|\sin\theta \qquad (11)$$

$\sin\theta\ge 0$ αφού $\theta\in[0,\pi]$



Επειδή $|\underset{\sim}{b}|\sin\theta$ είναι το ύψος του παραλληλογράμμου πλευρών $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}$ έπεται ότι:

Θεώρημα

Το μήκος του $|\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}|$ ισούται με το εμβαδό του παρ/μου με πλευρές $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}$.

Επίσης, αφού κάθε παρ/μο υπάρχει ανν $\underset{\sim}{a}\not\parallel\underset{\sim}{b}$, έχουμε

Θεώρημα

Αν $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in\mathbb{V}_3$ τότε: $\underset{\sim}{a}\parallel\underset{\sim}{b} \iff \underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{0}$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0} \iff |\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}|^2 = 0$ ή, από την εξ. (11), ισοδύναμα $(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b})^2 = |\underset{\sim}{a}|^2 |\underset{\sim}{b}|^2$ ή $|\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|$, η οποία είναι η ανισότητα Schwarz με την ισότητα. Αυτό, έχουμε δείξει, ισχύει ανν $\underset{\sim}{a} \parallel \underset{\sim}{b}$. ⊠

∿ • ∿

Γιά την βολική περιγραφή της θεμελιώδους έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας, εισάγαμε τώρα μια ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή γινομένου, της οποίας οι εφαρμογές είναι πολύ γενικότερες.

Ορισμός

Γιά τρία διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in V_3$, ορίζουμε τό <u>τριπλό βαθμωτό γινόμενο</u>, $[\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{c}]$, ως εξής:

$$[\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}).$$

Παρατηρούμε ότι εκφράσεις όπως $(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}) \times \underset{\sim}{c}$ <u>δεν</u> έχουν νόημα.

Πρόταση (Βασικές ιδιότητες)

1) $$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2) $$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{b} \cdot (\underset{\sim}{c} \times \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{c} \cdot (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}).$$

(ή αντίθετα χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα του $(\cdot)$)

3) $$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = [\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}\,\underset{\sim}{a}] = [\underset{\sim}{c}\,\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}]$$

4) $$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) \cdot \underset{\sim}{c}.$$

(αντιμετάθεση $(\cdot)$ και $(\times)$)

Απόδειξη

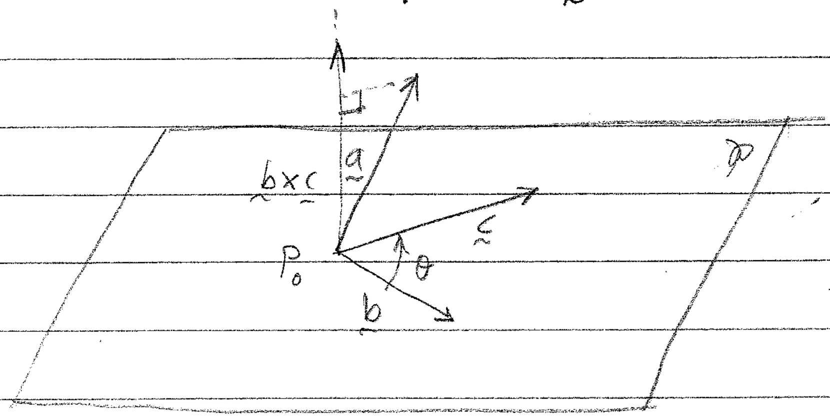
(1),(2) Εύκολοι υπολογισμοί από τον ορισμό, (3),(4) μέσω των (1),(2). ⊠

Μέσω του τριπλού γινομένου μπορούμε να προσδώσουμε μια έννοια <u>προσανατολισμού</u> στον $\mathbb{R}^3$. Λέμε ότι μια τριάδα <u>κάθετων</u> μεταξύ τους διανυσμάτων $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι <u>θετικά προσανατολισμένη</u> αν $[\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}] > 0$. Πολλές φορές μία (+)κα προσ/νη τριάδα ονομάζεται <u>δεξιόστροφη</u>. Π.χ., η τριάδα $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ είναι δεξιόστροφη τριάδα, αφού

$$[\underset{\sim}{i}\ \underset{\sim}{j}\ \underset{\sim}{k}] = \underset{\sim}{i} \cdot [\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{k}] = \underset{\sim}{i} \cdot \underset{\sim}{i} = 1 > 0.$$

Στη περίπτωση αυτή, η περιστροφή από το $\underset{\sim}{b}$ στο $\underset{\sim}{c}$ με γωνία $\pi/2$ εμφανίζεται <u>αντίθετη</u> της κίνησης των δεικτών του ρολογιού από το διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$.

Τρία <u>όχι απαραίτητα ορθογώνια</u> διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ θα λέμε ότι αποτελούν μία (+)κα προσανατολισμένη τριάδα αν $[\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}] > 0$. Στη περίπτωση αυτή η αντίστοιχη περιστροφή κατά γωνία θ του $\underset{\sim}{b}$ στο $\underset{\sim}{c}$ θα είναι δεξιόστροφη



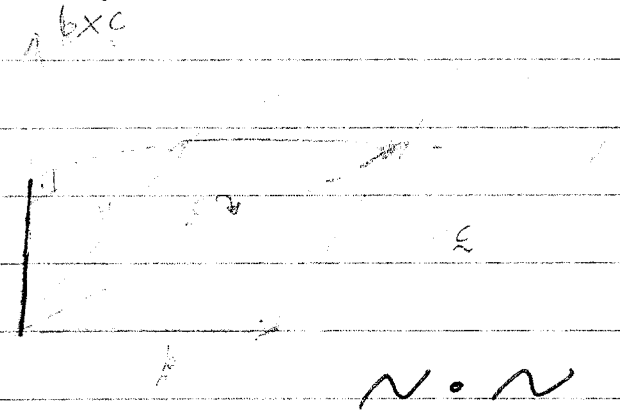
όπως όμως θα φαίνεται από το $\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}$ και όχι από το $\underset{\sim}{a}$: Αν δηλ. τα $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ δεν είναι παράλληλα τότε

$$[(\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c})\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}] = (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = |\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}|^2 > 0.$$

Τέλος, η γεωμετρική αναπαράσταση (ερμηνεία) του $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ είναι ως εξής. Θεωρούμε μία δεξιόστροφη (δηλ., (+)κα προσανατολισμένη) τριάδα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ και βλέπουμε ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν, είναι εμβαδόν βάσης επί ύψος. Δηλ.,

$$\text{όγκος} = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\,\sigma_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$$

αφού (+)κός προσανατολισμός $\Rightarrow \sigma_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}(\mathbf{a}) > 0$ ($[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] > 0$ στα η τριάδα είναι (+)κα προσ/νη).



Είμαστε τώρα σε θέση να μιλήσουμε για γραμμική ανεξαρτησία.

<u>Ορισμός</u>

Ένα σύνολο $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ k διανυσμάτων του $\mathbb{V}_n$ ονομάζεται <u>γραμμικά ανεξάρτητο</u> αν κάθε σχέση της μορφής

$$r_1\mathbf{a}_1 + \dots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \qquad (r_i \in \mathbb{R})$$

συνεπάγεται $r_1 = \dots = r_k = 0$. Αν το $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε λέγεται <u>γραμμικά εξαρτημένο</u>.

Δηλ., ένα σύνολο k διανυσμάτων $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνο αν υπάρχουν k αριθμοί $r_1, \dots, r_k$, όχι όλοι ίσοι με μηδέν, έτσι ώστε

$$r_1 \underset{\sim}{a}_1 + \cdots r_k a_k = \underset{\sim}{0}.$$

Η έκφραση $r_1 \underset{\sim}{a}_1 + \cdots + r_k \underset{\sim}{a}_k$, $r_i \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ένας <u>γραμμικός συνδιασμός</u> των διανυσμάτων $\underset{\sim}{a}_i$. Πολλές φορές λέμε ότι <u>τα διανύσματα</u> $\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (εξαρτημένα), αντί γιά το σύνολο $\{\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_k\}$.

<u>Πρόταση</u>

(1) Δύο διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι παράλληλα.

(2) Τρία διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι παράλληλα στο ίδιο επίπεδο

(3) Κάθε σύνολο περισσοτέρων των τριών διανυσμάτων του $\mathbb{V}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

(4) Αν κάποιο υποσύνολο των k διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε το σύνολο των k διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο.

(5) Κάθε σύνολο διανυσμάτων που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

<u>Απόδειξη</u>

Αποδεικνύουμε μόνο την (2$\Rightarrow$) και αφήνουμε τα υπόλοιπα ως ασκήσεις. Αν τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \mathbb{V}_3$ είναι γραμ. εξαρ. τότε $\exists\, r, s, t \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν, ώστε

$$r\underset{\sim}{a} + s\underset{\sim}{b} + t\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}.$$

Αν $r \neq 0$, τότε $\underset{\sim}{a} = -\frac{s}{r}\underset{\sim}{b} - \frac{t}{r}\underset{\sim}{c}$ και το $\underset{\sim}{a}$ είναι γραμ. συνδιασμός των $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$. Αν $\underset{\sim}{b} \not\parallel \underset{\sim}{c}$, τότε τα $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ ορίζουν ένα επίπεδο $\mathcal{P}$ που διέρχεται από κάποιο σημείο $\underset{\sim}{P}_0 \in \mathbb{R}^3$ και $\underset{\sim}{a} \parallel \mathcal{P}$ (δηλ., $\{\underset{\sim}{P}_0 + t\underset{\sim}{a}\} \subset \mathcal{P}$)

Αν $\underset{\sim}{b} \parallel \underset{\sim}{c}$, τότε $\underset{\sim}{a} \parallel \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ και υπάρχουν διάφορα επίπεδα που διέρχονται από κάποιο σημείο $\underset{\sim}{P_0}$ στα οποία τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι παράλληλα. (Ομοίως γιά το $\underset{\sim}{b}$ αν το $s \neq 0$, και γιά το $\underset{\sim}{c}$ αν το $t \neq 0$.) ($\Leftarrow$) Άσκηση. ☒

Αφού λοιπόν το να είναι τρία διανύσματα παράλληλα στο ίδιο επίπεδο είναι ισοδύναμο με το ότι αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα, και επειδή ο όγκος του παρ/δου με πλευρές αυτά τα διανύσματα είναι μηδέν αν και μόνο αν αυτά είναι παράλληλα στο ίδιο επίπεδο (όπως αυτό είναι γεωμετρικά εμφανές), έπεται το ακόλουθο κριτήριο γραμμικής ανεξαρτησίας αφού όγκος παρ/δου $= |[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}]|$:

Θεώρημα

Τρία διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \mathbb{V}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν $[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = 0$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Αν τα $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμ. εξαρτημένα δηλ. παράλληλα, και άρα

$$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{0} = 0.$$

Αν τα $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα ενώ τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμ. εξαρτημένα τότε (γιατί;)

$$\underset{\sim}{a} = s\,\underset{\sim}{b} + t\,\underset{\sim}{c} \quad \text{για } s, t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, επειδή $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \perp \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}$, έχουμε

$$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = s\left(\underset{\sim}{b} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c})\right) + t\left(\underset{\sim}{c} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c})\right) =$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = 0$. Τότε αφού $(\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) \cdot \underset{\sim}{a} = 0$ $\Rightarrow \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} \perp \underset{\sim}{a}$, και επειδή $\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} \perp \underset{\sim}{b} \Rightarrow \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} \parallel \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

(1) $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$. Τότε τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι γραμ. εξαρτημένα και άρα τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(2) $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$. Τότε γιά κάποιο $r \in \mathbb{R}$

$$\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} = r(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b})$$

ή

$$\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} + r(\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{0}$$

ή

$$\underset{\sim}{b} \times (\underset{\sim}{c} + r\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{0}$$

δηλ. $\underset{\sim}{b} \parallel \underset{\sim}{c} + r\underset{\sim}{a}$. Αλλά $\underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$ και άρα γιά κάποιο $s \in \mathbb{R}$

$$\underset{\sim}{c} + r\underset{\sim}{a} = s\underset{\sim}{b}$$

δηλ. τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{c}$ είναι γραμ. εξαρτημένα. ☒

Παράδειγμα

Είναι τα διανύσματα $\underset{\sim}{a} = (1, 2, -2)$, $\underset{\sim}{b} = (0, 3, 1)$ και $\underset{\sim}{c} = (-1, 1, 3)$ γραμμικά εξαρτημένα;

Απάντηση

Έχουμε

$$[\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(9-1) - 2(0+1) - 2(0+3) = 0.$$

Άρα είναι γραμ. εξαρτημένα.

Επιπλέον ισχύει ότι $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}$.

5

Enimeda

Επίπεδα

Όπως έχουμε ήδη πει, ένα επίπεδο $\mathcal{P}$ που περνά από ένα σημείο $\underset{\sim}{P}_0$ ορίζεται από δύο μη-παράλληλα διανύσματα $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ ως το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P}_0 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} \ : u, v \in \mathbb{R} \}.$$

Λέμε ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{n}$ είναι <u>κάθετο στο $\mathcal{P}$</u> αν το $\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0}$ και $\underset{\sim}{n} \perp \underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$. Έτσι το $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \perp \mathcal{P}$ και κάθε άλλο κάθετο διάνυσμα στο $\mathcal{P}$ είναι παράλληλο του $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$.

Το πρώτο γεγονός που μαθαίνουμε είναι να περιγράφουμε κάθε επίπεδο μέσω μιάς εξίσωσης που ονομάζεται γραμμική εξίσωση. Αυτό μελετάται στα επόμενα λήμματα και θεωρήματα.

Λήμμα 1

Αν το $\underset{\sim}{n}$ είναι κάθετο στο επίπεδο $\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P}_0 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} : u, v \in \mathbb{R}\}$ και $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2 \in \mathcal{P}$, τότε $\underset{\sim}{n} \perp \underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1$.

Απόδειξη

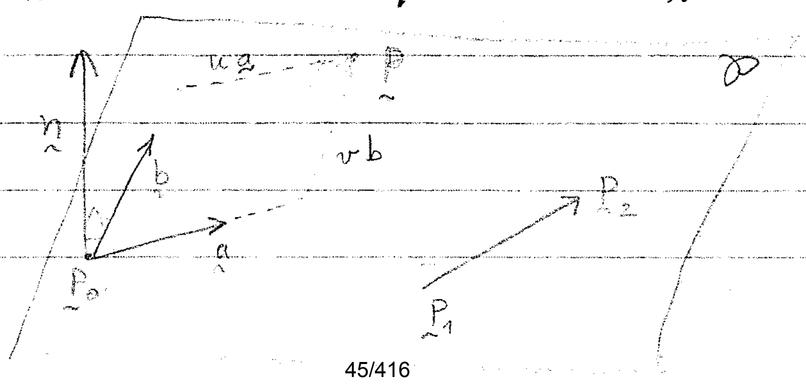
Αφού $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2 \in \mathcal{P}$,

$$\underset{\sim}{P}_1 = \underset{\sim}{P}_0 + u_1\underset{\sim}{a} + v_1\underset{\sim}{b}, \quad \underset{\sim}{P}_2 = \underset{\sim}{P}_0 + u_2\underset{\sim}{a} + v_2\underset{\sim}{b}$$

γιά κάποια $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1 = (u_2 - u_1)\underset{\sim}{a} + (v_2 - v_1)\underset{\sim}{b}.$$

Αφού $\underset{\sim}{n} \perp \underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ έχουμε ότι $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1) = 0$. ☒



Επιπλέον:

<u>Λήμμα 2</u>

Αν το $\underset{\sim}{n}$ είναι κάθετο στο $\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P}_o + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} : u, v \in \mathbb{R} \}$ και $\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o \perp \underset{\sim}{n}$, τότε $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{P}$.

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $\underset{\sim}{n} = r(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b})$, $r \neq 0$ και $\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o \perp n$, έπεται ότι

$$(\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o) \cdot (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) = 0.$$

Επειδή αυτό το τριπλό γινόμενο είναι μηδέν, έπεται ότι τα διανύσματα $\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o$, $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και άρα

$$\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o = u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b}.$$

Έτσι έχουμε: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_o + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{P}$. ☒

Μέσω των λημμάτων 1,2 βρίσκουμε:

<u>Θεώρημα 1</u>

Αν το $\underset{\sim}{n}$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P}_o + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} : u, v \in \mathbb{R} \},$$

τότε

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o) = 0 \},$$

και επιπλέον το $\mathcal{P}$ είναι το <u>μοναδικό</u> επίπεδο που διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}_o$ με κάθετο $\underset{\sim}{n}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\mathcal{L} = \{ \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o) = 0 \}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{L} = \mathcal{P}$. Από το Λήμμα 1, αν $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{P}$ τότε $\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o \perp \underset{\sim}{n}$ και άρα $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o) = 0$, δηλ. $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{L}$ και έτσι $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. Αντίστροφα, αν $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{L}$, τότε $\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_o \perp \underset{\sim}{n}$

και άρα από το Λήμμα 2, $\underset{\sim}{P} \in \mathcal{P}$. Έτσι $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ και άρα $\mathcal{L} = \mathcal{P}$.

Γιά να δείξουμε ότι το $\mathcal{P}$ είναι το μοναδικό επίπεδο πο διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}_0$ με κάθετο $\underset{\sim}{n}$, έστω ότι έχουμε ένα δεύτερο τέτοιο επίπεδο

$$\mathcal{P}' = \{ \underset{\sim}{P}_0' + s\underset{\sim}{c} + t\underset{\sim}{d} : s, t \in \mathbb{R} \}.$$

Τότε

$$\mathcal{P}' = \{ \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0') = 0 \}.$$

Αφού $\underset{\sim}{P}_0 \in \mathcal{P}'$, $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P}_0 - \underset{\sim}{P}_0') = 0$ ή $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P}_0 = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P}_0'$ και άρα $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0) = \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0')$ $\forall \underset{\sim}{P} \in \mathbb{R}^3$ και ειδικά

$$\mathcal{P}' = \{ \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0') = 0 \} = \{ \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0) = 0 \} = \mathcal{P}. \quad \blacksquare$$

Η εξίσωση

$$\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0) = 0 \qquad (1)$$

ονομάζεται μία <u>διανυσματική εξίσωση</u> του επιπέδου $\mathcal{P}$. Αυτό που δείξαμε ως τώρα είναι ότι αν $\mathcal{P}$ είναι ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $\underset{\sim}{P}$ με κάθετο διάνυσμα $\underset{\sim}{n}$, <u>τότε</u> $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0) = 0$ είναι η διανυσματική εξίσωση του $\mathcal{P}$. Αντιστρόφως, θα δείξουμε ότι κάθε διανυσματική εξίσωση $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0) = 0$ $(\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0})$ είναι η διανυσματική εξίσωση ενός επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $\underset{\sim}{P}_0$.

<u>Θεώρημα 2</u>

Σε κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\underset{\sim}{n}$ και κάθε σημείο $\underset{\sim}{P}_0$, η εξίσωση $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_0) = 0$ είναι μία διανυσματική εξίσωση ενός επιπέδου που διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}_0$ και έχει κάθετο το $\underset{\sim}{n}$.

Απόδειξη

Θέλουμε να δείξουμε ότι το

$$\mathcal{L} = \{ \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P_0}) = 0 \}$$

είναι ένα επίπεδο που διέρχεται από το $\underset{\sim}{P}$ με κάθετο διάνυ $\underset{\sim}{n}$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, και τα δύο κάθετα στο $\underset{\sim}{n}$. Τότε το $\underset{\sim}{n}$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P_0} + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} : u, v \in \mathbb{R} \},$$

και άρα από το προηγούμενο θεώρημα $\mathcal{L} = \mathcal{P}$. Έστω $\underset{\sim}{n} = (n_1, n_2, n_3)$ οι συνιστώσες του $\underset{\sim}{n}$. Αφού $\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0}$ τουλάχιστον μία από τις n_i είναι μη-μηδενική, έστω $n_1 \neq 0$. Τότε το διάνυσμα

$$\underset{\sim}{a} = (-n_2, n_1, 0)$$

είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\perp \underset{\sim}{n}$, και άρα τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;). Τότε το $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{a}$ είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα και $\underset{\sim}{b} \perp \underset{\sim}{n}, \underset{\sim}{a}$.
Άρα τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\underset{\sim}{a} \perp \underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{b} \perp \underset{\sim}{n}$

Έτσι φθάνουμε στο εξής σημαντικό

Πόρισμα

Κάθε διανυσματική εξίσωση $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P} = d$ $(\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0})$ είναι εξίσωση κάποιου επιπέδου με κάθετο $\underset{\sim}{n}$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P} = d$ έχει λύση καθώς, αν $\underset{\sim}{P_0}$ είναι μία λύση, τότε $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P_0} = d$ και άρα $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P} = d = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P_0}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $\underset{\sim}{n} \cdot (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P_0}) = 0$, που γνωρίζουμε ότι είναι εξίσωση επιπέδου. Έστω $\underset{\sim}{n} = (a, b, c)$ και $\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0}$, κάποια από τις συνιστώσες του είναι $\neq 0$. Τότε αρκεί να βρούμε σημείο $\underset{\sim}{P} = (x, y, z)$ τέτοιο ώστε

$$ax + by + cz = d.$$

Όμως αυτή η εξίσωση έχει λύσεις (π.χ., αν $a \neq 0$, η $(d/a, 0, 0)$, κ.λ.π). $\boxtimes$

Επειδή αν $\underset{\sim}{n} = (a, b, c) \neq \underset{\sim}{0}$ και $\underset{\sim}{P} = (x, y, z)$, τότε

$$\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P} = ax + by + cz$$

βλέπουμε, όπως πριν ότι η διανυσματική εξίσωση $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{P} = d$ γράφεται

$$ax + by + cz = d \qquad (2)$$

και ονομάζεται η <u>εξίσωση του επιπέδου</u> $\mathcal{P}$, όπου

$$\mathcal{P} = \{ (x, y, z) : ax + by + cz = d \}$$

είναι το σύνολο όλων των λύσεων της (2). (Βλέπουμε δηλ. ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης (2) είναι ένα επίπεδο!) Κάθε εξίσωση της μορφής (2) όπου $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ονομάζεται μία <u>γραμμική εξίσωση στα x, y, z</u>. Άρα έχουμε αποδείξει ότι:

<u>Θεώρημα 3</u>

Κάθε γραμμική εξίσωση στα x, y, z είναι η εξίσωση κάποιου επιπέδου. $\boxtimes$

Τέλος, έστω $\underset{\sim}{P_0}, \underset{\sim}{P_1}, \underset{\sim}{P_2}$ τρία μη-συνευθειακά σημεία του R^3. Τότε τα διανύσματα $\underset{\sim}{P_1} - \underset{\sim}{P_0}$ και $\underset{\sim}{P_2} - \underset{\sim}{P_0}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;). Άρα το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P_0} + u(\underset{\sim}{P_1} - \underset{\sim}{P_0}) + v(\underset{\sim}{P_2} - \underset{\sim}{P_0}) : u, v \in \mathbb{R} \}$$

είναι ένα επίπεδο που διέρχεται από τα $\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2$. Το διάνυσμα $\underset{\sim}{n} = (\underset{\sim}{P}_1 - \underset{\sim}{P}_0) \times (\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_0)$ είναι κάθετο σε κάθε επίπεδο που διέρχεται από τα $\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2$ (γιατί; -πλήρης αιτιολόγηση), και άρα από το Θεώρημα 1, το $\mathcal{P}$ είναι το μοναδικό επίπεδο που διέρχεται από τα $\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2$. Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

<u>Θεώρημα 4.</u>

Τρία μη-συνευθειακά σημεία ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο. ☒

Περνάμε τώρα στο πρόβλημα του καθορισμού της <u>τομής</u> δύο επιπέδων και μίας ευθείας και ενός επιπέδου. Ο χαρακτήρας της τομής δύο επιπέδων καθορίζεται από το αν τα δύο επίπεδα είναι ή όχι παράλληλα. Έχουμε

<u>Ορισμός</u>

Δύο επίπεδα ονομάζονται <u>Παράλληλα</u> αν τα κάθετα σε αυτά διανύσματα είναι παράλληλα.

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$ είναι δύο παράλληλα επίπεδα και $\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2$ τα κάθετά τους διανύσματα, τότε τα $\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2$ είναι $\neq \underset{\sim}{0}$ και παράλληλα μεταξύ τους. Επειδή κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα παράλληλο στο $\underset{\sim}{n}_1$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο $\mathcal{P}_1$, έπεται ότι $\underset{\sim}{n}_2 \perp \mathcal{P}_1$, και ομοίως $\underset{\sim}{n}_1 \perp \mathcal{P}_2$. Δηλαδή κάθε κάθετο διάνυσμα σε ένα από τα δύο επίπεδα ενός ζεύγους παραλλήλων επιπέδων είναι μία "κοινή κάθετος" των δύο επιπέδων.

Δείχνουμε τώρα ότι παράλληλα επίπεδα είτε συμπίπτουν ή δεν έχουν κοινά σημεία, ενώ μη-παράλληλα επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία γραμμή.

Θεώρημα 5

Αν $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ είναι παράλληλα επίπεδα, τότε είτε $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ ή $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$. Αν $\mathcal{P}_1 \not\parallel \mathcal{P}_2$, τότε η $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ είναι μια ευθεία.

Απόδειξη

Θέτουμε $\mathcal{P}_1 = \{ \underset{\sim}{P}_1 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} : u,v \in \mathbb{R} \}$ και $\mathcal{P}_2 = \{ \underset{\sim}{P} : (\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}_2) \cdot \underset{\sim}{n} = 0 \}$ και τότε βλέπουμε ότι ένα σημείο $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b}$ του $\mathcal{P}_1$ ανήκει στο $\mathcal{P}_2$ αν και μόνο αν

$$(\underset{\sim}{P}_1 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{P}_2) \cdot n = 0$$

ή

$$(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n})u + (\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{n})v = (\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1) \cdot n. \qquad (3)$$

Αν $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$, τότε $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{n} = 0$ και είτε $\nexists u,v \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιούν την (3) ή κάθε $u,v \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την (3): Αν $(\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1) \cdot \underset{\sim}{n} \neq 0$, τότε $\nexists u,v \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιούν την (3) και $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, ενώ αν $(\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1) \cdot \underset{\sim}{n} = 0$ τότε κάθε $u,v \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την (3) και $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Τότε όμως από το Θεώρημα 4 έπεται ότι $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ καθώς τρία μη-συνευθειακά σημεία ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο.

Αν $\mathcal{P}_1 \not\parallel \mathcal{P}_2$, τότε είτε $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n} \neq 0$ ή $\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{n} \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n} \neq 0$. Λύνοντας την (3) ως προς u ως συνάρτηση του v έχουμε ότι γιά κάθε (σταθερό αλλά αυθαίρετο) $v \in \mathbb{R}$,

$$u = \frac{(\underset{\sim}{P}_2 - \underset{\sim}{P}_1) \cdot \underset{\sim}{n} - (\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{n})v}{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n}}, \qquad (4)$$

δηλ. ένα σημείο $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ αν και μόνο αν το u ικανοποιεί την (4). Δηλ. η τομή $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \left\{ \underset{\sim}{p}_1 + \frac{(\underset{\sim}{p}_2 - \underset{\sim}{p}_1)\cdot \underset{\sim}{n}}{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{n}}\, \underset{\sim}{a} + \left(\underset{\sim}{b} - \frac{\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{n}}{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{n}}\, \underset{\sim}{a} \right) v : v \in \mathbb{R} \right\},$$

το οποίο παριστάνει ευθεία, αφού το ότι $\underset{\sim}{a} \not\parallel \underset{\sim}{b}$ συνεπάγεται ότι $\underset{\sim}{b} - \frac{\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{n}}{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{n}}\, \underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}$. $\boxtimes$

Το Θεώρημα αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε την <u>γωνία μεταξύ δύο επιπέδων</u> ως την γωνία που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα σε αυτά.

Τέλος εξετάζουμε το πρόβλημα καθορισμού της τομής ευθείας - επιπέδου. Γι'αυτό τον σκοπό χρειάζομαστε:

<u>Ορισμός</u>

Μία ευθεία $\mathcal{L}$ είναι <u>παράλληλη</u> στο επίπεδο $\mathcal{P}$ αν η $\mathcal{L}$ είναι κάθετη σε μία κάθετο του $\mathcal{P}$.

Έτσι έχουμε:

<u>Θεώρημα 6</u>

Αν η ευθεία $\mathcal{L}$ είναι παράλληλη στο επίπεδο $\mathcal{P}$, τότε είτε $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ ή $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \phi$. Αν $\mathcal{L} \not\parallel \mathcal{P}$, τότε η $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$ περιέχει ένα μοναδικό σημείο.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $\mathcal{L} = \{ \underset{\sim}{p}_1 + t\underset{\sim}{a} : t \in \mathbb{R} \}$ και $\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{p} : \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{n} = d \}$ και τότε έχουμε ότι ένα σημείο $\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{p}_1 + t\underset{\sim}{a} \in \mathcal{L}$ ανήκει στο $\mathcal{P}$ <u>ανν</u>

$$(\underset{\sim}{p}_1 + t\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{n} = d,$$

ή

$$(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{n})\, t = d - \underset{\sim}{p}_1 \cdot \underset{\sim}{n}. \tag{5}$$

Αν $\mathcal{L} \parallel \mathcal{P}$, τότε $\underset{\sim}{a} \perp \underset{\sim}{n}$ και άρα $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{n} = 0$. Τότε είτε

$\nexists t$ ή κάθε $t \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την (5) ανάλογα με το αν η διαφορά $d - \underset{\sim}{P}_1 \cdot \underset{\sim}{n}$ είναι διάφορη ή ισούται με μηδέν. Αν $d - \underset{\sim}{P}_1 \cdot \underset{\sim}{n} \neq 0$, τότε $\nexists t \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (5) και άρα $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \phi$. Αν $d - \underset{\sim}{P}_1 \cdot \underset{\sim}{n} = 0$, τότε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την (5) και $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$.

Αν $\mathcal{L} \not\parallel \mathcal{P}$, τότε $\underset{\sim}{a} \not\perp \underset{\sim}{n}$ και $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n} \neq 0$. Εδώ, η (5) έχει <u>μοναδική</u> λύση την

$$t = \frac{d - \underset{\sim}{P}_1 \cdot \underset{\sim}{n}}{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n}}$$

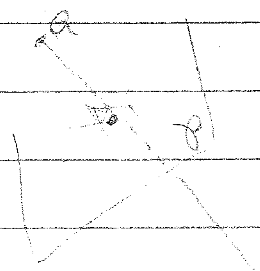
και το (μοναδικό) σημείο τομής είναι το

$$\underset{\sim}{P}_1 + \frac{d - \underset{\sim}{P}_1 \cdot \underset{\sim}{n}}{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{n}} \underset{\sim}{a} . \qquad \boxtimes$$

Τέλος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5 γιά να ορίσουμε την απόσταση σημείου από επίπεδο.

<u>Ορισμός</u>

Η απόσταση ενός σημείου $\underset{\sim}{Q}$ από επίπεδο $\mathcal{P}$, $d(\underset{\sim}{Q}, \mathcal{P})$, είναι η απόσταση από το $\underset{\sim}{Q}$ έως το σημείο τομής του $\mathcal{P}$ με την ευθεία που διέρχεται από το $\underset{\sim}{Q}$ και είναι κάθετη στο $\mathcal{P}$.



6

Βάσεις και η επέκταση στον $\mathbb{R}^n$

Βάσεις

Έχουμε δείξει ότι τα διανύσματα

$$\underset{\sim}{i}=(1,0,0),\ \underset{\sim}{j}=(0,1,0),\ \underset{\sim}{k}=(0,0,1),$$

έχουν την ιδιότητα ότι κάθε $\underset{\sim}{a}\in V_3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδιασμός αυτών των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\underset{\sim}{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\underset{\sim}{i}+a_2\underset{\sim}{j}+a_3\underset{\sim}{k}. \qquad (1)$$

Τα $\underset{\sim}{i},\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{k}$ δεν είναι τα μόνα διανύσματα με αυτήν την ιδιότητα

Θεώρημα

Αν $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}\in V_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε γιά κάθε σημείο $\underset{\sim}{P}\in\mathbb{R}^3$ υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί u,v,t έτσι ώστε

$$\underset{\sim}{P}=u\underset{\sim}{a}+v\underset{\sim}{b}+t\underset{\sim}{c}. \qquad (2)$$

Απόδειξη

Αφού τα $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται (γιατί;) ότι οι αριθμοί u,v,t στην εξ. (2) είναι μοναδικοί, ενώ το ότι αυτοί οι αριθμοί υπάρχουν έπεται από το Θεώρημα 6 της προηγούμενης παραγράφου: Θεωρούμε το επίπεδο $\mathcal{P}=\{u\underset{\sim}{a}+v\underset{\sim}{b}\}$ και την ευθεία $\mathcal{L}=\{\underset{\sim}{P}+t\underset{\sim}{c}\}$. Επειδή τα $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $\mathcal{L}\not\parallel\mathcal{P}$ και άρα αν $\underset{\sim}{P}_1$ είναι το σημείο τομής $\mathcal{L}\cap\mathcal{P}$, υπάρχουν αριθμοί u,v,t_1 τέτοιοι ώστε

$$\underset{\sim}{P}_1=u\underset{\sim}{a}+v\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{P}+t_1\underset{\sim}{c}.$$

Άρα

$$\underset{\sim}{P}=u\underset{\sim}{a}+v\underset{\sim}{b}+t\underset{\sim}{c},\qquad t=-t_1. \quad \boxtimes$$

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\underset{\sim}{a}_1,\dots,\underset{\sim}{a}_k\}$ του V_n ονομάζεται μια **Βάση** του V_n αν

(i) Το $\{\underset{\sim}{a}_1,\dots,\underset{\sim}{a}_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο

(ii) Κάθε διάνυσμα του $\mathbb{V}_n$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων $\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_k$. (Ορολογία εδώ: Το σύνολο $\{\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_k\}$ παράγει (ή καλύπτει) τον $\mathbb{V}_n$ και ο $\mathbb{V}_n$ είναι η κάλυψη του $\{\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_k\}$.)

Προχωρούμε σε τρία σημαντικά πορίσματα των παραπάνω.

Πόρισμα 1

Κάθε σύνολο τριών γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{V}_3$ είναι μία βάση του $\mathbb{V}_3$.

Απόδειξη

Έστω $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{V}_3$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ καλύπτουν τον $\mathbb{V}_n$. Έστω $\underset{\sim}{d} \in \mathbb{V}_3$ ένα τυχόν διάνυσμα. Παίρνουμε ένα σημείο $\underset{\sim}{P} \in \mathbb{R}^3$ ώστε $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{d}$ και από το προηγούμενο θεώρημα βρίσκουμε μοναδικούς αριθμούς u, v, t έτσι ώστε

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{P} = u\underset{\sim}{a} + v\underset{\sim}{b} + t\underset{\sim}{c}.$$ ⊠

Πόρισμα 2 (Κανόνας του Cramer)

Αν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3)$$

τότε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη

Το σύστημα (4) είναι ισοδύναμο με την διανυσματική εξίσωση

$$\underset{\sim}{a}\, x + \underset{\sim}{b}\, y + \underset{\sim}{c}\, z = \underset{\sim}{d} \qquad (5)$$

όπου $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underset{\sim}{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underset{\sim}{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\underset{\sim}{d} = (d_1, d_2, d_3)$

Επειδή

$$[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}] = \underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

έπεται ότι τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Θεώρημα σελίδας 30), και από το Πόρισμα 1 ότι η εξ. (5) έχει λύση.

Αυτή η λύση είναι μοναδική αφού τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πολ/ζοντας την εξ. (5) με τα $\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{c} \times \underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$, παίρνουμε διαδοχικά

$$[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]\, x = [\underset{\sim}{d}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}], \quad [\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]\, y = [\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{d}\, \underset{\sim}{c}] \quad \text{και}$$

$$[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]\, z = [\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{d}],$$

ή,

$$x = \frac{[\underset{\sim}{d}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]}{[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{d}\, \underset{\sim}{c}]}{[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{d}]}{[\underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{b}\, \underset{\sim}{c}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \qquad \boxtimes$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του πορίσματος 2 είναι η εξής:

Θεωρούμε τις εξισώσεις ως εξισώσεις που ορίζουν τρία επίπεδα και ένα σημείο τομής και των τριών επιπέδων αντιστοιχεί σε μία λύση του συστήματος των τριών γραμμικών εξισώσεων. Έτσι έχουμε:

Πόρισμα 3

Τρία επίπεδα των οποίων τα κάθετα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα τέμνονται σε ένα και μοναδικό σημείο.

–Στα φροντιστήρια να γίνουν παραδείγματα με την αναγωγή Jordan.

– Στα φροντιστήρια να καλυφθούν οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Τέλος δίνουμε τον εξής βασικό ορισμό.

Ορισμός

Η σφαίρα $S(\underset{\sim}{c}, a)$ κέντρου στο σημείο $\underset{\sim}{c} = (c_1, c_2, c_3)$ και ακτίνας a είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^3$ των οποίων η απόσταση από το $\underset{\sim}{c}$ είναι a δηλ.,

$$S(\underset{\sim}{c}, a) = \{ \underset{\sim}{P} : |\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{c}| = a \}$$

$$= \{ (x, y, z) : (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2 = a^2 \}. \quad (6)$$

Η εξίσωση

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2 = a^2, \quad (7)$$

ονομάζεται ~~η~~ ή πιο σωστά: μια εξίσωση της σφαίρας $S(\underset{\sim}{c}, a)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z.

Αφού διαβάσετε την επόμενη παράγραφο, γράψτε την εξίσωση (αντίστοιχη της 7) της n-διάστατης σφαίρας.

Η επέκταση στις n-διαστάσεις

Ερχόμαστε τώρα στον ορισμό και τις ιδιότητες του n-διάστατου Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$. Θα δούμε πως όλα όσα είπαμε έως τώρα γενικεύονται σε n-διαστάσεις, $n>3$, έχοντας ως πρότυπό μας τον $\mathbb{R}^3$. Στον $\mathbb{R}^3$ γνωρίζουμε ότι:

(1) Τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα παράγουν όλο το $\mathbb{R}^3$

(2) Δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathbb{V}_3$ ορίζουν ένα επίπεδο, το $\{u\underset{\sim}{a}+v\underset{\sim}{b} : u,v\in\mathbb{R}\}$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αυτό το επίπεδο ονομάζεται ένας 2-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και κάθε σημείο αυτού του υπόχωρου καθορίζεται μονοσήμαντα από δύο παραμέτρους, τις u,v. Κάθε άλλο επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ είναι μία μεταφορά $\{\underset{\sim}{P_0}+u\underset{\sim}{a}+v\underset{\sim}{b} : u,v\in\mathbb{R}\}$, ενός τέτοιου υποχώρου.

(3) Ένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα (δηλ., ένα μη-μηδενικό διάνυσμα!) καθορίζει μία ευθεία, την $\{t\underset{\sim}{a} : t\in\mathbb{R}\}$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μιά τέτοια ευθεία ονομάζεται ένας 1-διάστατος (μονοδιάστατος) υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, και κάθε σημείο αυτού του υποχώρου καθορίζεται μονοσήμαντα από μία παράμετρο, την t. Κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^3$ είναι μία μεταφορά, $\{\underset{\sim}{P_0}+t\underset{\sim}{a} : t\in\mathbb{R}\}$, ενός τέτοιου υπόχωρου.

Στον n-διάστατο χώρο, μπορούμε να θεωρούμε k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\underset{\sim}{a_1},\dots,\underset{\sim}{a_k}$, $k=1,\dots,n$. Ξανά, όταν $k=n$, τα $\underset{\sim}{a_1},\dots,\underset{\sim}{a_n}$ παράγουν όλο το χώρο, ενώ όταν $k<n$, παράγουν έναν k-διάστατο υπόχωρο του n-διάστατου χώρου. Τέτοιοι υπόχωροι $\{t_1\underset{\sim}{a_1}+\dots+t_k\underset{\sim}{a_k} : t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}\}$ και οι μεταφορές τους, δηλ. σύνολα της μορφής

$\{ \underset{\sim}{P}_0 + t_1 \underset{\sim}{a}_1 + \cdots + t_k \underset{\sim}{a}_k : t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \}$ ονομάζονται <u>κ-διάστατα επίπεδα</u> στον n-διάστατο χώρο. Ένα 1-διάστατο επίπεδο συνήθως ονομάζεται μία ευθεία στον $\mathbb{R}^n$. Ο ακριβής ορισμός έπεται.

<u>Ορισμός</u>

Ο η-διάστατος Ευκλείδιος χώρος, συμβολικά $\mathbb{R}^n$, είναι ο η-διάστατος διανυσματικός χώρος $\mathbb{V}_n$ όπου:

(1) Τα στοιχεία $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{V}_n$ είναι τα <u>σημεία</u> του $\mathbb{R}^n$.

(2) Ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$, έστω $\mathcal{P}$, ονομάζεται ένα <u>κ-διάστατο επίπεδο</u> (ή <u>υπερεπίπεδο</u> όταν $k = n-1$, $n \geq 4$) του $\mathbb{R}^n$ αν υπάρχει ένα σημείο $\underset{\sim}{P}_0 \in \mathbb{R}^n$ και κ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_k \in \mathbb{V}_n$, έτσι ώστε

$$\mathcal{P} = \{ \underset{\sim}{P}_0 + t_1 \underset{\sim}{a}_1 + \cdots + t_k \underset{\sim}{a}_k : t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \}.$$

(3) <u>Η απόσταση $d(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{Q})$</u> δύο σημείων $\underset{\sim}{P} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\underset{\sim}{Q} = (y_1, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι το μήκος του διανύσματος $\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{P}$, δηλ.,

$$d(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{Q}) = |\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{P}| = |(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2|^{1/2}. \quad \boxtimes$$

<u>Ορολογία</u>

(*) Ένα 1-διάστατο επίπεδο ονομάζεται μία <u>ευθεία</u>:

$$\mathcal{L} = \{ \underset{\sim}{P}_0 + t\underset{\sim}{a} : t \in \mathbb{R} \}, \quad \underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}.$$

(*) Η εξίσωση

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_0 + t_1 \underset{\sim}{a}_1 + \cdots + t_k \underset{\sim}{a}_k$$

ονομάζεται η <u>διανυσματική εξίσωση</u> του επιπέδου ενώ οι συνιστώσες εξισώσεις ονομάζονται οι <u>παραμετρικές εξισώσεις</u> του επιπέδου

(*) Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την λέξη <u>κ-επίπεδο</u> γιά το κ-διάστατο επίπεδο.

(*) Η διάσταση κ ενός κ-επιπέδου καθορίζεται από τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ανάμεσ σε κάθε δοθείσα συλλογή.

(*) Λέμε ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ είναι <u>παράλληλο στο k-επίπεδο</u> $\mathcal{P}=\{\underset{\sim}{P}_0+t_1\underset{\sim}{a}_1+\cdots+t_k\underset{\sim}{a}_k : t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{R}\}$, αν

$$\underset{\sim}{b}=r_1\underset{\sim}{a}_1+\cdots+r_k\underset{\sim}{a}_k \tag{1}$$

γιά κάποια $r_1,\ldots,r_k\in\mathbb{R}$. Γενικότερα έχουμε:

<u>Ορισμός</u>

Δύο επίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ (προσοχή: οι διαστάσεις τους <u>δεν</u> είναι απαραίτητα ίσες)

$$\mathcal{P}_1=\{\underset{\sim}{P}_1+s_1\underset{\sim}{a}_1+\cdots+s_j\underset{\sim}{a}_j : s_1,\ldots s_j\in\mathbb{R}\}$$

και

$$\mathcal{P}_2=\{\underset{\sim}{P}_2+t_1\underset{\sim}{b}_1+\cdots+t_k\underset{\sim}{b}_k : t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{R}\}$$

όπου $j\le k<n$, <u>είναι παράλληλα</u>, αν κάθε ένα από τα j το πλήθος σύνολα $\{\underset{\sim}{a}_i,\underset{\sim}{b}_1,\ldots,\underset{\sim}{b}_k\}$ $(i=1,\ldots,j)$ $(k+1)$ διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο, δηλ., αν κάθε ένα από τα j το πλήθος διανύσματα $\underset{\sim}{a}_i$ είναι παράλληλο με το επίπεδο $\mathcal{P}_2$.

Το ακόλουθο θεώρημα περιέχει προηγούμενα αποτελέσματα γιά την τομή ευθειών και επιπέδων ως ειδικές περιπτώσεις και μας λέει ότι αν δύο επίπεδα είναι παράλληλα τότε είτε το ένα είναι υποσύνολο του άλλου ή έχουν κενή τομή.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω δύο παράλληλα επίπεδα όπως στον προηγούμενο ορισμό. Τότε είτε $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2$ ή $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\phi$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ τότε $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Κατ' αρχάς επειδή τα $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, το γεγονός ότι τα $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (αφού $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$) συνεπάγεται ότι $\exists$ αριθμοί λ_{im} έτσι ώστε

$$\mathbf{a}_i = \sum_{m=1}^{k} \lambda_{im} \mathbf{b}_m, \quad i = 1, \dots, j. \qquad (2)$$

Επιπλέον έστω ένα σημείο $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ (ένα τέτοιο υπάρχει εξ' υποθέσεως). Τότε $\exists$ αριθμοί $s_1', \dots, s_j', t_1', \dots, t_k'$ ώστε

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 + s_1' \mathbf{a}_1 + \dots + s_j' \mathbf{a}_j = \mathbf{P}_2 + t_1' \mathbf{b}_1 + \dots + t_k' \mathbf{b}_k$$

και άρα

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 + t_1' \mathbf{b}_1 + \dots + t_k' \mathbf{b}_k - s_1' \mathbf{a}_1 - \dots - s_j' \mathbf{a}_j$$

$$\overset{(2)}{=} \mathbf{P}_2 + t_1' \mathbf{b}_1 + \dots + t_k' \mathbf{b}_k - s_1' \sum_{m=1}^{k} \lambda_{1m} \mathbf{b}_m - \dots - s_j' \sum_{m=1}^{k} \lambda_{jm} \mathbf{b}_m$$

δηλαδή

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 + \left(t_1' - \sum_{i=1}^{j} s_i' \lambda_{i1} \right) \mathbf{b}_1 + \dots + \left(t_k' - \sum_{i=1}^{j} s_i' \lambda_{ik} \right) \mathbf{b}_k \qquad (3)$$

και άρα $\mathbf{P}_1 \in \mathcal{P}_2$. Έστω τώρα ένα σημείο $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_1$. Τότε για κάποια $s_1, \dots, s_j \in \mathbb{R}$, έχουμε μέσω των σχ. (2), (3)

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + s_1 \mathbf{a}_1 + \dots + s_j \mathbf{a}_j$$

$$= \mathbf{P}_1 + s_1 \sum_{m=1}^{k} \lambda_{1m} \mathbf{b}_m + \dots + s_j \sum_{m=1}^{k} \lambda_{jm} \mathbf{b}_m$$

$$= \mathbf{P}_2 + \left[t_1' + \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_i') \lambda_{i1} \right] \mathbf{b}_1 + \dots + \left[t_k' + \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_i') \lambda_{ik} \right] \mathbf{b}_k$$

και άρα $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_2$. $\boxtimes$

Εδώ ολοκληρώνουμε την μελέτη της γεωμετρίας ευθειών και επιπέδων και προχωρούμε στην μελέτη της γεωμετρίας καμπυλών και επιφανειών (διάσταση 1 και 2). Η μελέτη επιφανειών μεγαλυτέρων διαστάσεων του 2, αποτελεί το αντικείμενο της

διαφορικής γεωμετρίας και ξεφεύγει από τους σκοπούς μας εδώ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Σε αυτήν την παράγραφο, εισάγουμε σαφείς ορισμούς για κάποιες από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της θεωρητικής φυσικής, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες παραγράφους.

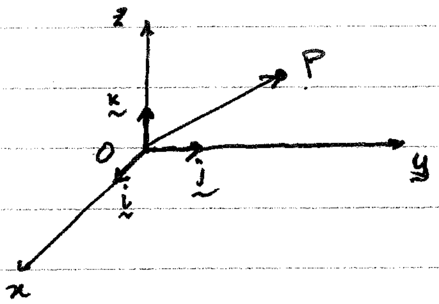
Πιό συγκεκριμένα, θα μοντελοποιήσουμε τις εξής έννοιες:

- (Φυσικός) χώρος
- Χρόνος
- Χωροχρόνος
- Σύστημα αναφοράς
- Χώρος καταστάσεων, βαθμός ελευθερίας.

Ως <u>χώρο</u>, ή φυσικό χώρο, εννοούμε τον χώρο στον οποίο υπάρχουν και εξελίσσονται τα διάφορα φυσικά συστήματα, και διαδραματίζονται τα διάφορα φυσικά φαινόμενα. Στο εξής, τον ρόλο του φυσικού χώρου για εμάς θα παίζει ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$, όπως τον μελετήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο:

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R} \}.$$

Θυμίζουμε ότι ο $\mathbb{R}^3$ είναι ένας γραμμικός χώρος, η συνήθης βάση του είναι η τριάδα των διανυσμάτων $(\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k})$. Ενώ κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ θα το ονομάζουμε ένα *υλικό σημείο*. Πολλές φορές θα εξετάζουμε ένα σύνολο, ή *σύστημα, υλικών σημείων*. Συνήθως, ένα υλικό σημείο ταυτοποιείται με το τελικό σημείο του ακτινικού διανύσματος $\overrightarrow{OP}$, με αρχή το σημείο O των τριών ορθογωνίων αξόνων του χώρου.



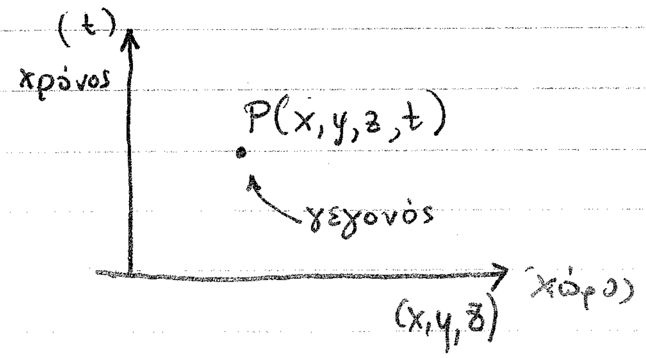
Ο *χρόνος* είναι μονοδιάστατος και συμβολίζεται με το γράμμα t, δηλ., $t \in \mathbb{R}$.

Ένα *γεγονός* είναι κάτι που συμβαίνει σε ένα σημείο του χώρου (x, y, z), την χρονική στιγμή t. Έτσι, ένα γεγονός έχει συντεταγμένες (t, x, y, z).

Ο *Νευτώνειος χωροχρόνος* είναι το καρτεσιανό γινόμενο του χώρου επί τον χρόνο,

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

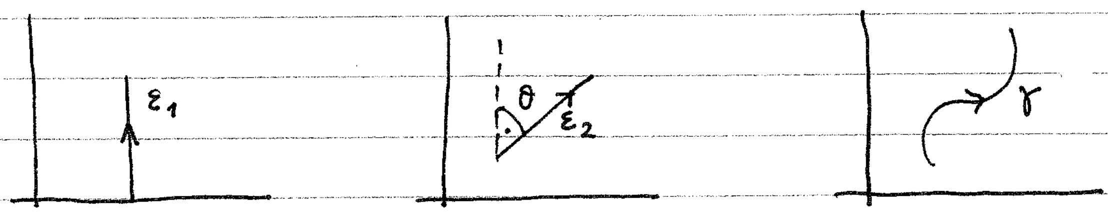
Έτσι, κάθε σημείο του νευτώνειου χωροχρόνου, $P \in \mathcal{N}$, είναι ένα γεγονός, δηλ., ο $\mathcal{N}$ είναι το σύνολο όλων των γεγονότων.



Στο διπλανό σχήμα, εισάγουμε έναν ιδιαίτερα βολικό τρόπο για την εποπτική αναπαράσταση των γεγονότων – το *χωροχρονικό διάγραμμα*.

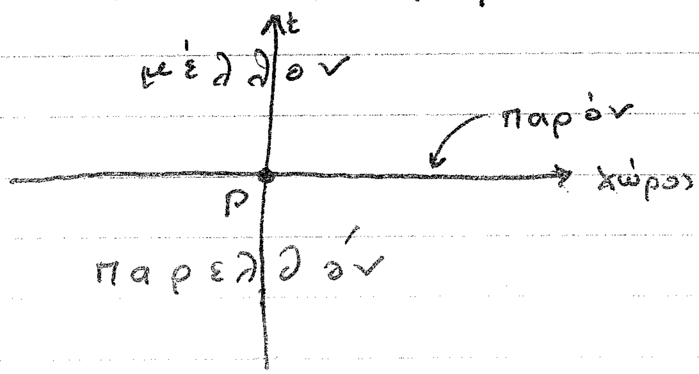
Αυτό είναι μια διδιάστατη αναπαράσταση του νευτώνειου χωροχρόνου στην οποία οι τρεις *χωρικές* διαστάσεις έχουν "καταρρεύσει" σε μια, ενώ έχουμε δύο άξονες, τον οριζόντιο, ή *χωρικό άξονα*, και τον κάθετο, ή *χρονικό άξονα*.

Κάθε σημείο σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα είναι ένα γεγονός, ενώ μια καμπύλη παριστάνει μια *ακολουθία γεγονότων.* Τέτοιες ακολουθίες γεγονότων στον νευτώνειο χωροχρόνο $\mathcal{N}$ θα τις ονομάζουμε *κοσμικές γραμμές* ή *παρατηρητές.* Μια άλλη συνηθισμένη ορολογία για τις κοσμικές γραμμές είναι ότι αποτελούν πιθανές *ιστορίες ενός παρατηρητή.* Στα παρακάτω



σχήματα οι ευθείες ε_1, ε_2 και η καμπύλη γ αποτελούν παραδείγματα κοσμικών γραμμών: Η ε_1 αντιστοιχεί στην ιστορία ενός ακίνητου παρατηρητή, ενώ οι ε_2, γ αντιστοιχούν σε κινούμενους παρατηρητές.

Έστω τώρα ένα γεγονός $P \in \mathcal{N}$ του νευτώνειου χωροχρόνου $\mathcal{N}$. Παρατηρούμε ότι ως προς το γεγονός P ο



νευτώνειος χωροχρόνος $\mathcal{N}$ τριχοτομείται στο "μέλλον" που αντιστοιχεί στον άνω ημιχώρο, στο 'παρελθόν' που αντιστοιχεί στον κάτω ημιχώρο, και στο '<u>παρόν</u>' που αντιστοιχεί στον οριζόντιο άξονα. Αυτήν την τριχοτόμηση του νευτώνειου χωροχρόνου την ονομάζουμε <u>Νευτώνεια αιτιότητα</u>. Παρατηρούμε ότι η διάσταση του μέλλοντος και του παρελθόντος είναι ίση με 4, ενώ του παρόντος είναι ίση με 3. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την έκφραση <u>χώρος ταυτόχρονων γεγονότων</u> αντί γιά την λέξη 'παρόν' για να δηλώσουμε τον τρισδιάστατο χώρο όλων των γεγονότων τα οποίο έχουν την ιδιότητα ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ του είναι ίσο με μηδέν.

<u>Συστήματα αναφοράς</u>

Υπάρχουν άπειρα συστήματα αναφοράς στον νευτώνειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Στην νευτώνεια θεωρία υπάρχει η χαρακτηριστική παραδοχή στην οποία επιλέγουμε μια συγκεκριμένη οικογένεια συστημάτων αναφοράς, τα λεγόμενα αδρανειακά σ.α. Αυτή η οικογένεια περιέχει άπειρα το πλήθος συστήματα αναφοράς που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι "παραμένουν ακίνητα σε σχέση με τους μακρινούς αστέρες".(*)

Η <u>αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου</u>, η βασικότερη ίσως αρχή της νευτώνειας θεωρίας μας δίνει ακριβή περιγραφή τόσο της δομής όσο και της σημασίας της οικογέ-

(*) Στην πραγματικότητα ένα σύστημα αναφοράς προσαρμοσμένο επάνω στην Γη είναι μόνο κατά προσέγγιση αδρανειακό. Συστήματα αναφοράς προσαρμοσμένα στον Ήλιο ή στους αστέρες είναι αδρανειακά με μεγαλύτερη ακρίβεια.

νειας των αδρανειακών συστημάτων. Έχει δύο σκέλη:

- Δομή των αδρανειακών συστημάτων: Όλα τα σ.α. τα οποία βρίσκονται σε ευθύγραμμη & ομαλή κίνηση σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι τα ίδια αδρανειακά.

- Σημασία των αδρανειακών συστημάτων: Όλοι οι νόμοι της φυσικής κάθε χρονική στιγμή έχουν την ίδια μορφή όταν εκφραστούν σε οποιοδήποτε από τα (άπειρα το πλήθος) αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Τα σ.α. <u>δεν</u> έχουν υλική υπόσταση. Οποιαδήποτε επιλογή κάποιου υποσυνόλου από το σύνολο όλων των σ.α. σχετίζεται με τις ιδιότητες του χώρου & του χρόνου αλλά είναι κατ'ανάγκη ανεξάρτητη από την ύπαρξη και την κίνηση της ύλης μέσα στον χώρο και τον χρόνο. Αυτό το συμπέρασμα κωδικοποιείται λέγοντας ότι: Στην Νευτώνεια θεωρία ο χώρος είναι <u>απόλυτος</u> δηλ., ανεξάρτητος από οτιδήποτε υλικό και εξωτερικό, ομοίως και ο χρόνος. (*)

<u>Χώρος καταστάσεων.</u>

Πολλές φορές ο φυσικός χώρος $\mathbb{R}^3$ στον οποίο 'υπάρχει & κινείται' ένα φυσικό σύστημα, <u>δεν</u> είναι ο πλέον κατάλληλος χώρος για να περιγράψουμε πλήρως το σύστημά μας.

(*) Αυτό το βασικό συμπέρασμα της νευτώνειας θεωρίας ξεπερνιέται στην θεωρία της σχετικότητας μέσω της γενικευσης της αρχής του Γαλιλαίου γιά όλα τα συστήματα αναφοράς.

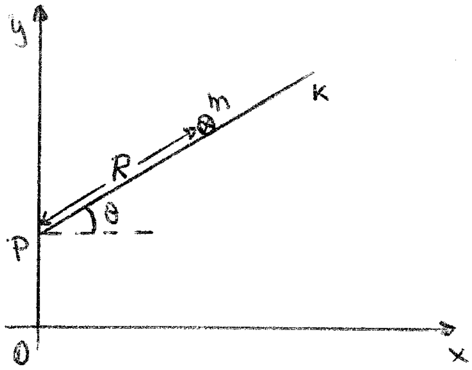
Π.χ., για να καθορίσουμε την θέση ενός υλικού σημείου το οποίο κινείται ελεύθερα (δηλ., χωρίς να ασκείται επάνω του καμία δύναμη) στον $\mathbb{R}^3$, χρειαζόμαστε τρεις συντεταγμένες, αλλά χρειαζόμαστε μόνο δύο συντεταγμένες αν η κίνηση του ίδιου αυτού συστήματος περιοριστεί σε ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, και μόνο μία συντεταγμένη αν η κίνησή του περιοριστεί σε μία μόνο διάσταση, π.χ., αν κινείται σε κάποια κυκλική τροχιά στον $\mathbb{R}^3$.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός ανεξάρτητων συντεταγμένων που χρειάζονται για να καθοριστεί πλήρως η θέση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή, και όχι η διάσταση του "περιβάλλοντα" χώρου στον οποίο κινείται το σύστημα.

Χώρος καταστάσεων ενός φυσικού συστήματος ονομάζεται ο χώρος ο οποίος έχει τόσες συντεταγμένες όσο είναι το ελάχιστο πλήθος των ανεξάρτητων συντεταγμένων που απαιτούνται για τον πλήρη καθορισμό της θέσης του συστήματος. Την διάσταση του χώρου καταστάσεων δηλ., τις ανεξάρτητες συντεταγμένες που απαιτούνται τις ονομάζουμε βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

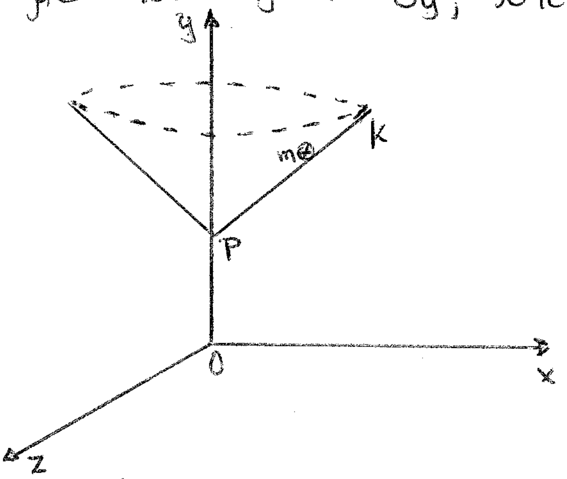
Ας δώσουμε κάποια παραδείγματα φυσικών/μηχανικών συστημάτων και τους χώρους καταστάσεων & βαθμούς ελευθερίας των συστημάτων τα οποία υπάρχουν στον φυσικό χώρο $\mathbb{R}^3$.

i) Έστω ο πλάγιος άξονας P_K που σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντα. Πάνω σ' αυτόν τον άξονα ολισθαίνει



υλικό σημείο μάζας m. Τότε, το υλικό σημείο m, κατά την εν λόγω κίνηση αποτελεί ένα Σ.1.Β.Ε, καθώς η θέση του κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται πλήρως από την απόστασή του R από το σταθερό σημείο P.

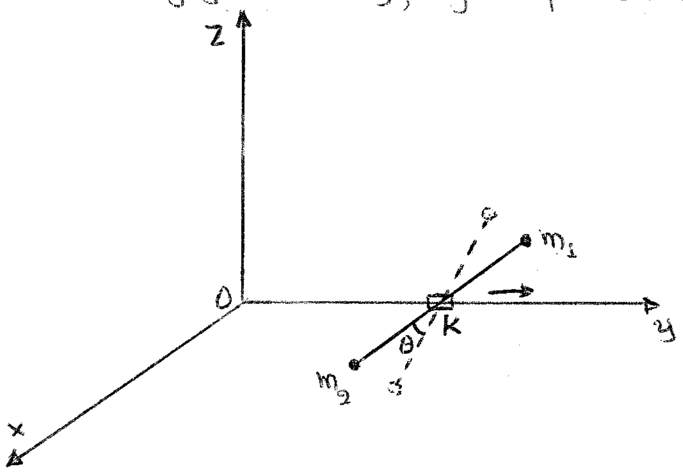
(ii) Αν στο προηγούμενο παράδειγμα, ο άξονας P_K περιστρέφεται, όπως φαίνεται στο σχήμα, διατηρώντας σταθερή γωνία με τον άξονα Oy, τότε το σημείο m



κατά την ολίσθησή του, θα αποτελεί ένα Σ.2.Β.Ε. καθώς η κίνησή του θα περιορίζεται στην επιφάνεια ενός κώνου. Κάθε στιγμή η θέση του, σ' αυτή την περίπτωση, καθορίζεται πλήρως από δύο μεταβλητές: την απόσταση R του υλικού σημείου από το σημείο P και τη γωνία, που σχηματίζει ο άξονας P_K με το επίπεδο Oxy.

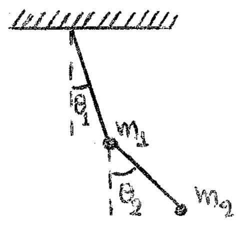
(iii) Ένα ελεύθερο υλικό σημείο στον $\mathbb{R}^3$, αποτελεί ένα Σ.3.Β.Ε., αφού η θέση του κάθε στιγμή καθορίζεται πλήρως από τρεις παραμέτρους: τις x, y, z.

(iv) Έστω μία τραμπάλα με δύο μάζες m_1, m_2, η οποία κινείται κατά μήκος του άξονα Oy και ταυτοχρόνως ταλαντεύεται γύρω από το σημείο K, σε επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο xOy, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε



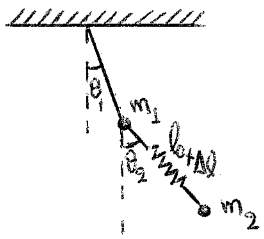
έχουμε ένα Σ.2.Β.Ε, αφού η θέση της τραμπάλας καθορίζεται πλήρως από τη συντεταγμένη y του σημείου K και τη γωνία θ που σχηματίζει ο άξονάς της με τον άξονα Ox.

(v) Το διπλό εκκρεμές είναι ένα σύστημα δύο μαζών m_1,



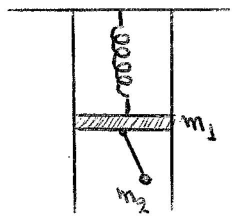
m_2, τα οποία είναι δεμένα με δύο νήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα. και ταλαντεύονται στο επίπεδο. Το εκκρεμές αυτό είναι ένα Σ.2.Β.Ε., καθώς η θέση του προσδιορίζεται πλήρως από τις δύο γωνίες θ_1 και θ_2 των νημάτων με την κατακόρυφο.

(vi) Αν στο προηγούμενο παράδειγμα, αντικαταστήσουμε το ένα από τα δύο νήματα με ένα ελατήριο μήκους φυσικού l_0 και σταθεράς K, το σύστημα γίνεται



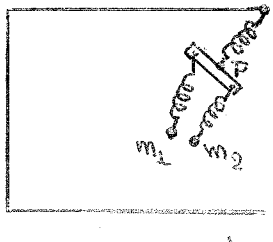
Σ.3.Β.Ε., καθώς για τον προσδιορισμό της θέσης του, εκτός των δύο γωνιών θ_1 και θ_2, απαιτείται και ο προσδιορισμός της επιμήκυνσης Δl του ελατηρίου.

(vii) Έστω το σύστημα του σχήματος.



Η m_1 κινείται μόνο στον κατακόρυφο άξονα και η m_2 κινείται ελεύθερα στο χώρο. Αυτό είναι ένα Σ.4.Β.Ε., αφού χρειαζόμαστε 3 συντεταγμένες για την m_2 και 1 συντεταγμένη για την m_1.

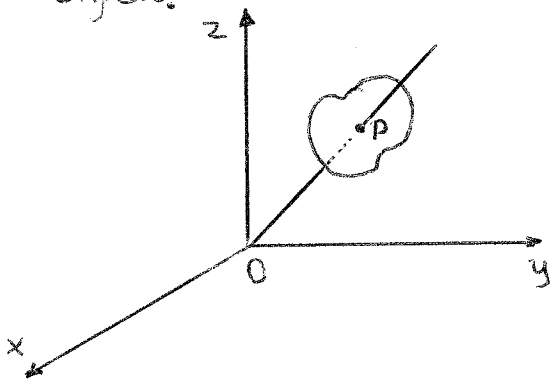
(viii) Έστω το σύστημα του σχήματος, που κινείται ελεύθερα στο χώρο.



Χρειαζόμαστε: 3 συντεταγμένες για το P.
2 συντεταγμένες για τα άκρα στηριγμάτων των ελατηρίων
3 συντεταγμένες για την m_2.
2 συντεταγμένες για την m_1.

Άρα Σ.10.Β.Ε.

(εχ) Έστω ένα στερεό σώμα που έχει ένα σταθερό σημείο P, αλλά μπορεί να κινηθεί στο χώρο, γύρω από αυτό το σημείο.



Αν θεωρήσουμε το P ως αρχή των αξόνων, αρκεί να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο ακόμη σημείων (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2), δηλαδή έξη συντεταγμένων. Επειδή όμως το σώμα είναι στερεό, ισχύουν,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = C_1 ,$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = C_2 ,$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = C_3 .$$

Έτσι, πέφτουμε κατά 3 συντεταγμένες και έχουμε ένα Σ.3.Β.Ε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΚΑΜΠΥΛΕΣ & ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

7

Όρια και συνέχεια καμπυλών

Συναρτήσεις διανυσματικών τιμών

Θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται διανυσματικές συναρτήσεις μιάς πραγματικής μεταβλητής και εμφανίζονται πολύ συχνά. Π.χ., έστω μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το σημείο $\underset{\sim}{P_0}$ παράλληλη στο $\underset{\sim}{a}$ δηλ., το σύνολο $\{\underset{\sim}{P_0} + t\underset{\sim}{a} : t \in \mathbb{R}\}$. Εδώ σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το σημείο $\underset{\sim}{P_0} + t\underset{\sim}{a}$ του $\mathbb{R}^3$ και αν αυτήν την συνάρτηση την συμβολίσουμε με $\underset{\sim}{f}$ τότε ο τύπος της $\underset{\sim}{f}$ είναι:

$$\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{P_0} + t\underset{\sim}{a} = (x_0 + ta_1, y_0 + ta_2, z_0 + ta_3)$$

όπου $\underset{\sim}{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ και $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Εδώ $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσουμε τον διανυσματικό λογισμό δηλ. τις θεωρίες γιά το όριο, την συνέχεια, την παράγωγο και το διαφορικό, και τέλος την ολοκλήρωση τέτοιων συναρτήσεων $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Γενικά, αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι δύο σύνολα, μιά συνάρτηση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι μια αντιστοιχία με την οποία σε κάθε σημείο του $\mathcal{A}$ αντιστοιχίζεται ένα και μοναδικό σημείο του συνόλου $\mathcal{B}$. Σε προηγούμενα μαθήματα (π.χ., "Μαθ. Λογισμός") ασχοληθήκαμε με πραγματικές συναρτήσεις ($\mathcal{B} = \mathbb{R}$) μιάς πραγματικής μεταβλητής ($\mathcal{A} = \mathbb{R}$). Εν τούτοις, ο βασικός ορισμός της έννοιας της συνάρτησης που μόλις αναφέραμε δεν περιορίζει τον χαρακτήρα των συνόλων $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε την ανάλυση συναρτήσεων όπου $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ και $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$. Δηλαδή το πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$, συμβολικά $\mathcal{D}_f$, της $\underset{\sim}{f}$ είναι η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ και το <u>πεδίο τιμών</u> $\mathcal{R}$, συμβολικά $\mathcal{R}_f$, της f είναι ο χώρος $\mathbb{R}^n$. Μιά <u>συνάρτηση διανυσματικών τιμών μιάς πραγματικής μεταβλητής</u>, $\underset{\sim}{f}$, είναι μια συνάρτηση όπου $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ και $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}^n$ και έτσι

$$\underset{\sim}{f} : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \to \mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

Π.χ., η συνάρτηση

$$\underset{\sim}{f}(t) = (1,3,2) + t(1,1,2)$$

ή

$$\underset{\sim}{f}(t) = (1+t,\ 3+t,\ 2+2t), \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

είναι μιά τέτοια συνάρτηση και εδώ το $\mathcal{R}_f$ είναι μία ευθεία στον $\mathbb{R}^3$. Αντιστοιχίζουμε μέσω της $\underset{\sim}{f}$ σημεία της ευθείας $\mathbb{R}$ σε σημεία της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1,3,2)$ και είναι παράλληλη στο $(1,1,2)$. Το σημείο 0 αντιστοιχίζεται στο $\underset{\sim}{f}(0) = (1,3,2)$, ενώ το -1 στο $\underset{\sim}{f}(-1) = (0,2,0)$ κ.λπ.. Η $\underset{\sim}{f}(t)$ έχει τρεις συνιστώσες: $\underset{\sim}{f}(t) = \big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$ όπου $f_1(t) = 1+t$, $f_2(t) = 3+t$, $f_3(t) = 2+2t$. Οι $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ ονομάζονται οι <u>συνιστώσες συναρτήσεις</u> της $\underset{\sim}{f}$ και είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Θέτοντας I την ταυτοτική συνάρτηση, $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto I(x) = x$, έχουμε

$$\underset{\sim}{f} = (f_1, f_2, f_3) = (1+I,\ 3+I,\ 2+2I),$$

και $f_1 = 1+I$, $f_2 = 3+I$, $f_3 = 2+2I$, ως απεικονίσεις.

Γενικά $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}^n$ και γράφουμε

$$\underset{\sim}{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (2)$$

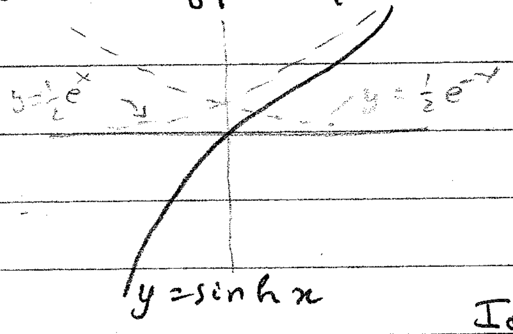
όπου $f_i(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ είναι η i-οστη συνιστώσα (συνάρτηση) της $\underset{\sim}{f}$. Καθε f_i εχει $\mathcal{D}_{f_i} = \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$. Έτσι βλέπουμε ότι κάθε διαν. συν. μιας πραγμ. μεταβλητής, $\underset{\sim}{f}$, ορίζει η το πλήθος πραγμ. συναρτήσεις μιάς πραγμ. μεταβλητής, τις $f_1, f_2, \ldots, f_n$ καθεμία από τις οποίες έχει $\mathcal{D}_{f_i} = \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$. Θα δούμε ότι αυτή η αναπαράσταση της $\underset{\sim}{f}$ μέσω των f_i, με την εξ. (2), μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε στις συναρτήσεις διανυσματικών τιμών τις τεχνικές που αναπτύξαμε στην ανάλυση συναρτήσεων πραγματικών τιμών ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

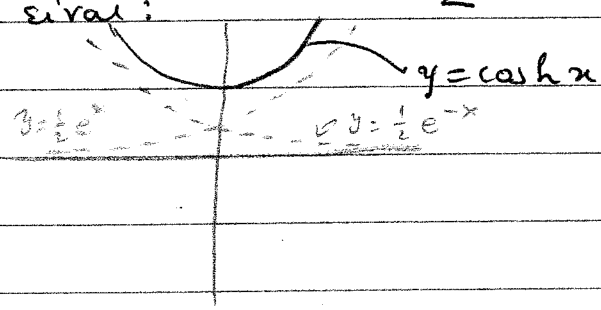
Παράδειγμα

Αν $\underset{\sim}{f} = (a\cosh, b\sinh)$, όπου $a, b > 0$ δείξτε ότι το $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ είναι ένας κλάδος υπερβολής.

Λύση

Ως γνωστόν, $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ και τα γραφήματά τους είναι:





Ισχύει η ταυτότητα: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Τώρα, ένα σημείο (x,y) ανήκει στο $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ αν και μόνο αν $x = a\cosh t$, $y = b\sinh t$ γιά κάποιο $t \in \mathbb{R}$.

Άρα αν $(x,y) \in \mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ τότε

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

και άρα αν $(x,y) \in \mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ τότε το (x,y) βρίσκεται πάνω στην υπερβολή με εξίσωση $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$, και ιδιαίτερα επειδή $x = a\cosh t > 0$, το (x,y) βρίσκεται στον δεξιό κλάδο της υπερβολής, έστω $\mathcal{K}\ell$. Τώρα αν $(x,y) \in \mathcal{K}\ell$,

Αντιστρόφως,

υπάρχει t τέτοιο ώστε $y=b\sinh t$ και άρα μέσω της εξ-
σωσης για το $\mathcal{H}$, βρίσκουμε

$$\frac{x^2}{a^2} = 1+\sinh^2 t = \cosh^2 t \quad , \quad x>0$$

δηλ., $x=a\cosh t$. Άρα αποδείξαμε ότι αν το $(x,y)\in\mathcal{H}$,
τότε $(x,y)\in \mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$. Έτσι $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}=\mathcal{H}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Σχεδιάστε το γράφημα της $\underset{\sim}{f}$ όπου:

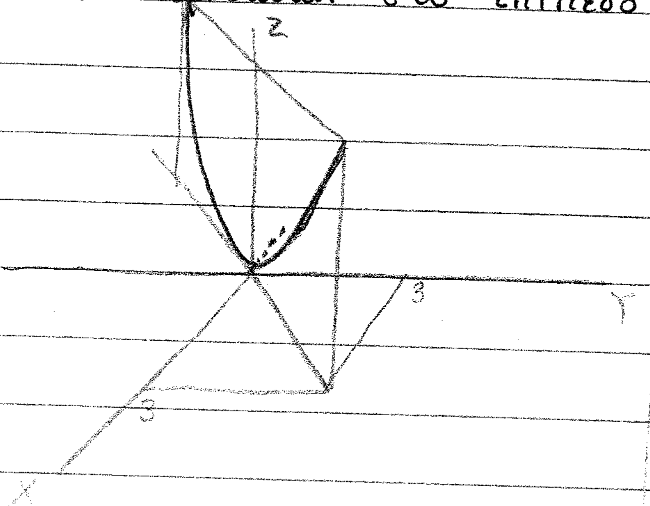
$$\underset{\sim}{f}(t)=\left(t,t,2t^2\right) \quad , \quad \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}=[-3,3].$$

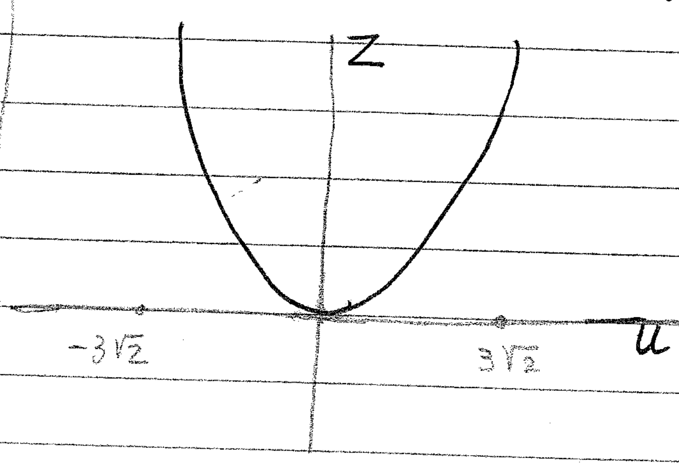
<u>Απόδειξη</u>. <u>Βήμα 1ο</u>: Το $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ κείνται στο επίπεδο $y=x$.

<u>1ος τρόπος</u>: Το $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}=\left\{\underset{\sim}{f}(t) : \underset{\sim}{f}(t)=\left(t,t,2t^2\right), t\in[-3,3]\right\}$.
Γράφουμε την $\underset{\sim}{f}(t)$ ως εξής:

$$\underset{\sim}{f}(t)= t(1,1,0)+t^2(0,0,2).$$

Τότε βλέπουμε ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{f}(t)$ είναι το άθροισμα
ενός διανύσματος πάνω στην ευθεία $y=x$ στο επίπεδο XY
και ενός διανύσματος καθέτου στο επίπεδο XY. Άρα το $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$
πρέπει να βρίσκεται στο επίπεδο με εξίσωση $y=x$. (βλ. Σχ. 1α).





<u>2ος τρόπος</u>

Γιά κάθε $(x,y,z)\in\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}} \Rightarrow x=t,\ y=t,\ z=2t^2$ και άρα αφού το επίπεδο με εξίσωση $y=x$ είναι το σύνολο όλων των σημείων (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $y=x$, το $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ πρέπει να βρίσκεται πάνω σε αυτό το επίπεδο. (βλ. Σχ. 1a).

<u>Βήμα 2ο</u>

Θέτουμε $u = x \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\, x$ και βλέπουμε ότι το u είναι η "κατευθυνόμενη" απόσταση πάνω στην ευθεία $y=x$ στο επίπεδο XY ($Z=0$) (βλ. Σχ. 1b). Επειδή γιά τα σημεία του γραφήματος της $\underset{\sim}{f}$ έχουμε $z=u^2$ (παραβολή) (δηλαδή $z=x^2$ και $z=y^2$), έπεται άμεσα ότι το $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{f}}$ κείται στο επίπεδο $y=x$ το οποίο περιέχει τον άξονα Z.

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων διανυσματικών τιμών

Ξεκινούμε με μία επανάληψη της έννοιας του ορίου γιά συναρτήσεις πραγματικών τιμών. Έστω μία συνάρτηση

$$f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \to \mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}.$$

Ένα σημείο $a \in \mathcal{D}_f$ ονομάζεται σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_f$ (ή της f) αν κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το a περιέχει ένα σημείο $t \in \mathcal{D}_f$ διαφορετικό του a. Ο αριθμός b ονομάζεται το όριο της f στο a αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε γιά $t \in \mathcal{D}_f$ και $0 < |t-a| < \delta$, έπεται ότι

$$|f(t) - b| < \varepsilon.$$

Γράφουμε:

$$\lim_a f = b \quad \text{ή} \quad \lim_{t \to a} f(t) = b.$$

Αφού τα $|t-a|$ και $|f(t)-b|$ είναι αποστάσεις του t από το a και του $f(t)$ από το b πάνω στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, ο ορισμός $\lim_a f = b$ μας λέει ότι το $f(t)$ είναι αυθαίρετα κοντά στο b γιά όλα τα t αρκούντως κοντά στο a αλλά διαφορετικά από το a. Ανάλογα, θά έχουμε μία έννοια ορίου γιά συναρτήσεις διανυσματικών τιμών, $\lim_a \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ αν το $\underset{\sim}{f}(t)$ είναι αυθαίρετα κοντά στο $\underset{\sim}{b}$ γιά t αρκούντως κοντά στο a αλλά διαφορετικά του a. Αφού στο $\mathbb{R}^n$ η απόσταση του $\underset{\sim}{f}(t)$ από το $\underset{\sim}{b}$ είναι $|\underset{\sim}{f}(t) - \underset{\sim}{b}|$, ο ορισμός του ορίου, $\lim_a \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ είναι:

Ορισμός 1

Το διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ ονομάζεται το όριο της συνάρτησης $\underset{\sim}{f}$ στο a αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε γιά $t \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ και $0 < |t-a| < \delta$, έπεται ότι

$$|\underset{\sim}{f}(t)-\underset{\sim}{b}|<\varepsilon.$$

Γράφουμε :

$$\lim_{a} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b} \quad \text{και} \quad \lim_{t\to a} \underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{b}. \qquad (1)$$

Πάντοτε γιά την έννοια του ορίου παίρνουμε το a να είναι ένα σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$.

Παρατήρηση. Επειδή ο ορισμός του διανυσματικού ορίου $\lim_{t\to a} \underset{\sim}{f}(t)=\underset{\sim}{b}$ είναι ισοδύναμος με το ότι καθώς $t\to a$, το $\underset{\sim}{f}(t)\to \underset{\sim}{b}$, έχουμε ότι είναι τελικά ισοδύναμος με το ότι το πραγματικό (δηλ. όχι διανυσματικό) όριο $\lim_{t\to a} |\underset{\sim}{f}(t)-\underset{\sim}{b}| = 0$.

Επιθυμούμε νά δώσουμε τώρα έναν πιό γεωμετρικό ορισμό της έννοιας του ορίου. Πρώτα χρειαζόμαστε την ακόλουθη απλή γενίκευση της έννοιας της περιοχής ενός σημείου $c \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 2.

Η περιοχή (ή γειτονιά) του $\underset{\sim}{c} \in \mathbb{R}^n$ ακτίνας r είναι το εσωτερικό της n-διάστατης σφαίρας ακτίνας r και κέντρου c, δηλ., αν συμβολίσουμε την περιοχή του c ακτίνας r κέντρου $\underset{\sim}{c}$ με $\mathcal{S}(\underset{\sim}{c};r)$ τότε

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{c};r)=\{\underset{\sim}{x} : |\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{c}|<r\}.$$

Έτσι στο $\mathbb{R}$, μιά περιοχή είναι ένα ανοικτό διάστημα,

$$\mathcal{S}(c;r)=\{x : |x-c|<r\},$$

στο $\mathbb{R}^2$, το εσωτερικό ενός κύκλου (δίσκος), και στο $\mathbb{R}^3$ το εσωτερικό μιάς σφαίρας (μπάλλα). Μιά περιοχή του $\underset{\sim}{c}$ χωρίς το $\underset{\sim}{c}$ ονομάζεται μία διαγραφείσα περιοχή και συμβολίζεται με $\mathcal{S}'(\underset{\sim}{c};r)$.

Ο ορισμός του ορίου μέσω περιοχών διατυπώνεται πιό γεωμετρικά. Έχουμε: $\lim_{a} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b} \Leftrightarrow$ δοθείσης περιοχής $\mathcal{S}(\underset{\sim}{b};\varepsilon)$ ακτίνας ε, υπάρχει μία διαγραμμένη περιοχή $\mathcal{S}(a;\delta)$ του a ακτίνας δ η οποία απεικονίζεται μέσω της $\underset{\sim}{f}$ στην $\mathcal{S}(\underset{\sim}{b};\varepsilon)$, δηλ. $\underset{\sim}{f}\big(\mathcal{S}(a;\delta)\big) \subset \mathcal{S}(\underset{\sim}{b};\varepsilon)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν το $\lim_a \underset{\sim}{f}$ υπάρχει και $\underset{\sim}{f}=(f_1,\dots,f_n)$ τότε $\lim_a \underset{\sim}{f} = (\lim_a f_1, \dots, \lim_a f_n)$. Μέσω αυτού υπολογίζουμε τα όρια συναρτήσεων διανυσματικών τιμών.

Θεώρημα 1.

Έστω $\underset{\sim}{b}=(b_1,\dots,b_n)$, $\underset{\sim}{f}=(f_1,\dots,f_n):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ και a ένα σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$. Τότε $\lim_a \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ αν και μόνο αν $\lim_a f_i = b_i$ γιά $i=1,\dots,n$.

Απόδειξη

Αν $\lim_a \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ τότε $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$:

$$|\underset{\sim}{f}(t)-\underset{\sim}{b}| = \Big[\sum_{i=1}^{n} (f_i(t)-b_i)^2\Big]^{1/2}$$

γιά όλα τα $t\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ και $0<|t-a|<\delta$. Άρα γιά κάθε $i=1,\dots,n$ έχουμε ότι

$$|f_i(t)-b_i|<\varepsilon$$

γιά όλα τα $t\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \equiv \mathcal{D}_{f_i}$ και $0<|t-a|<\delta$. Άρα $\lim_a f_i = b_i$ $(i=1,\dots,n)$.

Αντιστρόφως, αν $\lim_a f_i = b_i$, $i=1,\dots,n$, τότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta_i>0$ τέτοιο ώστε

$$|f_i(t)-b_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

γιά όλα τα $t\in\mathcal{D}_{f_i}$ και $0<|t-a|<\delta_i$. Διαλέγουμε $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ και τότε

$$|\underset{\sim}{f}(t)-\underset{\sim}{b}| = \Big[\sum_{i=1}^{n} (f_i(t)-b_i)^2\Big]^{1/2} < \Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big]^{1/2} = \varepsilon$$

γιά όλα τα $t\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ και $0<|t-a|<\delta$. Δηλ. $\lim_a \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$. $\boxtimes$

Π.χ.,

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\left(t, \sin t, \tan t\right) = \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t,\ \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t,\ \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \tan t\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Επίσης, το Θεώρημα 1 μας επιτρέπει να αποδείξουμε, γιά την περίπτωση συναρτήσεων διανυσματικών τιμών, διάφορα γνωστά θεωρήματα της "Ανάλυσης I" (συναρτήσεις πραγματικών τιμών). Πρώτα χρειαζόμαστε:

__Ορισμός 3__

Αν $\underset{\sim}{f}: \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\underset{\sim}{g}: \mathcal{D}_{\underset{\sim}{g}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}: \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \cap \mathcal{D}_{\underset{\sim}{g}} \to \mathbb{R}^n$ όπου:

$$[\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}](t) = \underset{\sim}{f}(t) + \underset{\sim}{g}(t) \qquad (2)$$

$$[\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{g}](t) = \underset{\sim}{f}(t) - \underset{\sim}{g}(t) \qquad (3)$$

$$[\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}](t) = \underset{\sim}{f}(t)\cdot\underset{\sim}{g}(t) \qquad (:\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \quad (4)$$

$$[\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}](t) = \underset{\sim}{f}(t)\times\underset{\sim}{g}(t) \qquad (\text{μόνο όταν } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3) \quad (5)$$

Επιπλέον γιά μία συνάρτηση $\varphi: \mathcal{D}_\varphi \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε το γινόμενο $\varphi\underset{\sim}{f}$ ως εξής:

$$[\varphi\underset{\sim}{f}](t) = \varphi(t)\underset{\sim}{f}(t) \qquad \mathcal{D}_{\varphi\underset{\sim}{f}} = \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}. \quad (6) \qquad \boxtimes$$

Το όριο αντιμετατίθεται με τις πράξεις (2)–(6). Π.χ., επειδή,

$$\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g} = (f_1+g_1, \ldots, f_n+g_n) \qquad (7)$$

(αποδείξτε το σημειακά για $t \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \cap \mathcal{D}_{\underset{\sim}{g}}$), έχουμε ότι αν το a είναι ένα σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \cap \mathcal{D}_{\underset{\sim}{g}}$ και $\lim_a \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$, $\lim_a \underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{c}$, τότε:

$$\lim_a [\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}] = \lim_a (f_1+g_1, \ldots, f_n+g_n)$$

$$= \left(\lim_a (f_1+g_1), \dots, \lim_a (f_n+g_n) \right)$$

$$= \left(\lim_a f_1 + \lim_a g_1, \dots, \lim_a f_n + \lim_a g_n \right)$$

$$= \left(\lim_a f_1, \dots, \lim_a f_n \right) + \left(\lim_a g_1, \dots, \lim_a g_n \right)$$

$$= \lim_a (f_1, \dots, f_n) + \lim_a (g_1, \dots, g_n) = \lim_a \tilde{f} + \lim_a \tilde{g} \quad (8)$$

(άσκηση)

Ομοίως έχουμε ότι $\lim_a [\tilde{f} - \tilde{g}] = \lim_a \tilde{f} - \lim_a \tilde{g}$ και

$$\lim_a [\tilde{f} \cdot \tilde{g}] = (\lim_a \tilde{f}) \cdot (\lim_a \tilde{g}) = \tilde{b} \cdot \tilde{c} \quad (9)$$

και

$$\lim_a [\tilde{f} \times \tilde{g}] = \lim_a \tilde{f} \times \lim_a \tilde{g} = \tilde{b} \times \tilde{c} \quad (10) \text{ (μόνο στο } \mathbb{R}^3)$$

όταν $\lim_a \tilde{f} = \tilde{b}$, $\lim_a \tilde{g} = \tilde{c}$, ενώ

$$\lim_a [\phi \tilde{f}] = \lim_a \phi \lim_a \tilde{f} = r\tilde{b} \quad (11)$$

για a σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\phi \tilde{f}}$ και $\lim_a \phi(t) = r$.

Παρατήρηση

Οι ιδιότητες του ορίου (8) - (11) μπορούν εναλλακτικά να αποδειχθούν απ' ευθείας από τον ορισμό του ορίου και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (1). (Αποδείξτε το!)

Η επέκταση του ορισμού της συνέχειας από την περίπτωση συναρτήσεων πραγματικών τιμών σε συναρτήσεις διανυσματικών τιμών είναι εύκολη:

Ορισμός 4

Η συνάρτηση $\tilde{f} : \mathcal{D}_{\tilde{f}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής στο σημείο a του $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$ αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\underset{\sim}{f}(t)-\underset{\sim}{f}(a)|<\varepsilon$$

γιά όλα τα $t\in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ και $|t-a|<\delta$.

Παρατήρηση

1) Αν το a δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$, τότε η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο a. Πράγματι, τότε $\exists\, \delta>0$ τέτοιο ώστε το a να είναι το μοναδικό σημείο στο $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}\cap(a-\delta,a+\delta)$ και άρα $\forall \varepsilon>0$ θα ισχύει $|f(t)-f(a)|<\varepsilon$ όταν $t\in\mathcal{D}_f\cap(a-\delta,a+\delta)$.

2) Αν το a είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ τότε ο ορισμός της συνέχειας είναι ισοδύναμος με την πρόταση: "Η συνάρτηση $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο σημείο $a\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ αν
$$\lim_{a}\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}(a)."$$

Από το Θεώρημα 1 παίρνουμε άμεσα

Θεώρημα 2

Αν $\underset{\sim}{f}=(f_1,\dots,f_n)$ και $a\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$, τότε η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο a αν και μόνο αν οι f_i είναι συνεχείς στο a για κάθε $i=1,\dots,n$.

Απόδειξη

Αν το a δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$, η απόδειξη είναι άμεση, ενώ αν είναι ένα σ.σ., τότε από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι $\lim_{a}\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}(a)$ αν και μόνο αν $\lim_{a} f_i=f_i(a)$, $i=1,\dots,n$. ⊠

Το Θεώρημα 2 είναι πολύ χρήσιμο. Π.χ., η συνάρτηση $\underset{\sim}{f}=(I,\cos,\sin)$ είναι συνεχής $\forall t\in\mathbb{R}$ αφού οι I, cos, sin είναι συνεχείς συναρτήσεις γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3

Αν οι $\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{g}$ είναι συνεχείς στο a, τότε οι $\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}$ είναι συνεχείς στο a. Επιπλέον αν η ϕ είναι συνεχής στο a, τότε η $\phi\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο a. $\boxtimes$

Απόδειξη

Π.χ.,
$$\lim_a [\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}] = \lim_a \underset{\sim}{f} + \lim_a \underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{f}(a)+\underset{\sim}{g}(a) = [\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}](a)$$

κ.λ.π. $\boxtimes$

Ορισμός 5

Η συνάρτηση $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο σύνολο $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ αν ο περιορισμός $\underset{\sim}{f}_{\mathcal{S}}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathcal{S}$.

Ο περιορισμός της f, $f_{\mathcal{S}}$, είναι η συνάρτηση με τύπο $\underset{\sim}{f}_{\mathcal{S}}(t) = \underset{\sim}{f}(t)$, $t \in \mathcal{S}$. Αν το $\mathcal{S}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα τότε: "η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος" ενώ αν το $\mathcal{S}$ είναι ένα κλειστό διάστημα τότε ο ορισμός 5 είναι ισοδύναμος με την πρόταση: "Η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο κλειστό $[a,b]$ αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο ανοικτό (a,b) και αν $\lim_{a^+} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}(a)$ και $\lim_{b^-} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}(b)$.

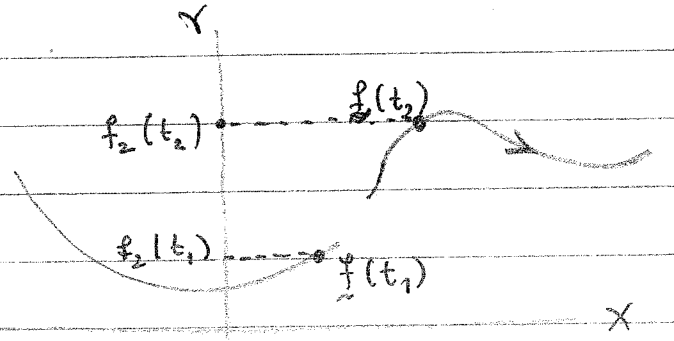
Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της τότε ονομάζεται συνεχής.

Η έννοια της συνέχειας μας επιτρέπει να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό της έννοιας της καμπύλης — π.χ. στον $\mathbb{R}^3$

μιά καμπύλη παριστάνει την τροχιά (κίνηση) ενός σωματίου το οποίο κινείται γιά χρονικό διάστημα $[a,b]$.

Παρατηρήστε ότι αν $g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I τότε θέτοντας $\underset{\sim}{f} = (I, g)$ βλέπουμε ότι το γράφημα της g $\{(t, g(t)) : t \in I\}$ είναι το πεδίο τιμών της $\underset{\sim}{f}$ και άρα μπορούμε να πούμε ότι μια καμπύλη είναι το πεδίο τιμών μιάς $\underset{\sim}{f}$. Εν τούτοις, προβλήματα όπως αυτό με το σωμάτιο που αναφέραμε, εισάγουν την έννοια της καμπύλης με τρόπο ο οποίος δεν καλύπτεται από την έννοια του γραφήματος, αλλά απαιτεί επιπλέον και έννοιες όπως η φορά "χάραξης" κίνησης του σωματίου (π.χ. από αριστερά προς τα δεξιά πάνω στην καμπύλη) και η ταχύτητα με την οποία χαράσσεται η καμπύλη κατά την διάρκεια της κίνησης. Αυτές οι έννοιες απαιτούν όλη την $\underset{\sim}{f}$, όχι μόνο το πεδίο τιμών της.

Ορίζουμε μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ ως μια συνάρτηση $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ και γιά την γεωμετρική ερμηνεία της έχουμε στο μυαλό μας το πεδίο τιμών της $\underset{\sim}{f}$. Τις περισσότερες φορές οι καμπύλες μας αντιστοιχούν σε συνεχείς διανυσματικές συναρτήσεις $\underset{\sim}{f}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (χωρίς κενά στα γραφήματά τους), αφού στην κλασσική μηχανική υποθέτουμε ότι ένα υλικό σημείο δεν αλλάζει την θέση του στιγμιαία: Αν το υλικό σημείο είναι στο σημείο



$\underset{\sim}{P}_0 = \underset{\sim}{f}(t_0)$ την στιγμή t_0 και $\mathcal{S}(\underset{\sim}{P}_0; \varepsilon)$ είναι μία περιοχή του $\underset{\sim}{P}_0$ τότε υπάρχει ένα χρονικό διάστημα $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ κατά την διάρκεια του οποίου το υλικό σημείο παραμένει στην $\mathcal{S}(P_0; \varepsilon)$. Στο Σχήμα, αν $\underset{\sim}{f} = (f_1, f_2)$, με f_i συνεχείς, γνωρίζουμε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ότι οι f_i απεικονίζουν διαστήματα σε διαστήματα. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στο Σχήμα διότι η f_2 δεν απεικονίζει το $[t_1, t_2]$ σε ένα διάστημα (ενώ το υλικό σημείο εμφανίζεται "στιγμιαία" στο $\underset{\sim}{f}(t_2)$ από το $\underset{\sim}{f}(t_1)$).

– Να δοθούν παραδείγματα καμπυλών στο $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

<u>Παράδειγμα</u>

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της καμπύλης C που περιγράφεται από την $\underset{\sim}{f}$, όπου $\underset{\sim}{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ και $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} = [0, 2\pi]$;

<u>Απάντηση</u>

Το πεδίο τιμών της $\underset{\sim}{f}$ είναι ο κύκλος $\{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$. Καθώς το t "προχωρά" από το 0 στο 2π, το σημείο $\underset{\sim}{f}(t)$ χαράσσει την C με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού από το $\underset{\sim}{f}(0) = (1,0)$ στο $\underset{\sim}{f}(2\pi) = (1,0)$.

Εναλλακτικά, η καμπύλη περιγράφεται μέσω των εξισώσεων

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Εδώ η μεταβλητή t ονομάζεται η <u>παράμετρος</u> και οι εξισώσεις (12) <u>οι παραμετρικές εξισώσεις</u> της καμπύλης C.

8-9

Λογισμός καμπυλών I, II

Η παράγωγος και το διαφορικό

Θυμίζουμε ότι η παράγωγος, $f'(t)$, μιάς συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση f' με τύπο

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \qquad (1)$$

και πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς t γιά τους οποίους το όριο (1) υπάρχει. Γιά συναρτήσεις διανυσματικών τιμών $\underset{\sim}{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, ορίζουμε την παράγωγο με τον ίδιο τρόπο.

Ορισμός 1

Η παράγωγος μιάς συνάρτησης $\underset{\sim}{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ είναι η συνάρτηση διανυσματικών τιμών $\underset{\sim}{f}'$ με τύπο

$$\underset{\sim}{f}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\underset{\sim}{f}(t+h)-\underset{\sim}{f}(h)}{h}, \qquad (2)$$

και πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς t γιά τους οποίους το όριο (2) υπάρχει. Αν $t\in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'}$, τότε λέμε ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο t.

Θεώρημα 1

Αν $\underset{\sim}{f}=(f_1,\dots,f_n)$ τότε

$$\underset{\sim}{f}' = (f_1',\dots,f_n') \qquad (3)$$

και $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{f_i'}$.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 1 της προηγούμενης παραγράφου γνωρίζουμε ότι το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{\underset{\sim}{f}(t+h)-\underset{\sim}{f}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h},\dots,\frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h}\right)$$

υπάρχει αν υπάρχουν καθένα από τα $\lim_{h\to 0} [f_i(t+h)-f_i(t)]/h$ $(i=1,\dots,n)$. Αυτό μας λέει ότι $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{f_i'}$. Χρησιμοποιώντας πάλι το Θεώρημα 1, για $t \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'}$ έχουμε

$$\underset{\sim}{f}'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$$

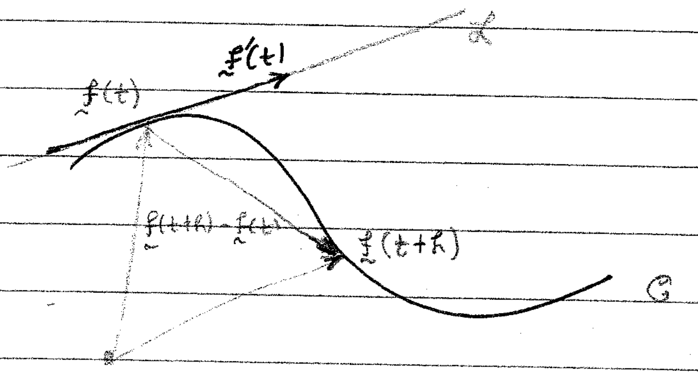
δηλ.

$$\underset{\sim}{f}' = (f_1', \dots, f_n'). \quad \boxtimes$$

Παράδειγμα 1

Αν $\underset{\sim}{f} = (\cos, \sin)$ τότε $\underset{\sim}{f}' = (-\sin, \cos)$. $\boxtimes$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της $\underset{\sim}{f}'$; Έστω C η καμπύλη που περιγράφεται από την $\underset{\sim}{f} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$.



Για $t, t+h \ (h \neq 0) \in \mathcal{J}$, το $\frac{1}{h}[\underset{\sim}{f}(t+h) - \underset{\sim}{f}(t)]$ είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στην χορδή που ενώνει τα σημεία $\underset{\sim}{f}(t)$, $\underset{\sim}{f}(t+h)$. Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο t και $\underset{\sim}{f}'(t) \neq \underset{\sim}{0}$, τότε η διεύθυνση του διανύσματος $\frac{1}{h}[\underset{\sim}{f}(t+h) - \underset{\sim}{f}(t)]$ προσεγγίζει την διεύθυνση του $\underset{\sim}{f}'(t)$ καθώς $h \to 0$ αφού

$$\underset{\sim}{f}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\underset{\sim}{f}(t+h) - \underset{\sim}{f}(t)}{h}.$$

Δηλαδή έχουμε τον εξής φυσιολογικό ορισμό:

Ορισμός 2

Αν C είναι η καμπύλη που ορίζεται από την $\underset{\sim}{f}$ και αν η $\underset{\sim}{f}'(t)$ υπάρχει και είναι διάφορη του μηδενικού διανύσματος, τότε το $\underset{\sim}{f}'(t)$ ονομάζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C στο σημείο $\underset{\sim}{f}(t)$, και η ευθεία

$$\mathcal{L} = \{ \underset{\sim}{f}(t) + t\, \underset{\sim}{f}'(t) : t \in \mathbb{R} \} \qquad (4)$$

ονομάζεται η εφαπτομένη της C στο $\underset{\sim}{f}(t)$.

Παρατήρηση 1

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\underset{\sim}{f}'(t)$ 'δείχνει' προς την κατεύθυνση εκείνη όπου χαράσσεται η C στο $\underset{\sim}{f}(t)$ καθώς το t αυξάνει.

Παρατήρηση 2

Στην περίπτωση όπου η καμπύλη C είναι το γράφημα μιάς $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλ. η C περιγράφεται από την συνάρτηση $\underset{\sim}{f} = (I, g)$, τότε $\underset{\sim}{f}' = (1, g')$ και η εφαπτομένη της C στο σημείο $(x, g(x))$ είναι

$$\mathcal{L} = \{ (x, g(x)) + r\,(1, g'(x)) : r \in \mathbb{R} \}. \qquad (5)$$

Η κλίση αυτής της ευθείας είναι $g'(x)$.

Συμβολισμός 1

Αν η C περιγράφεται από την συνάρτηση $\underset{\sim}{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ τότε $C = \{ \underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(t),\ t \in \mathcal{I} \}$ και λέμε ότι η C περιγράφεται από την παραμετρική εξίσωση

[illegible] bulk space $\to$ $$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(t). \qquad (6)$$ dim [illegible]

Θέτουμε συχνά

$$\frac{d\underset{\sim}{x}}{dt} = \underset{\sim}{f}'(t). \qquad (7)$$

Π.χ., αν $\underset{\sim}{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$, τότε

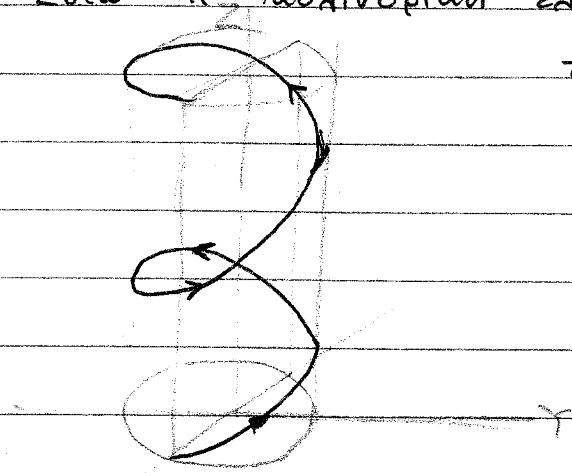
$$\underset{\sim}{x} = (x, y, z) = \underset{\sim}{f}'(t) \qquad (8)$$

και

$$\frac{d\underset{\sim}{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \underset{\sim}{f}'(t). \qquad (9)$$

Παράδειγμα 2.

Έστω η κυλινδρική έλικα C που περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις



$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ζητούμε την εφαπτομένη της C στο σημείο $\left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0,1,\pi/4)$ αντιστοιχεί στο $t = \pi/2$. Η καμπύλη C περιγράφεται από την εξίσωση

$$(x,y,z) = (\cos t, \sin t, t/2) = \underset{\sim}{f}(t).$$

Τότε

$$\underset{\sim}{f}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (-\sin t, \cos t, 1/2)$$

και

$$\underset{\sim}{f}'(\pi/2) = (-1, 0, 1/2).$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της C στο $\left(0,1,\frac{\pi}{4}\right)$ είναι

$$\mathcal{L} = \left\{\left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right) + r\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right) : r \in \mathbb{R}\right\}$$

και παραμετρικές εξισώσεις της $\mathcal{L}$ είναι

$$x = -r$$
$$y = 1$$
$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad \boxtimes$$

-Να γίνουν παραδείγματα γραφημάτων μέσω της $\underset{\sim}{f}'$.

Ορισμός 3

Η $\underset{\sim}{f}$ ονομάζεται <u>παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b)</u> αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του (a,b). Η $\underset{\sim}{f}$ ονομάζεται <u>παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$</u> αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό (a,b) και αν υπάρχουν οι παράγωγοι στα άκρα:

$$\underset{\sim}{f}'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\underset{\sim}{f}(a+h) - \underset{\sim}{f}(a)}{h}$$

και

$$\underset{\sim}{f}'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\underset{\sim}{f}(b+h) - \underset{\sim}{f}(b)}{h}$$

Ως συνέπεια του ορισμού έχουμε:

Θεώρημα 2

Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\mathcal{I}$, τότε η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $\mathcal{I}$.

Συμβολισμός 2

1) Θέτουμε

$$D\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}' \quad \left(\acute{\eta} \quad \underset{\sim}{f} \xrightarrow{D} D\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}'\right) \tag{10}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση D ως ένα <u>τελεστή</u> δηλ., μία συνάρτηση η οποία 'δρα' σε συναρτήσεις (και όχι σε σημεία). Έτσι η παράγωγος $\underset{\sim}{f}'$ μιας συνάρτησης $\underset{\sim}{f}$ δημιουργείται όταν '<u>δράσουμε με τον τελεστή D στην $\underset{\sim}{f}$</u>'.

2) Θέτουμε

$$D_t \equiv \frac{d}{dt} \tag{11}$$

και άρα γράφουμε

$$D_t \underset{\sim}{f}(t) = \frac{d}{dt}\underset{\sim}{f}(t) = \frac{d\underset{\sim}{f}}{dt} = \underset{\sim}{f}'(t). \tag{12}$$

Τα ακόλουθα θεωρήματα και προτάσεις είναι απλές συνέπειες των ορισμών και αφήνονται ως ασκήσεις (στα φροντιστήρια).

Θεώρημα 3

Αν $\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{g}, \phi$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathcal{S}$, τότε οι $\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathcal{S}$ και στο $\mathcal{S}$ ισχύουν οι κανόνες:

(13) $$D(\underset{\sim}{f}\pm\underset{\sim}{g}) = D\underset{\sim}{f} \pm D\underset{\sim}{g}$$

(14) $$D(\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{f}\cdot D\underset{\sim}{g} + D\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}$$

(15) $$D(\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{f}\times D\underset{\sim}{g} + D\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}$$ (με αυτήν τη σειρά λόγω αντιμεταθετικότητας)

(16) $$D(\phi\underset{\sim}{f}) = \phi D\underset{\sim}{f} + (D\phi)\underset{\sim}{f}$$

Πρόταση 1

Αν η $|\underset{\sim}{f}|$ είναι σταθερά τότε $\underset{\sim}{f} \perp \underset{\sim}{f}'$ $\forall t \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'}$.

Απόδειξη

Για $t\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'}$, η $|\underset{\sim}{f}|$ ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\underset{\sim}{f}(t)\cdot\underset{\sim}{f}(t) = |\underset{\sim}{f}(t)|^2 = |\underset{\sim}{f}|^2(t).$$

Άρα αν $|\underset{\sim}{f}| = c$ = σταθερά, έχουμε

$$\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{f} = |\underset{\sim}{f}|^2 = c$$

και παραγωγίζοντας (δηλ., δρώντας με τον τελεστή D)

$$D(\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{f}) = \underset{\sim}{f}\cdot D\underset{\sim}{f} + D\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{f} = 2\underset{\sim}{f}\cdot D\underset{\sim}{f} = 0$$

δηλ., $\forall t\in\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}'}$, $\underset{\sim}{f}(t)\cdot\underset{\sim}{f}'(t) = 0$ ή $\underset{\sim}{f}(t)\perp\underset{\sim}{f}'(t)$. ⊠

Πόρισμα

Η ακτίνα του κύκλου $\mathcal{C}(\underset{\sim}{P}_0; r)$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη $\underset{\sim}{f}'(t)$ στο σημείο όπου καταλήγει αυτή η ακτίνα.

Απόδειξη

Αν $\mathbf{f}$ είναι η διαφορίσιμη συνάρτηση που ορίζει την καμπύλη $C(\mathbf{P}_0; r)$, τότε $\forall t \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$, έχουμε

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{P}_0| = r$$

και άρα από το Πόρισμα προηγουμένως, η $\mathbf{f}(t) - \mathbf{P}_0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα

$$D_t[\mathbf{f}(t) - \mathbf{P}_0] = D_t\,\mathbf{f}(t) - D_t\,\mathbf{P}_0 = \mathbf{f}'(t). \quad \boxtimes$$

Ορισμός

Αν $\phi : \mathcal{D}_\phi \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{f} : \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τότε ορίζουμε <u>την σύνδεση</u> $\mathbf{f} \circ \phi : \mathcal{D}_{\mathbf{f} \circ \phi} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_\phi \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\mathbf{f}\circ\phi"'] & \mathbb{R} \supset \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \arrow[d, "\mathbf{f}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$[\mathbf{f} \circ \phi](t) = \mathbf{f}(\phi(t)) \tag{17}$$

και πεδίο ορισμού

$$\mathcal{D}_{\mathbf{f} \circ \phi} = \{ t \in \mathcal{D}_\phi : \phi(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \}.$$

Παρατηρούμε ότι γιά όλα τα $t \in \mathcal{D}_{\mathbf{f} \circ \phi}$,

$$[\mathbf{f} \circ \phi](t) = \mathbf{f}(\phi(t)) = \big(f_1(\phi(t)), \ldots, f_n(\phi(t))\big)$$
$$= \big((f_1 \circ \phi)(t), \ldots, (f_n \circ \phi)(t)\big)$$

δηλ.,

$$\mathbf{f} \circ \phi = (f_1 \circ \phi, \ldots, f_n \circ \phi). \tag{18}$$

Θεώρημα 4

Αν η ϕ είναι συνεχής στο t_0 και η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\phi(t_0)$, τότε η $\mathbf{f} \circ \phi$ είναι συνεχής στο t_0.

Απόδειξη

Μέσω συνιστωσών και χρήσης του αντίστοιχου Θεωρήματος γιά συναρτήσεις πραγματικών τιμών. $\boxtimes$

Θεώρημα 5 (κανόνας αλυσίδας)

Αν η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\mathcal{I}$ και η $\underset{\sim}{f}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $\mathcal{J} \supset \phi(\mathcal{I}) = \{\phi(t) : t \in \mathcal{I}\}$, τότε η $\underset{\sim}{f} \circ \phi$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{I}$ και:

$$D(\underset{\sim}{f} \circ \phi) = \left[(D\underset{\sim}{f}) \circ \phi\right] D\phi, \quad \text{στο } \mathcal{I}. \qquad (19)$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 1, έχουμε στο $\mathcal{I}$ ότι

$$D(\underset{\sim}{f} \circ \phi) = \left(D(f_1 \circ \phi), \dots, D(f_n \circ \phi)\right).$$

Μέσω του κανόνα αλυσίδας γιά συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουμε, γιά κάθε ένα $i = 1, \dots, n$, ότι

$$D(f_i \circ \phi) = \left[(Df_i) \circ \phi\right] D\phi$$

και άρα

$$D(\underset{\sim}{f} \circ \phi) = \left(\left[(Df_1) \circ \phi\right] D\phi, \dots, \left[(Df_n) \circ \phi\right] D\phi\right)$$

$$= \left((Df_1) \circ \phi, \dots, (Df_n) \circ \phi\right) D\phi$$

$$= \left[D\underset{\sim}{f} \circ \phi\right] D\phi. \qquad \boxtimes$$

Εναλλακτικός τρόπος γραφής της (19):

$$D_t \underset{\sim}{f}(\phi(t)) = \phi'(t)\, \underset{\sim}{f}'(\phi(t)). \qquad (20)$$

Θεώρημα 6 (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχουν $c_i \in (a,b)$ τέτοια ώστε

$$\underset{\sim}{f}(b) - \underset{\sim}{f}(a) = (b-a)\left(f_1'(c_1), \dots, f_n'(c_n)\right). \qquad (21)$$

Απόδειξη

Εφαρμογή του ΘΜΤ γιά κάθε μία f_i, $i = 1, \dots, n$. $\boxtimes$

Παρατήρηση

Μπορούμε από την (21) να συμπεράνουμε ότι

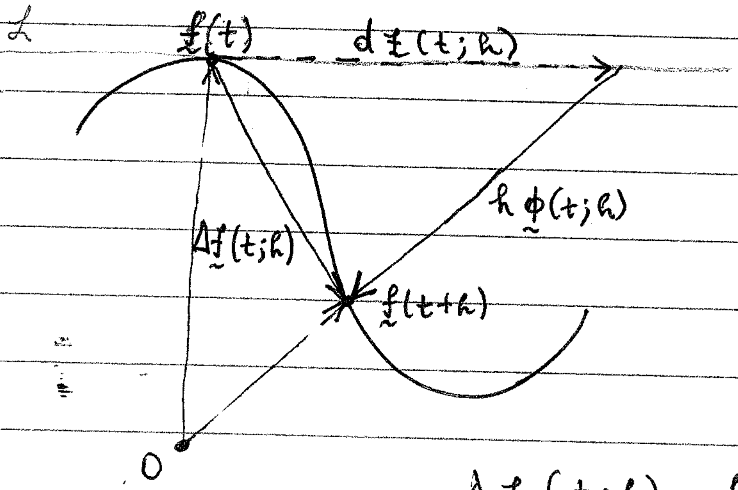
$$\underset{\sim}{f}(b) - \underset{\sim}{f}(a) = (b-a)\,\underset{\sim}{f}'(c), \text{ γιά κάποιο } c\in(a,b);$$

<u>Απάντηση</u>: ΟΧΙ - Θεωρείστε την έλικα C,

$$\underset{\sim}{f}(t) = (\cos t, \sin t, t), \ t\in[0,\pi/2]$$

και αποδείξτε ότι σε κανένα σημείο τη C δεν είναι η $\underset{\sim}{f}'(t)$ παράλληλη στην χορδή από το $\underset{\sim}{f}(0)$ στο $\underset{\sim}{f}(\pi/2)$. ☒

Ερχόμαστε τέλος στην επέκταση της έννοιας του διαφορικού γιά συναρτήσεις διανυσματικών τιμών. Έστω $\underset{\sim}{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ και $t, t+h$ δύο διαφορετικά σημεία του $[a,b]$. Το διάνυσμα



$$\Delta\underset{\sim}{f}(t;h) = \underset{\sim}{f}(t+h) - \underset{\sim}{f}(t) \qquad (22)$$

ονομάζεται η <u>αύξηση της $\underset{\sim}{f}$</u> που αντιστοιχεί στην αύξηση σε t. Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο t, τότε

$$\Delta\underset{\sim}{f}(t;h) = \underset{\sim}{f}(t+h) - \underset{\sim}{f}(t) = h\,\underset{\sim}{f}'(t) + h\,\underset{\sim}{\phi}(t;h) \qquad (23)$$

όπου

$$\underset{\sim}{\phi}(t;h) = \frac{1}{h}\left[\underset{\sim}{f}(t+h) - \underset{\sim}{f}(t)\right] - \underset{\sim}{f}'(t). \qquad (24)$$

Επειδή $\lim_{h\to 0}\underset{\sim}{\phi}(t;h) = 0$, έπεται ότι γιά μικρά h,

$$\Delta f \approx h\,\underset{\sim}{f}'(t)$$

<u>Ορισμός</u>

Το διάνυσμα $h\,\underset{\sim}{f}'(t)$ ονομάζεται το <u>διαφορικό της f στο t</u> που αντιστοιχεί στην αύξηση h του t, συμβολισμός $d\underset{\sim}{f}(t;h)$:

$$d\underset{\sim}{f}(t;h) = h\,\underset{\sim}{f}'(t). \qquad (25)$$

Δηλ. έχουμε

$$\Delta \underset{\sim}{f}(t;h) = d\underset{\sim}{f}(t;h) + h\,\underset{\sim}{\phi}(t;h) \qquad (26)$$

με $\lim_{h\to 0} \underset{\sim}{\phi}(t;h) = 0$. Έτσι <u>γιά μικρά h</u>

$$\Delta \underset{\sim}{f} \simeq d\underset{\sim}{f}, \qquad (27)$$

και

$$\underset{\sim}{f}(t+h) = \underset{\sim}{f}(t) + \Delta \underset{\sim}{f}(t;h) \simeq \underset{\sim}{f}(t) + d\underset{\sim}{f}(t;h). \qquad (28)$$

Έτσι αν C είναι η καμπύλη που περιγράφεται από την απεικόνιση $\underset{\sim}{f}$ στο $[a,b]$, τότε αν $\underset{\sim}{f}'(t) \neq \underset{\sim}{0}$ θα έχουμε ότι το διάνυσμα $d\underset{\sim}{f}(t;h) = h\,\underset{\sim}{f}'(t)$ είναι παράλληλο με το εφαπτόμενο διάνυσμα της C στο σημείο $\underset{\sim}{f}(t)$. Η Εξ. (28) μας λέει ότι <u>κοντά</u> στο $\underset{\sim}{f}(t)$ η εφαπτομένη της C στο $\underset{\sim}{f}(t)$ είναι κοντά στην C.

<u>Συμβολισμός</u>

(1) Θέτουμε:

$$dt = h$$

$$d\underset{\sim}{f} = d\underset{\sim}{f}(t;h).$$

Τότε έχουμε

$$d\underset{\sim}{f} = d\underset{\sim}{f}(t;dt) = \underset{\sim}{f}'(t)\,dt, \qquad (29)$$

απ' όπου προκύπτει και ο γνωστός συμβολισμός

$$\underset{\sim}{f}'(t) = \frac{d\underset{\sim}{f}}{dt}$$

γιά την παράγωγο.

(2) Επιπλέον, αν $\underset{\sim}{f} = (f_1, \ldots, f_n)$,

$$d\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}'(t)\,dt = \left(f_1'(t)\,dt, \ldots, f_n'(t)\,dt\right)$$

δηλαδή

$$d\underset{\sim}{f} = (df_1, \ldots, df_n). \qquad (30)$$

(3) Αν $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \left(f_1(t), \ldots, f_n(t)\right) = \underset{\sim}{f}(t)$, τότε μπορούμε να γράψουμε $d\underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{f}$ και $dx_i = df_i$, και έτσι η Εξ(30) γράφεται:

$$d\underset{\sim}{x} = (dx_1, \ldots, dx_n) \qquad (31)$$

Οι βασικές ιδιότητες του διαφορικού ως προς τις πράξεις που έχουμε ορίσει ως τώρα είναι εύκολες και αφήνονται ως άσκηση

$$d(\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}) = d\underset{\sim}{f} + d\underset{\sim}{g} \qquad (32)$$

$$d(\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{g}) = d\underset{\sim}{f} - d\underset{\sim}{g} \qquad (33)$$

$$d(\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{g} + d\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{g} \qquad (34)$$

$$d(\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{f}\times d\underset{\sim}{g} + d\underset{\sim}{f}\times\underset{\sim}{g} \qquad (35)$$

$$d(\phi\underset{\sim}{f}) = \phi\, d\underset{\sim}{f} + (d\phi)\,\underset{\sim}{f} \qquad (36)$$

$$d(\underset{\sim}{f}\circ\phi) = (\underset{\sim}{f}'\circ\phi)\, d\phi \qquad (37)$$

Όλες ισχύουν κάτω από τις ίδιες συνθήκες που ισχύουν γιά τις αντίστοιχες ιδιότητες του τελεστή παραγώγισης D. Ιδιαίτερα γιά την Εξ. (37), παρατηρούμε ότι θέτοντας

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(t) \quad , \quad t = \phi(u)$$

γράφεται ως: $d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}'(t)\,dt$, αλλά ο συμβολισμός $d\underset{\sim}{x}$ είναι διφορούμενος καθώς, θέτοντας $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(\phi(u)) = g(u)$, με $g = \underset{\sim}{f}\circ\phi$, το $d\underset{\sim}{x}$ ισούται είτε με $\underset{\sim}{f}'(t)\,dt$ ή με $\underset{\sim}{g}'(u)\,du$. Αλλά από την (37) έπεται ότι αυτή η 'ασάφεια' δεν είναι σοβαρή: $\underset{\sim}{g}'(u)\,du = \underset{\sim}{f}'(t)\,dt$. Άλλωστε ακριβώς επειδή υπάρχει αυτή η 'ασάφεια' είναι ο συμβολισμός του διαφορικού πιο βολικός από αυτόν της παραγώγου!

Ολοκλήρωση

Κάθε καμπύλη καθορίζεται αν γνωρίζουμε ένα σημείο της και το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο. Έστω ότι η καμπύλη C περνά από το $\underset{\sim}{x}_0$ και ότι $\forall t \in [a,b]$ το $\underset{\sim}{f}(t)$ παριστάνει το εφαπτόμενο διάνυσμα της C σε κάθε σημείο. Ζητούμε την απεικόνιση $\underset{\sim}{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0 , \quad \text{γιά κάποιο } t_0 \in [a,b]$$

και

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \underset{\sim}{f}(t) \quad , \forall t \in [a,b].$$

Γιά να λύσουμε αυτό το πρόβλημα πρέπει να βρούμε την $\underset{\sim}{x}$ ως λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f} \quad \text{στο } [a,b]$$

με την συνθήκη ότι

$$\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0 .$$

Γιαυτόν το σκοπό χρειαζόμαστε

Ορισμός 1

Αν $\underset{\sim}{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b \underset{\sim}{f}$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_a^b \underset{\sim}{f} = \left(\int_a^b f_1 , \ldots , \int_a^b f_n \right).$$

Συμβολισμός : $\int_a^b \underset{\sim}{f}(t)\,dt$ – εναλλακτικά.

Επειδή το $\int_a^b \underset{\sim}{f}$ υπάρχει όταν τα $\int_a^b f_i$ υπάρχουν, έπεται ότι αν η $\underset{\sim}{f}$ συνεχής στο $[a,b]$ τότε το $\int_a^b \underset{\sim}{f}$ υπάρχει.

Το 1ο ΘΘΛ – f συνεχής στο διάστημα $\mathcal{I}$, $a, t \in \mathcal{I}$, τότε $D_t \int_a^b f = f(t)$ – επεκτείνεται ως εξής:

Θεώρημα 1

Αν η $\underset{\sim}{f} = (f_1, \dots, f_n)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\mathcal{I}$ και $a \in \mathcal{I}$, τότε

$$D_t \int_a^t \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας το 1ο ΘΘΛ στις συνιστώσες συναρτήσεις της $\underset{\sim}{f}$ έχουμε

$$\begin{aligned} D_t \int_a^t \underset{\sim}{f} &= D_t \left(\int_a^t f_1, \dots, \int_a^t f_n \right) \\ &= \left(D_t \int_a^t f_1, \dots, D_t \int_a^t f_n \right) \\ &= (f_1(t), \dots, f_n(t)) \\ &= \underset{\sim}{f}(t). \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Ομοίως, η επέκταση του 2ου ΘΘΛ — αν F' συνεχής στο διάστημα $\mathcal{I}$ και $a, b \in \mathcal{I}$, τότε $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ — είναι:

Θεώρημα 2

Αν η $\underset{\sim}{F} = (F_1, \dots, F_n)$ έχει συνεχείς παραγώγους σε ένα διάστημα $\mathcal{I}$, τότε $\forall a, b \in \mathcal{I}$,

$$\int_a^b \underset{\sim}{F}' = \underset{\sim}{F}(b) - \underset{\sim}{F}(a).$$

Απόδειξη

Άσκηση. $\boxtimes$

Ερχόμαστε τώρα στο πρόβλημα λύσης της ΔΕ $\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}$.

Θεώρημα

Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\mathcal{I}$, αν $t_0 \in \mathcal{I}$ και αν $\underset{\sim}{x}_0$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα, τότε υπάρχει μία και μοναδική λύση στο $\mathcal{I}$ της διαφορικής εξίσωσης

$$\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{f},$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0$. Η λύση είναι

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{f}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Από το Θεώρημα 2 έχουμε, αν $\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}$ και $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0$,

$$\int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{f} = \int_{t_0}^{t} \dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{x}(t) - \underset{\sim}{x}(t_0)$$

και

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{f}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{f}.$$

Από το Θεώρημα 1 έχουμε

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f} \quad \text{στο } \mathcal{I}.$$

Κατά συνέπεια, αν $\mathcal{C}$ είναι μία καμπύλη που διέρχεται από το $\underset{\sim}{x}_0$ την στιγμή t_0 και $\underset{\sim}{f}(t)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της C, τότε αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, η C περιγράφεται από την απεικόνιση $\underset{\sim}{x}$ όπου

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{f}, \quad t \in [a,b]. \quad \boxtimes$$

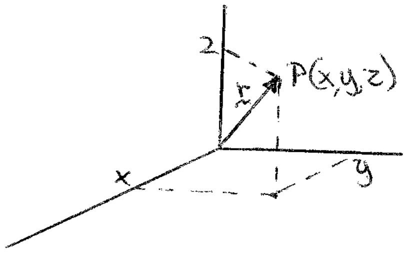
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΚΙΝΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Θέση & απόσταση

Έστω υλικό σημείο P στο χώρο, με συντεταγμένες (x,y,z). Η θέση του P στο χώρο περιγράφεται από:

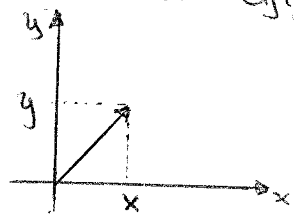


Το διάνυσμα θέσης (ακτινικό διάνυσμα θέσης) που συμβολίζεται $\mathbf{r}$. Έχουμε ότι:

$$\boxed{\mathbf{r} = x\cdot \mathbf{i} + y\cdot \mathbf{j} + z\cdot \mathbf{k} = (x,y,z)} \qquad (1)$$

όπου $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$.

Εάν το P βρίσκεται στο επίπεδο τότε η συντεταγμένη

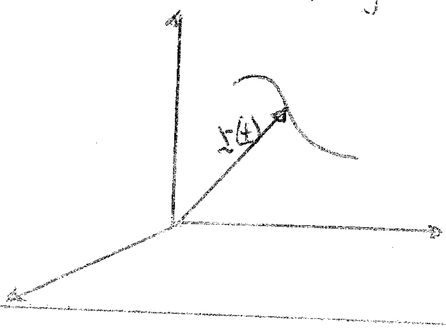


z μηδενίζεται και μπορούμε να γράψουμε,

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = (x,y),$$

όπου $\mathbf{i}=(1,0)$ και $\mathbf{j}=(0,1)$.

Καθώς το P αλλάζει θέση με το χρόνο, το $\mathbf{r}$ ακολουθεί το P και έτσι είναι μια συνάρτηση του χρόνου,

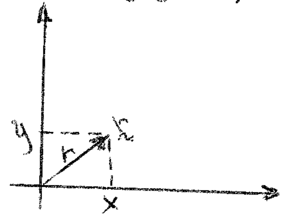


δηλαδή $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(t)$. Αλλιώς

$$\boxed{\underset{\sim}{r}(t) = x(t)\,\underset{\sim}{i} + y(t)\,\underset{\sim}{j} + z(t)\,\underset{\sim}{k} = (x(t), y(t), z(t))} \quad , \quad (2)$$

δηλαδή το $\underset{\sim}{r}$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση του χρόνου.

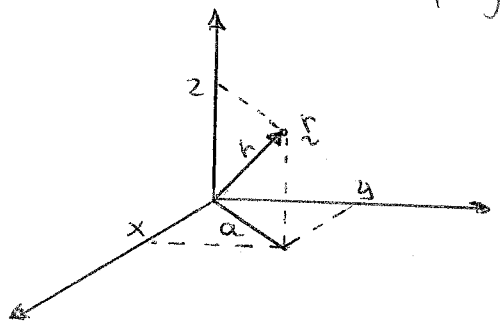
Για κίνηση στο επίπεδο, το μέτρο (r) του $\underset{\sim}{r}(t)$ δίνε



ται από τη σχέση $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$,

όπως προκύπτει άμεσα από το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Για κίνηση στο χώρο, θεωρούμε το παρακάτω σχήμα.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε ότι:

$$\alpha^2 = x^2 + y^2 \quad (*) .$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο των α, r,

$$r^2 = \alpha^2 + z^2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad (3) .$$

Πολλές φορές μας βολεύει να χρησιμοποιούμε άλλα συστήματα συντεταγμένων, όπως θα φανεί από τα επόμενα. Ας θυμηθούμε όμως προηγουμένως για μία καθική έννοια, η οποία ονομάζεται μετρικός τανυστής.

Έστω υλικό σημείο P στο επίπεδο, με συντεταγμένες (x,y). Καθώς το P κινείται, έχουμε ότι $t \to t+h$, το

$$x(t) \to x(t+h) = x(t) + h\,x'(t)$$

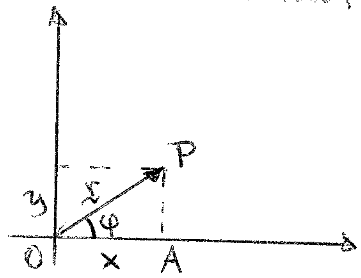
και θέτουμε το διαφορικό

$$dx = h\,x'(t), \text{ ή } dx = dt\,x'(t)$$

Ομοίως για το dy.

Άρα: $d\underline{r} = (dx, dy)$ ή

$$dr^2 = dx^2 + dy^2.$$



Τότε $s^2 = x^2 + y^2$.

Αν θεωρήσουμε τα A και P απείρως κοντά στο O, τότε η σχέση μπορεί να γραφεί με απειροστά, δηλαδή,

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2} \qquad (4).$$

Το ds ονομάζεται <u>γραμμικό στοιχείο</u> και επομένως με την (4) έχουμε εκφράσει το γραμμικό στοιχείο σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Στη συνέχεια θα εκφράσουμε το ds σε πολικές συντεταγμένες r, φ.

Ισχύει ότι,

$x = r\cdot\cos\varphi$ και $y = r\cdot\sin\varphi$,

οπότε διαφορίζοντας λαμβάνουμε,

$dx = dr\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\varphi\, d\varphi$ και $dy = dr\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\, d\varphi$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις, αφού πρώτα τις υψώσουμε στο τετράγωνο και παίρνουμε,

$$ds^2 = dr^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2 - 2r\cdot\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi + dr^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 +$$
$$+ 2r\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2} \qquad (5).$$

Αυτή είναι η σχέση που δίνει το γραμμικό στοιχείο σε πολικές συντεταγμένες.

Στη σχέση (4) οι συντελεστές των dx, dy είναι μονάδες, οπότε μπορούμε να εκφράσουμε το γραμμικό στοιχείο εισάγοντας τον ταυτοτικό πίνακα,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ως εξής:

$$\boxed{ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i \cdot dx^j} \qquad (6) .$$

Έτσι, για $x^1 = x$, $x^2 = y$ και $g_{ij} = diag(1,1)$ έχουμε,

$$ds^2 = g_{11} \cdot dx^2 + g_{12}\, dx\, dy + g_{21}\, dx\, dy + g_{22}\, dy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2$$, δηλαδή τη σχέση (3).

Το g_{ij} ονομάζεται <u>μετρικός τανυστής</u>.

Εάν θέλουμε να εκφράσουμε, το γραμμικό στοιχείο ds σε πολικές συντεταγμένες, με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή και βλέποντας τους συντελεστές των dr^2 και $d\varphi^2$ στην (5) θα πρέπει να θέσουμε στην (6),

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} .$$

Θέτοντας επίσης στην (6) $x^1 = r$ και $x^2 = \varphi$ θα δούμε ότι η (6) συνεπάγεται την (5).

Για κίνηση στο χώρο, στην (6), όπου g_{ij} είναι ένας 3×3 πίνακας. Π.χ. για την επιλογή των καρτεσιανών συντεταγμένων, δηλαδή για,

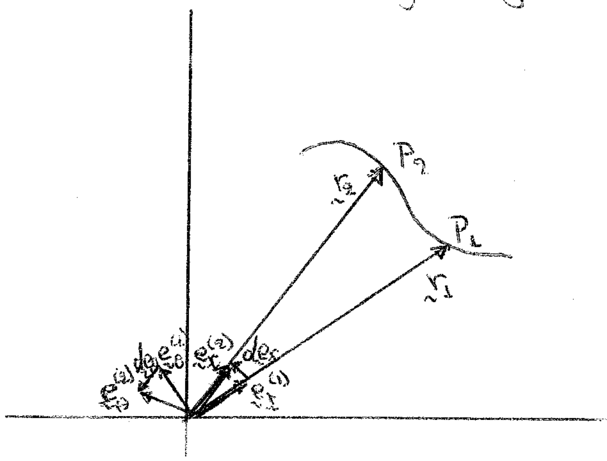
$$x^1 = x, \quad x^2 = y \quad \text{και} \quad x^3 = z \quad , \text{το}$$

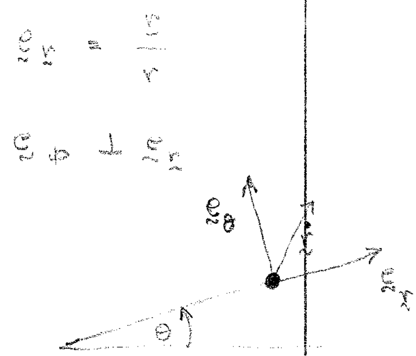
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως, για τον $\mathbb{R}^n$ και άλλες "πολλαπλότητες".

Θα συνεχίσουμε βρίσκοντας το ρυθμό μεταβολής των διανυσμάτων βάσης $\underset{\sim}{e}_r$ και $\underset{\sim}{e}_\theta$ σε πολικές συντεταγμένες, αφού πρώτα τα ορίσουμε.

Θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου στο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.





Ορίζουμε $\underset{\sim}{e}_r$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\underset{\sim}{r}$ και $\underset{\sim}{e}_\theta$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του θ.

Στη θέση (1) η βάση είναι $\underset{\sim}{e}_r^{(1)}$ και $\underset{\sim}{e}_\theta^{(1)}$, ενώ στη θέση (2) η βάση είναι $\underset{\sim}{e}_r^{(2)}$ και $\underset{\sim}{e}_\theta^{(2)}$. Η μεταβολή των διανυσμάτων βάσης είναι προφανώς,

$$d\underset{\sim}{e}_r = \underset{\sim}{e}_r^{(2)} - \underset{\sim}{e}_r^{(1)} \quad \text{και} \quad d\underset{\sim}{e}_\theta = \underset{\sim}{e}_\theta^{(2)} - \underset{\sim}{e}_\theta^{(1)}.$$

Επειδή θεωρούμε απειροστή μετατόπιση είναι,

$$d\underset{\sim}{e}_r \perp \underset{\sim}{e}_r \Rightarrow d\underset{\sim}{e}_r \parallel \underset{\sim}{e}_\theta \Rightarrow d\underset{\sim}{e}_r = d\theta \cdot \underset{\sim}{e}_\theta \quad \text{και}$$

$$d\underset{\sim}{e}_\theta \perp \underset{\sim}{e}_\theta \Rightarrow d\underset{\sim}{e}_\theta \parallel \underset{\sim}{e}_r \Rightarrow d\underset{\sim}{e}_\theta = -d\theta \cdot \underset{\sim}{e}_r.$$

Διαιρώντας με dt έχουμε,

$$\frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \underset{\sim}{e}_\theta \quad \text{και} \quad \frac{d\underset{\sim}{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \underset{\sim}{e}_r \text{ , δηλαδή}$$

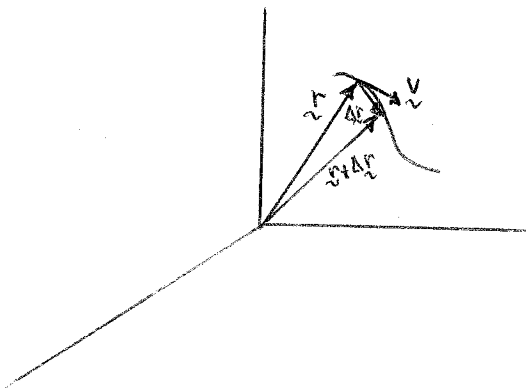
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{e}}_r &= \dot{\theta} \cdot \underset{\sim}{e}_\theta \\ \dot{\underset{\sim}{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \cdot \underset{\sim}{e}_r \end{aligned}} \qquad (7)$$

<u>Ταχύτητα.</u>

Ορίζουμε την ταχύτητα $\underset{\sim}{v}$ του υλικού σημείου ως εξής:

$$\boxed{\underset{\sim}{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underset{\sim}{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underset{\sim}{r}(t+\Delta t) - \underset{\sim}{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}} \qquad (8)$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο σε κάθε



σημείο της τροχιάς $\underset{\sim}{r}(t)$ του υλικού σημείου και είναι μια συνάρτηση του χρόνου, αφού,

$$\boxed{\underset{\sim}{v} = \frac{dx(t)}{dt}\underset{\sim}{i} + \frac{dy(t)}{dt}\underset{\sim}{j} + \frac{dz(t)}{dt}\underset{\sim}{k} = u_x \cdot \underset{\sim}{i} + u_y \underset{\sim}{j} + u_z \underset{\sim}{k}} \qquad (9)$$

με $u_x = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $u_y = \dfrac{dy(t)}{dt}$ και $u_z = \dfrac{dz(t)}{dt}$.

Το μέτρο της ταχύτητας $\underset{\sim}{v}$, το οποίο συμβολίζεται με u, δίνεται από τη σχέση,

$$\boxed{u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}} \qquad (10)$$

δηλαδή $u = \left| \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} \right|$.

Πολλές φορές γράφουμε $u = \frac{ds}{dt}$, όπου $s = s(t)$, είναι το μήκος τόξου της τροχιάς.

Για επίπεδη κίνηση, η ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\underset{\sim}{v} = \dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{r}\,\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta} \qquad (11)$$

όπου $\underset{\sim}{e}_r, \underset{\sim}{e}_\theta$ τα διανύσματα βάσης σε πολικές συντεταγμένες, όπως αυτά έχουν οριστεί.

Η σχέση αυτή ισχύει, αφού $\dot{\underset{\sim}{e}}_r = \dot{\theta}\cdot\underset{\sim}{e}_\theta$ και $\dot{\underset{\sim}{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cdot\underset{\sim}{e}_r$ όπως έχει δειχθεί. Έτσι, ξεκινώντας από τη σχέση,

$$\underset{\sim}{r} = r\cdot\underset{\sim}{e}_r$$

και παραγωγίζοντας ως προς t, λαμβάνουμε,

$$\underset{\sim}{v} = (r\cdot\underset{\sim}{e}_r)^{\cdot} = \dot{r}\cdot\underset{\sim}{e}_r + r\cdot\dot{\underset{\sim}{e}}_r = \dot{r}\cdot\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta.$$

<u>Επιτάχυνση.</u>

Η επιτάχυνση $\underset{\sim}{a}$ υλικού σημείου ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\underset{\sim}{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\underset{\sim}{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\underset{\sim}{v}(t+\Delta t) - \underset{\sim}{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt}}. \qquad (12)$$

Δηλαδή $\underset{\sim}{a} = \frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt}$.

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\underset{\sim}{a}$ είναι κι αυτό συνάρτηση του χρόνου αφού,

$$\boxed{\underset{\sim}{a} = \frac{du_x}{dt}\underset{\sim}{i} + \frac{du_y}{dt}\underset{\sim}{j} + \frac{du_z}{dt}\underset{\sim}{k} = a_x\underset{\sim}{i} + a_y\underset{\sim}{j} + a_z\underset{\sim}{k}} \qquad (13)$$

με $a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ και $a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{a = \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)^{1/2}} \qquad (14)$$

Στη συνέχεια και για την περίπτωση της επίπεδης κίνησης, θα εκφράσουμε την <u>επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες</u>:

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης,

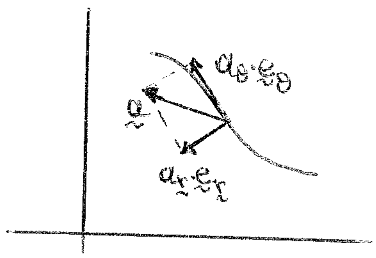
$$\underset{\sim}{a} = \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt}, \quad \text{έπεται ότι,}$$

$$\underset{\sim}{a} = \left(\dot{r}\cdot\underset{\sim}{e}_r + r\cdot\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta\right)^{\cdot} = \ddot{r}\,\underset{\sim}{e}_r + \dot{r}\,\dot{\underset{\sim}{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\underset{\sim}{e}}_\theta,$$

και αντικαθιστώντας από τις (7) προκύπτει ότι,

$$\boxed{\underset{\sim}{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\underset{\sim}{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\underset{\sim}{e}_\theta} = \qquad (15)$$

$$= a_r\cdot\underset{\sim}{e}_r + a_\theta\cdot\underset{\sim}{e}_\theta .$$



Το $a_r = \ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2$ ονομάζεται <u>ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης</u>, ενώ το $a_\theta = r\cdot\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ ονομάζεται <u>γωνιακή συνιστώσα της επιτάχυνσης</u>.

<u>Ορμή</u>:

Η ορμή ενός υλικού σημείου μάζας m και ταχύτητας

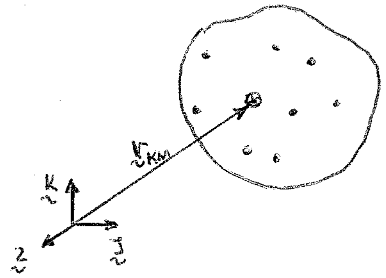
$\underset{\sim}{v}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\underset{\sim}{P} = m \cdot \underset{\sim}{v}} \qquad (16)$$

Για ένα σύστημα υλικών σημείων με ορμές $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \ldots, \underset{\sim}{P}_n$ $(\underset{\sim}{P}_i = m_i \cdot \underset{\sim}{v}_i)$ η συνολική ορμή του συστήματος είναι,

$$\boxed{\underset{\sim}{P} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{P}_i = m_1 \cdot \underset{\sim}{v}_1 + m_2 \cdot \underset{\sim}{v}_2 + \ldots + m_n \cdot \underset{\sim}{v}_n} \qquad (17)$$

Όταν εξετάζουμε ένα σύστημα σωματιδίων, είναι χρήσιμο να εισάγουμε την έννοια του κέντρου μάζας. Το κέντρο μάζας του συστήματος είναι εκείνο το σημείο



του $\mathbb{R}^3$, το οποίο βρίσκεται στη θέση,

$$\boxed{\underset{\sim}{r}_{K.M.} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \, \underset{\sim}{r}_i} \quad , \qquad (18)$$

όπου $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι προφανώς,

$$\underset{\sim}{v}_{KM} = \frac{d\underset{\sim}{r}_{KM}}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \underset{\sim}{P} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{P} = M \cdot \underset{\sim}{v}_{KM}} \quad , \qquad (19)$$

δηλαδή η συνολική ορμή του συστήματος ισούται με την ορμή που έχει το κέντρο μάζας, αν θεωρήσουμε ότι συγκεντρώνει όλη τη μάζα του συστήματος.

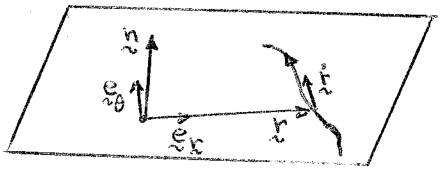
Η σχέση (19) είναι η απλούστερη δυνατή για την ορμή του συστήματος, αφού δεν περιέχει διανυσματικό άθροισμα πολλών ταχυτήτων ή ορμών, αλλά απλώς το βαθμωτό άθροισμα των μαζών επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Στροφορμή

Η στροφορμή $\underset{\sim}{L}$ ενός υλικού σημείου ως προς την αρχή των αξόνων ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο,

$$\boxed{\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p}} \quad . \qquad (20)$$

Για επίπεδη κίνηση και θεωρώντας ότι $\underset{\sim}{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχουμε ότι η



στροφορμή έχει μέτρο $L = |\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p}|$ και διεύθυνση εκείνη του καθέτου διανύσματος $\underset{\sim}{n}$. Η φορά του $\underset{\sim}{L}$ κατά σύμβαση είναι τέτοια, ώστε τα $(\underset{\sim}{r}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{L})$ να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα.

Για να βρεθεί η στροφορμή σε πολικές συντεταγμένες και για λόγους απλότητας αντικαθιστούμε στη σχέση (20) όπου $m=1$. Έτσι,

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{r} \times (\dot{r}\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\theta}\underset{\sim}{e}_\theta) = \underset{\sim}{r} \times \dot{r}\underset{\sim}{e}_r + \underset{\sim}{r} \times r\dot{\theta}\underset{\sim}{e}_\theta =$$

$$= \dot{r}\,(\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{e}_r) + r\,\dot{\theta}\,(\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{e}_\theta) \xrightarrow[\underset{\sim}{r} = r\,\underset{\sim}{e}_r]{\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{e}_r = \underset{\sim}{0}} r^2\,\dot{\theta}\,(\underset{\sim}{e}_r \times \underset{\sim}{e}_\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{L} = r^2\,\dot{\theta}\,\underset{\sim}{n}} \qquad (21)$$

Το μέτρο της στροφορμής είναι προφανώς,

$$L = r^2 \cdot \dot{\theta}.$$

Θέματα.

Θέμα 1ο//

Αν $\underset{\sim}{r} = (t^3 + 2t)\,\underset{\sim}{i} - 3e^{-2t}\,\underset{\sim}{j} + 2\sin 5t \cdot \underset{\sim}{k}$,

να βρεθούν οι συναρτήσεις:

(α) $\dfrac{d\underset{\sim}{r}}{dt}$ (β) $\left|\dfrac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\right|$ (γ) $\dfrac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2}$ (δ) $\left|\dfrac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2}\right|$,

όταν $t = 0$.

Λύση

(α) $$\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 + 2t)\,\underset{\sim}{i} + \frac{d}{dt}(-3e^{-2t})\,\underset{\sim}{j} + \frac{d}{dt}(2\sin 5t)\,\underset{\sim}{k} =$$

$$= (3t^2 + 2)\,\underset{\sim}{i} + 6e^{-2t}\,\underset{\sim}{j} + 10\cos 5t\,\underset{\sim}{k}.$$

Έτσι τη χρονική στιγμή $t = 0$, έχουμε,

$$\left.\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\right|_{t=0} = 2\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + 10\underset{\sim}{k}.$$

(β) Από την τελευταία σχέση,

$$\left|\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\right| = (2^2 + 6^2 + 10^2)^{1/2} = 2\sqrt{35}.$$

(γ) $$\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2)\,\underset{\sim}{i} + \frac{d}{dt}(6e^{-2t})\,\underset{\sim}{j} + \frac{d}{dt}(10\cos 5t)\,\underset{\sim}{k} =$$

$$= 6t\,\underset{\sim}{i} - 12e^{-2t}\,\underset{\sim}{j} - 50\sin 5t\,\underset{\sim}{k}.$$

Έτσι, για $t=0$,

$$\left.\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = -12\,\underset{\sim}{j}.$$

(δ) Από την τελευταία σχέση,

$$\left|\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2}\right| = 12.$$

Θέμα 2ο//

Αποδείξτε ότι αν $\underset{\sim}{A}(t)$ και $\underset{\sim}{B}(t)$ είναι δύο διανύσματα που εξαρτώνται από το χρόνο, τότε,

$$\frac{d}{dt}(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}) = \frac{d\underset{\sim}{A}}{dt}\cdot\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A}\cdot\frac{d\underset{\sim}{B}}{dt}.$$

<u>Λύση</u>

Έστω ότι $\underset{\sim}{A} = A_1\cdot\underset{\sim}{i} + A_2\,\underset{\sim}{j} + A_3\cdot\underset{\sim}{k}$ και $\underset{\sim}{B} = B_1\,\underset{\sim}{i} + B_2\,\underset{\sim}{j} + B_3\,\underset{\sim}{k}$.

Τότε,

$$\frac{d}{dt}(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}) = \frac{d}{dt}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) =$$

$$= \left(\frac{dA_1}{dt}B_1 + \frac{dA_2}{dt}B_2 + \frac{dA_3}{dt}B_3\right) + \left(A_1\frac{dB_1}{dt} + A_2\frac{dB_2}{dt} + A_3\frac{dB_3}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d\underset{\sim}{A}}{dt}\cdot\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A}\cdot\frac{d\underset{\sim}{B}}{dt}.$$

Θέμα 3ο//

Οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς που διαγράφει ένα υλικό σημείο είναι:

$$x = 3e^{-2t}, \quad y = 4\sin 3t, \quad z = 5\cos 3t,$$

όπου t ο χρόνος.

(α) Βρείτε τα $\underset{\sim}{v}(t)$ και $\underset{\sim}{a}(t)$.

(β) Βρείτε την ταχύτητα $\underset{\sim}{v}(0)$ και την επιτάχυνση $\underset{\sim}{a}(0)$, τη χρονική στιγμή $t=0$, καθώς και τα μέτρα τους.

Λύση

(α) Το διάνυσμα θέσης είναι,

$$\underset{\sim}{r}=x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}+z\underset{\sim}{k}=$$

$$=3e^{-2t}\underset{\sim}{i}+4\sin 3t\,\underset{\sim}{j}+5\cos 3t\,\underset{\sim}{k},$$

και άρα,

$$\underset{\sim}{v}(t)=\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}=-6e^{-2t}\cdot\underset{\sim}{i}+12\cos 3t\,\underset{\sim}{j}-15\sin 3t\,\underset{\sim}{k} \quad \text{και}$$

$$\underset{\sim}{a}(t)=\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt}=12e^{-2t}\cdot\underset{\sim}{i}-36\sin 3t\cdot\underset{\sim}{j}-45\cos 3t\,\underset{\sim}{k}.$$

(β) $\underset{\sim}{v}(0)=-6\underset{\sim}{i}+12\underset{\sim}{j}$ και $\underset{\sim}{a}(0)=12\underset{\sim}{i}-45\underset{\sim}{k}$,

και άρα,

$$v(0)=\sqrt{(-6)^2+12^2}=6\sqrt{5} \quad \text{και}$$

$$a(0)=\sqrt{12^2+(-45)^2}=3\sqrt{241}.$$

Θέμα 4ο//

Ένα υλικό σημείο κινείται με επιτάχυνση,

$$\underset{\sim}{a}=2e^{-t}\cdot\underset{\sim}{i}+5\cos t\,\underset{\sim}{j}-3\sin t\,\underset{\sim}{k}.$$

Στο σημείο $\underset{\sim}{r}(0)=(1,-3,2)$, τη χρονική στιγμή $t=0$, το υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα,

$$\underset{\sim}{v}(0)=4\underset{\sim}{i}-3\underset{\sim}{j}+2\underset{\sim}{k}.$$

Βρείτε τα $\underset{\sim}{v}(t)$ και $\underset{\sim}{r}(t)$.

Λύση

Επειδή $\underset{\sim}{a}=\dfrac{d\underset{\sim}{v}}{dt}=2e^{-t}\cdot\underset{\sim}{i}+5\cos t\,\underset{\sim}{j}-3\sin t\cdot\underset{\sim}{k}$ έχουμε,

$$\underset{\sim}{v}=\int(2e^{-t}\underset{\sim}{i}+5\cos t\,\underset{\sim}{j}-3\sin t\,\underset{\sim}{k})\,dt=$$

$$=\int 2e^{-t}dt\cdot\underset{\sim}{i}+\int 5\cos t\,dt\cdot\underset{\sim}{j}+\int -3\sin t\,dt\cdot\underset{\sim}{k}=$$

$$=-2e^{-t}\cdot\underset{\sim}{i}+5\sin t\,\underset{\sim}{j}+3\cos t\,\underset{\sim}{k}+\underset{\sim}{c}_1,$$

όπου $\underset{\sim}{c}_1=c_{11}\underset{\sim}{i}+c_{12}\underset{\sim}{j}+c_{13}\cdot\underset{\sim}{k}$.

Αλλά $\underset{\sim}{v}(0)=4\underset{\sim}{i}-3\underset{\sim}{j}+2\underset{\sim}{k}=-2\underset{\sim}{i}+3\underset{\sim}{k}+\underset{\sim}{c}_1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\underset{\sim}{c}_1=6\underset{\sim}{i}-3\underset{\sim}{j}-\underset{\sim}{k},$$

και κατά συνέπεια,

$$\underset{\sim}{v}(t)=(6-e^{-2t})\underset{\sim}{i}+(5\sin t-3)\underset{\sim}{j}+(3\cos t-1)\underset{\sim}{k}.$$

Για το $\underset{\sim}{r}(t)$ και αφού $\underset{\sim}{v}(t)=\dfrac{d\underset{\sim}{r}(t)}{dt}$ έχουμε ότι,

$$\underset{\sim}{r}(t)=\int 6-2e^{-t}dt\,\underset{\sim}{i}+\int 5\sin t-3\,dt\cdot\underset{\sim}{j}+\int 3\cos t-1\,dt\cdot\underset{\sim}{k}=$$

$$=(6t+2e^{-t})\underset{\sim}{i}-(5\cos t+3t)\underset{\sim}{j}+(3\sin t-t)\underset{\sim}{k}+\underset{\sim}{c}_2,$$

όπου $\underset{\sim}{c}_2=c_{21}\underset{\sim}{i}+c_{22}\underset{\sim}{j}+c_{23}\underset{\sim}{k}$.

Επειδή στη θέση $(1,-3,2)$ για $t=0$ έχουμε,

$$\underset{\sim}{r}(0)=\underset{\sim}{i}-3\underset{\sim}{j}+2\underset{\sim}{k}=2\underset{\sim}{i}-5\underset{\sim}{j}+\underset{\sim}{c}_2\Rightarrow\underset{\sim}{c}_2=-\underset{\sim}{i}+2\underset{\sim}{j}+2\underset{\sim}{k},$$

και συνεπώς,

$$\underset{\sim}{r}(t)=(6t+2e^{-t}-1)\underset{\sim}{i}+(2-5\cos t-3t)\underset{\sim}{j}+(3\sin t-t+2)\cdot\underset{\sim}{k}.$$

Θέμα 5ο//

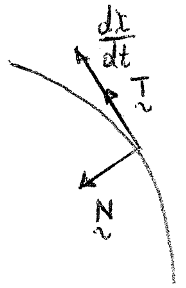
Έστω η καμπύλη C με διάνυσμα θέσης,

$$\underset{\sim}{r} = 3\cos 2t \cdot \underset{\sim}{i} + 3\sin 2t \cdot \underset{\sim}{j} + (8t-4)\underset{\sim}{k}.$$

Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{T}$, που εφάπτεται της καμπύλης. Συμπεράνετε από αυτό, ότι $\underset{\sim}{v} = u \cdot \underset{\sim}{T}$, δηλαδή η ταχύτητα είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της C.

Λύση

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης είναι το



$$\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = -6\sin 2t \cdot \underset{\sim}{i} + 6\cos 2t\, \underset{\sim}{j} + 8\, \underset{\sim}{k}.$$

Επειδή το $\left|\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\right| = \sqrt{6^2(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 8^2} = 10$,

έπεται ότι,

$$\underset{\sim}{T} = \frac{\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}}{\left|\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}\right|} = \frac{-6\sin 2t}{10} \cdot \underset{\sim}{i} + \frac{6\cos 2t}{10}\underset{\sim}{j} + \frac{8}{10}\underset{\sim}{k} =$$

$$= -\frac{3}{5}\sin 2t\, \underset{\sim}{i} + \frac{3}{5}\cos 2t\, \underset{\sim}{j} + \frac{4}{5}\underset{\sim}{k}.$$

Θέμα 6ο//

Αν $\underset{\sim}{T}$ είναι όπως στο θέμα 5, δείξτε ότι $\dfrac{d\underset{\sim}{T}}{ds}$ είναι κάθετο στο $\underset{\sim}{T}$.

Λύση.

Αφού $|\underset{\sim}{T}|=1 \Rightarrow \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{T}=1$ και παραγωγίζονται ως προς s (χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του θέματος 2) λαμβάνουμε:

$$\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}\cdot\underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{T}\cdot\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}=0 \Rightarrow \frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}\cdot\underset{\sim}{T}=0 \Rightarrow \frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}\perp\underset{\sim}{T}.$$

Αν $\underset{\sim}{N}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, που είναι κάθετο στου $\dfrac{d\underset{\sim}{T}}{ds}$ την κατεύθυνση, τότε,

$$\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}=k\cdot\underset{\sim}{N} \quad , \text{όπου} \quad k=\left|\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}\right|.$$

<u>Ορολογία</u>: (i) Το $\underset{\sim}{N}$ ονομάζεται το <u>κύρια κάθετο διάνυσμα</u> της C.

(ii) Το k ονομάζεται η <u>καμπυλότητα</u> της C.

(iii) Το $R=\frac{1}{k}$ ονομάζεται η <u>ακτίνα καμπυλότητας</u> της τροχιάς.

Θέμα 7ο// [εφαρμογή του 6].

Για την καμπύλη του θέματος 5, βρείτε τα k, R και $\underset{\sim}{N}$.

Λύση.

Από το θέμα 5 $\Rightarrow \underset{\sim}{T}=-\frac{3}{5}\sin 2t\,\underset{\sim}{i}+\frac{3}{5}\cos 2t\,\underset{\sim}{j}+\frac{4}{5}\underset{\sim}{k}$.

Άρα $\dfrac{d\underset{\sim}{T}}{ds}=\dfrac{d\underset{\sim}{T}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds}$ ή

$$\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}=\frac{\frac{d\underset{\sim}{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\left(-\frac{6}{5}\cos 2t\,\underset{\sim}{i}-\frac{6}{5}\sin 2t\,\underset{\sim}{j}\right)/10=$$

$$=-\frac{3}{25}\cos 2t\,\underset{\sim}{i}-\frac{3}{25}\sin 2t\,\underset{\sim}{j}$$, επομένως η κ είναι

$$k=\left|\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{25}\cos 2t\right)^2+\left(-\frac{3}{25}\sin 2t\right)^2}=\frac{3}{25}.$$

Επίσης,

$$R=\frac{1}{k}=\frac{25}{3},$$

και έτσι,

$$\underset{\sim}{N}=\frac{1}{k}\cdot\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}=R\,\frac{d\underset{\sim}{T}}{ds}=-\cos 2t\,\underset{\sim}{i}-\sin 2t\,\underset{\sim}{j}.$$

Θέμα 8ο//

(Για καμπύλη στο χώρο, τα δύο διανύσματα - μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους - $\underset{\sim}{T}$ και $\underset{\sim}{N}$, αποτελούν μια νέα βάση. Στο θέμα αυτό, θα εκφράσουμε την επιτάχυνση $\underset{\sim}{a}$ σ' αυτή τη βάση).

Δείξτε ότι για ένα υλικό σημείο που κινείται με ταχύτητα $\underset{\sim}{v}$ ισχύει,

$$\underset{\sim}{a}=\frac{du}{dt}\cdot\underset{\sim}{T}+\frac{u^2}{R}\cdot\underset{\sim}{N},$$

(όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς).

<u>Λύση.</u>

Ισχύει $\underset{\sim}{v}=u\cdot\underset{\sim}{T}$ και $\underset{\sim}{a}=\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt}$. Άρα,

$$\underset{\sim}{a}=\frac{d(u\underset{\sim}{T})}{dt}=\frac{du}{dt}\underset{\sim}{T}+u\frac{d\underset{\sim}{T}}{dt}\quad(*).$$

Αλλά $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k \cdot N \cdot \frac{ds}{dt} = k \cdot N \cdot u = \frac{u}{R} N \quad (**)$.

$(*) \overset{(**)}{\Longrightarrow} a = \frac{du}{dt} T + \frac{u^2}{R} N = a_T \cdot T + a_N \cdot N$.

Έτσι, η επιτάχυνση έχει δύο συνιστώσες. Η μία έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας (επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης) και η άλλη κάθετη στην πρώτη (κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης). Εν γένει τα a_T και a_N (βαθμωτές συναρτήσεις) δεν έχουν σχέση με την ακτινική και τη γωνιακή επιτάχυνση αντίστοιχα, τις οποίες είχαμε βρει ως προς την πολική βάση (e_r, e_θ). Λέμε συχνά ότι η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης εκφράζει τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, ενώ η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης εκφράζει τη μεταβολή της κατεύθυνσης της ταχύτητας.

Θέμα 9ο//

Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου υλικού σημείου είναι $r = \cos\omega t\, i + \sin\omega t\, j$ (ω = σταθερά).

Δείξτε ότι:

(α) $v \perp r$.

(β) Η a έχει κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων και το μέτρο της είναι ανάλογο με το μέτρο της απόστασης, δηλαδή $a \propto r$.

(γ) Το $r \times v$ είναι σταθερό.

Λύση.

(α) Είναι $v = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = -\omega \sin\omega t \cdot \underset{\sim}{i} + \omega \cos\omega t \, \underset{\sim}{j}$.

Έτσι,

$\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{r} = -\omega \sin\omega t \cos\omega t + \omega \sin\omega t \cos\omega t = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{v} \perp \underset{\sim}{r}$.

(β) Είναι $\underset{\sim}{a} = \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = -\omega^2 \cos\omega t \cdot \underset{\sim}{i} - \omega^2 \sin\omega t \, \underset{\sim}{j} =$

$$= -\omega^2 (\cos\omega t \, \underset{\sim}{i} + \sin\omega t \, \underset{\sim}{j}) = -\omega^2 \underset{\sim}{r}.$$

Άρα το $\underset{\sim}{a}$ έχει τη διεύθυνση του $\underset{\sim}{r}$ και αντίθετη φορά. Επίσης $a \propto r$.

(γ) Είναι,

$$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega \sin\omega t & \omega \cos\omega t & 0 \end{vmatrix} =$$

$= (\omega \cos^2\omega t + \omega \sin^2\omega t) \, \underset{\sim}{k} = \omega (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) \, \underset{\sim}{k} =$

$= \omega \cdot \underset{\sim}{k} =$ σταθερό.

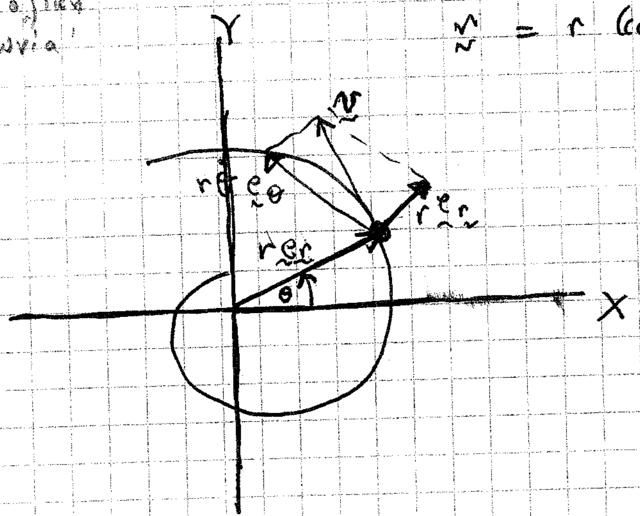
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:
Πολική βάση στον $\mathbb{R}^2$ (ΟΛΑ ΠΟΛΙΚΑ!)

Θέτω, πρώτα για την ειδική περίπτωση της κίνησης στον $\mathbb{R}^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ για τις πολικές συν/νες (r, θ) του $\mathbb{R}^2$ ως προς τις συνήθεις καρτεσιανές (x, y) του διανύσματος θέσης $\underset{\sim}{r}$,

πολική ακτίνα

πολική γωνία

$$\underset{\sim}{r} = r(\cos\theta, \sin\theta, 0). \quad (1)$$



Το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\underset{\sim}{r}$, το συμβολίζουμε με

$$\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} := \frac{\underset{\sim}{r}}{r}, \quad r = |\underset{\sim}{r}|,$$

δηλ., (βλ. Σχήμα)

$$\underset{\sim}{r} = r\,\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} \quad (3)$$

και άρα από την (1), (3) έπεται ότι

$$\boxed{\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} = (\cos\theta, \sin\theta, 0).} \quad (4)$$

Υπολογίζουμε το $\dot{\underset{\sim}{e}}_{\underset{\sim}{r}}$: Από την (4) έχουμε,

$$\dot{\underset{\sim}{e}}_{\underset{\sim}{r}} = \dot\theta(-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad (5)$$

και άρα

$$\dot{\underset{\sim}{e}}_{\underset{\sim}{r}} \perp \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}}. \quad (6)$$

Θέτουμε, τώρα

$$\boxed{\underset{\sim}{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)} \quad (7)$$

και η (5) γράφεται

$$\dot{\underset{\sim}{e}}_{\underset{\sim}{r}} = \dot\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta \quad (8a), \qquad \underset{\sim}{e}_\theta \perp \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} \quad (8b)$$

και

$$\dot{\underset{\sim}{e}}_\theta = -\dot\theta\,\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}}. \quad (9)$$

Επειδή

$$\underset{\sim}{v} = \dot{\underset{\sim}{r}} ,$$

από την εξ. (3) έχουμε

$$\underset{\sim}{v} = \dot{r}\, \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} + r\, \dot{\underset{\sim}{e}}_{\underset{\sim}{r}}$$

ή

$$\boxed{\underset{\sim}{v} = \dot{r}\, \underset{\sim}{e}_{r} + r\dot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_{\theta}} \quad : \text{Πολική ανάλυση.} \quad (10)$$

(βλ. Σχήμα)

Ανάλογες εκφράσεις μπορούν να βρεθούν για την επιτάχυνση και για την στροφορμή (άσκηση για φροντ.)

Επέκταση πολικής ανάλυσης στον $\mathbb{R}^3$

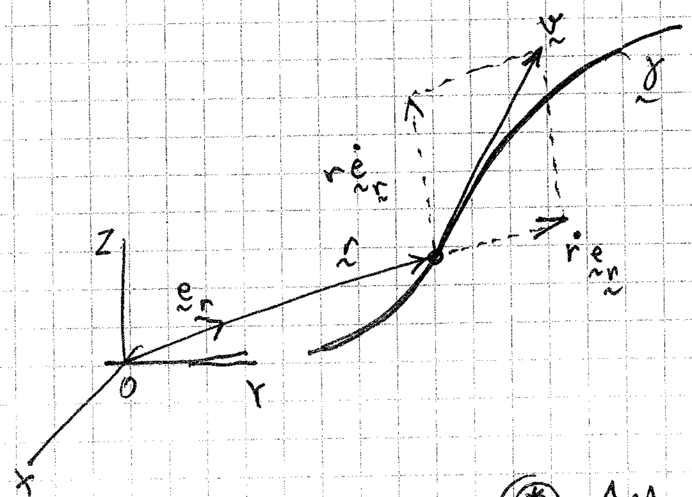
Για μια τυχούσα καμπύλη (ή τροχιά στον $\mathbb{R}^3$).

Εδώ πάλι θα έχουμε

$$r = |\underset{\sim}{r}|, \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} = \frac{\underset{\sim}{r}}{r} , \qquad (11)$$

καθώς και

$$\underset{\sim}{r} = r\, \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} : \text{ πολική αναπαράσταση της } \underset{\sim}{\gamma}. \quad (12)$$



Δηλ:

$$\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi$$

(1

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και εδώ(*), όπου τώρ το $\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}}$ δίνεται από την (1

(*) Δηλ. $\underset{\sim}{v} = \dot{r}\, \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} + r\, \dot{\underset{\sim}{e}}_{\underset{\sim}{r}}$.

ΒΑΘΜΟΤΑ

ΠΕΔΙΑ

(10) Τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.

Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικών τιμών

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε συναρτήσεις της μορφής

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

που ονομάζονται συναρτήσεις n πραγματικών μεταβλητών (με πραγματικές τιμές). Οι βασικές έννοιες δεν εξαρτώνται από το n και άρα μελετούμε την γενική περίπτωση (n αυθαίρετο), κρατώντας τις περιπτώσεις $n=2$ ή 3 γιά τα παραδείγματα.

Τοπολογία του $\mathbb{R}^n$

Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$. Το <u>συμπλήρωμα του Ε</u>, $\sim E$, είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus E$. Ορίζουμε τις ακόλουθες σχέσεις μεταξύ ενός σημείου $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ και του E:

Περιοχή του x: $B(x; r) = \{ y : |x-y| < r \}$ δηλ. το εσωτ. της S^n

Ορισμοί 1

1. Το $\underset{\sim}{x}$ είναι ένα <u>εσωτερικό σημείο</u> του E αν υπάρχει περιοχή του $\underset{\sim}{x}$ που περιέχεται στο E. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του E ονομάζεται <u>εσωτερικό του Ε</u>, συμβολισμός: $\overset{\circ}{E}$
2. Το $\underset{\sim}{x}$ είναι ένα <u>συνοριακό σημείο</u> του E αν κάθε περιοχή του $\underset{\sim}{x}$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του E και τουλάχιστον ένα σημείο του $\sim E$. Το σύνολο των συνοριακών σημείων του E ονομάζεται το <u>σύνορο του Ε</u>, ∂E.
3. Το $\underset{\sim}{x}$ είναι ένα <u>εξωτερικό σημείο</u> του E αν υπάρχει περιοχή του $\underset{\sim}{x}$ που περιέχεται στο $\sim E$. Το σύνολο των εξωτερικών σημείων του E ονομάζεται το <u>εξωτερικό του Ε</u>, E_e.

Είναι προφανές ότι:

Πρόταση 1

a) $\mathring{E} \subset E$

b) $E_e \subset \sim E$

c) $E_e = (\sim E)^{\circ}$

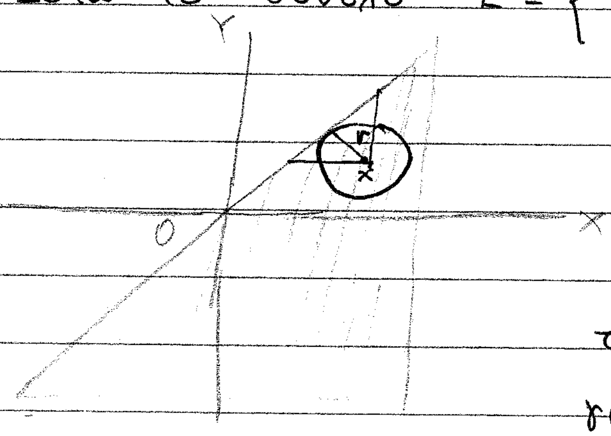
d) Αν $\underset{\sim}{x} \in \partial E$, τότε είτε $\underset{\sim}{x} \in E$ ή $\underset{\sim}{x} \in \sim E$.

e) Τα $\mathring{E}, \partial E, E_e$ δεν έχουν μεταξύ τους κοινά σημεία.

f) $\mathbb{R}^n = \mathring{E} \cup \partial E \cup E_e$. Άρα $\forall x \in \mathbb{R}^n$ μόνο ένα από τα ακόλουθα ισχύει: είτε $\underset{\sim}{x} \in \mathring{E}$ ή $\underset{\sim}{x} \in \partial E$ ή $\underset{\sim}{x} \in E_e$.

Παράδειγμα 1

Έστω το σύνολο $E = \{(x,y) : y < x\}$. Αν $\underset{\sim}{x} \in E$ και



$\underset{\sim}{x} = (x,y)$, τότε $x - y > 0$ και άρα η περιοχή του $\underset{\sim}{x}$ $S(\underset{\sim}{x}; r)$ όπου $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$, ανήκει στο E. Άρα $\underset{\sim}{x} \in \mathring{E}$. Ομοίως αν το x κείνται πάνω από την γραμμή $y=x$, τότε $x \in E_e$, ενώ αν το $\underset{\sim}{x}$ κείνται πάνω στην $y=x$, τότε $x \in \partial E$ αφού κάθε περιοχή του $\underset{\sim}{x}$ περιέχει σημεία του E και σημεία του $\sim E$. Έτσι $\mathring{E} = E$ τα σημεία κάτω από την $y=x$, E_e = το σύνολο των σημείων πάνω από την γραμμή και ∂E = τα σημεία στην $y=x$.

Το σύνολο του παραδείγματος είναι ένα παράδειγμα ενός ανοικτού συνόλου

Ορισμός 2

Το $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό αν όλα τα σημεία του E είναι εσωτερικά σημεία του E. Δηλ., E ανοικτό αν $E = \mathring{E}$.

Αφού κάθε σημείο του E είναι είτε συνοριακό ή εσωτερικό του E, έπεται ότι ένα ανοικτό σύνολο είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει τα συνοριακά του σημεία.

<u>Ορισμός 3</u>

Το $E \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>κλειστό</u> αν το $\sim E$ είναι ανοικτό.
<u>Δηλ.</u>, E κλειστό αν $\sim E = E_e$ ή $E = \mathring{E} \cup \partial E$.

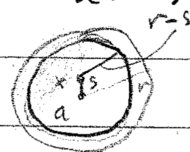
Έτσι ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα συνοριακά του σημεία. Παρατηρούμε ότι αν ένα σύνολο περιέχει <u>κάποια</u> από τα συνοριακά του σημεία, τότε δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.

<u>Πρόταση 2</u>

Κάθε περιοχή $\mathcal{S}(\underset{\sim}{a}; r)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{a}; r)$, τότε $|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{a}| < r$. Έστω ότι $|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{a}| = s$.
Τότε η περιοχή του $\underset{\sim}{x}$, $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}, r-s) \subset \mathcal{S}(\underset{\sim}{a}; r)$:
Αν $y \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r-s)$, τότε



$$|\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{a}| \le |\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x}| + |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{a}| < r - s + s = r$$

και άρα $\underset{\sim}{y} \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{a}; r)$. Άρα το $\mathcal{S}(a; r)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο. ⊠

<u>Θεώρημα 1</u>

1) Αν $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά, τότε το $E \cap F$ είναι ανοικτό.
2) $\forall E \subset \mathbb{R}^n$, το $\mathring{E}$ είναι ανοικτό σύνολο.
3) Το E_e είναι ανοικτό σύνολο
4) Η κλειστότητα του E, $\bar{E} = \mathring{E} \cup \partial E$ είναι κλειστό.

(Έχουμε ήδη δείξει ότι E κλειστό $\Leftrightarrow E = \bar{E} = \mathring{E} \cup \partial E$).

<u>Απόδειξη</u>

1) Αν $E \cap F = \emptyset$, τότε είναι ανοικτό (γιατί;). Έστω ότι $E \cap F \neq \emptyset$. Παίρνουμε ένα $\underset{\sim}{x} \in E \cap F$. Αφού E, F ανοικτά υπάρχουν περιοχές $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ και $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; s)$ έτσι ώστε $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r) \subset E$ και $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; s) \subset F$. Τότε αν θέσουμε $t = \min(r, s)$, έχουμε $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; t) \subset E \cap F$. Άρα $E \cap F$ ανοικτό.

2) Αν το $\mathring{E} = \emptyset$, τότε είναι ανοικτό. Έστω ότι $\mathring{E} \neq \emptyset$. Αν $\underset{\sim}{x} \in \mathring{E}$ το $\exists$ περιοχή $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ του x με $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r) \subset E$. Αφού η $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ είναι ανοικτό, κάθε σημείο $y \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ και άρα εσωτερικό σημείο του E. Δηλ. $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r) \subset \mathring{E}$ και άρα το $\mathring{E}$ είναι ανοικτό.

3) Το E_e είναι το $(\sim E)^{\circ}$ και άρα ανοικτό από το 2).

4) Αφού E_e ανοικτό έπεται ότι το $\sim E_e$ $(= \mathring{E} \cup \partial E)$ είναι κλειστό.

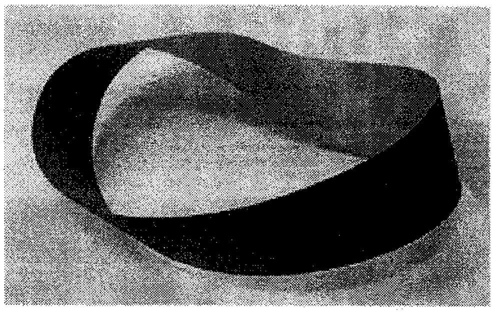
Τοπολογία: Μελέτη ιδιοτήτων αναλλοίωτων από παραμορφώσεις του αντικειμένου

- Άλλα σημαντικά είδη συνόλων: Συνεκτικό, συμπαγές
- Χώρος Hausdorff | ιδιότητες που διατηρούνται από ομοιομορφισμούς
- Εφαρμογές τοπολογίας:
  - ιδιότητες του $\mathbb{R}$: Heine-Borel, ∄ συν. σε κάποια σημεία

- Ταξινόμηση κλειστών επιφανειών
  - Συνολοθεωρητική: Ιδιότητες του χώρου
  - Αλγεβρική: Βαθμός συνεκτικότητας
  - Γεωμετρική: Ερμηνεύσεις πολ/γων, διαφορικών

Topology

From Wikipedia, the free encyclopedia



A Möbius strip, an object with only one surface and one edge. Such shapes are an object of study in topology.

Topology (from the Greek τόπος, "place", and λόγος, "study") is a major area of mathematics concerned with spatial properties that are preserved under continuous deformations of objects, for example, deformations that involve stretching, but no tearing or gluing. It emerged through the development of concepts from geometry and set theory, such as space, dimension, and transformation.

Ideas that are now classified as topological were expressed as early as 1736. Toward the end of the 19th century, a distinct discipline developed, which was referred to in Latin as the *geometria situs* ("geometry of place") or *analysis situs* (Greek-Latin for "picking apart of place"). This later acquired the modern name of topology. By the middle of the 20th century, topology had become an important area of study within mathematics.

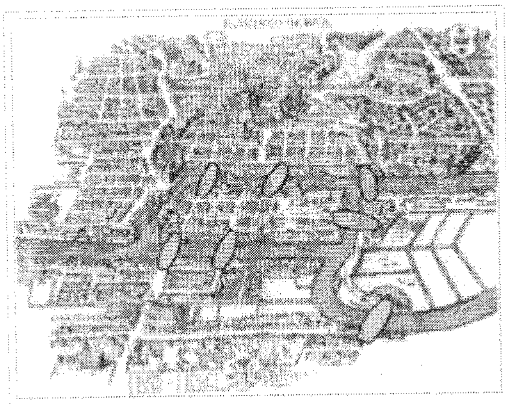
The word *topology* is used both for the mathematical discipline and for a family of sets with certain properties that are used to define a topological space, a basic object of topology. Of particular importance are *homeomorphisms*, which can be defined as continuous functions with a continuous inverse. For instance, the function $y = x^3$ is a homeomorphism of the real line.

Topology includes many subfields. The most basic and traditional division within topology is **point-set topology**, which establishes the foundational aspects of topology and investigates concepts inherent to topological spaces (basic examples include compactness and connectedness); **algebraic topology**, which generally tries to measure degrees of connectivity using algebraic constructs such as homotopy groups and homology; and **geometric topology**, which primarily studies manifolds and their embeddings (placements) in other manifolds. Some of the most active areas, such as low dimensional topology and graph theory, do not fit neatly in this division.

See also: topology glossary for definitions of some of the terms used in topology and topological space for a more technical treatment of the subject.

Contents

History



The Seven Bridges of Königsberg is a famous problem solved by Euler.

Topology began with the investigation of certain questions in geometry. Euler's 1736 paper on *Seven Bridges of Königsberg*[1] is regarded as one of the first academic treatises in modern topology.

The term "Topologie" was introduced in German in 1847 by Johann Benedict Listing in *Vorstudien zur Topologie*,[2] who had used the word for ten years in correspondence before its first appearance in print. "Topology," its English form, was first used in 1883 in Listing's obituary in the journal *Nature*[3] to distinguish "qualitative geometry from the ordinary geometry in which quantitative relations chiefly are treated". The term **topologist** in the sense of a specialist in topology was used in 1905 in the magazine *Spectator*.[*citation needed*] However, none of these uses corresponds exactly to the modern definition of topology.

Modern topology depends strongly on the ideas of set theory, developed by Georg Cantor in the later part of the 19th century. Cantor, in addition to setting down the basic ideas of set theory, considered point sets in Euclidean space, as part of his study of Fourier series.

Henri Poincaré published *Analysis Situs* in 1895,[4] introducing the concepts of homotopy and homology, which are now considered part of algebraic topology.

Maurice Fréchet, unifying the work on function spaces of Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard, Ascoli, and others, introduced the metric space in 1906.[5] A metric space is now considered a special case of a general topological space. In 1914, Felix Hausdorff coined the term "topological space" and gave the definition for what is now called a Hausdorff space.[6] In current usage, a topological space is a slight generalization of Hausdorff spaces, given in 1922 by Kazimierz Kuratowski.[*citation needed*]

For further developments, see point-set topology and algebraic topology.

Elementary introduction

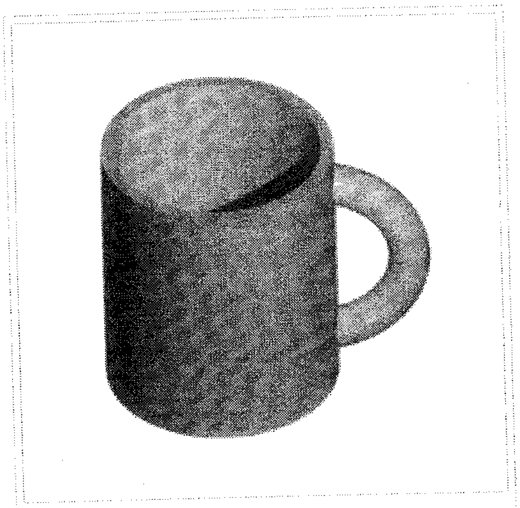
Topology, as a branch of mathematics, can be formally defined as "the study of qualitative properties of certain objects (called topological spaces) that are invariant under certain kind of transformations (called continuous maps), especially those properties that are invariant under a certain kind of equivalence (called homeomorphism)."

The term *topology* is also used to refer to a structure imposed upon a set *X*, a structure which essentially 'characterizes' the set *X* as a topological space by taking proper care of properties such as convergence, connectedness and continuity, upon transformation.

Topological spaces show up naturally in almost every branch of mathematics. This has made topology one of the great unifying ideas of mathematics.

The motivating insight behind topology is that some geometric problems depend not on the exact shape of the objects involved, but rather on the way they are put together. For example, the square and the circle have many properties in common: they are both one dimensional objects (from a topological point of view) and both separate the plane into two parts, the part inside and the part outside.

One of the first papers in topology was the demonstration, by Leonhard Euler, that it was impossible to find a route through the town of Königsberg (now Kaliningrad) that would cross each of its seven bridges exactly once. This result did not depend on the lengths of the bridges, nor on their distance from one another, but only on connectivity properties: which bridges are connected to which islands or riverbanks. This problem, the *Seven Bridges of Königsberg*, is now a famous problem in introductory mathematics, and led to the branch of mathematics known as graph theory.



A continuous deformation (homeomorphism) of a coffee cup into a doughnut (torus) and back.

Similarly, the hairy ball theorem of algebraic topology says that "one cannot comb the hair flat on a hairy ball without creating a cowlick." This fact is immediately convincing to most people, even though they might not recognize the more formal statement of the theorem, that there is no nonvanishing continuous tangent vector field on the sphere. As with the *Bridges of Königsberg*, the result does not depend on the exact shape of the sphere; it applies to pear shapes and in fact any kind of smooth blob, as long as it has no holes.

In order to deal with these problems that do not rely on the exact shape of the objects, one must be clear about just what properties these problems *do* rely on. From this need arises the notion of homeomorphism. The impossibility of crossing each bridge just once applies to any arrangement of bridges homeomorphic to those in Königsberg, and the hairy ball theorem applies to any space homeomorphic to a sphere.

Intuitively two spaces are homeomorphic if one can be deformed into the other without cutting or gluing. A traditional joke is that a topologist can't distinguish a coffee mug from a doughnut, since a sufficiently pliable doughnut could be reshaped to the form of a coffee cup by creating a dimple and progressively enlarging it, while shrinking the hole into a handle. A precise definition of homeomorphic, involving a continuous function with a continuous inverse, is necessarily more technical.

Homeomorphism can be considered the most basic *topological equivalence*. Another is homotopy equivalence. This is harder to describe without getting technical, but the essential notion is that two objects are homotopy equivalent if they both result from "squishing" some larger object.

Equivalence classes of the English alphabet in uppercase sans-serif font (Myriad); left – homeomorphism, right – homotopy equivalence

{A, R} {B} {C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z}	{A, R, D, O, P, Q} {B}
{D, O} {E, F, T, Y} {H, K} {P, Q} {X}	{C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z}

An introductory exercise is to classify the uppercase letters of the English alphabet according to homeomorphism and homotopy equivalence. The result depends partially on the font used. The figures use a sans-serif font named Myriad. Notice that homotopy equivalence is a rougher relationship than homeomorphism; a homotopy equivalence class can contain several of the homeomorphism classes. The simple case of homotopy equivalence described above can be used here to show two letters are homotopy equivalent, e.g. O fits inside P and the tail of the P can be squished to the "hole" part.

Thus, the homeomorphism classes are: one hole two tails, two holes no tail, no holes, one hole no tail, no holes three tails, a bar with four tails (the "bar" on the *K* is almost too short to see), one hole one tail, and no holes four tails.

The homotopy classes are larger, because the tails can be squished down to a point. The homotopy classes are: one hole, two holes, and no holes.

To be sure we have classified the letters correctly, we not only need to show that two letters in the same class are equivalent, but that two letters in different classes are not equivalent. In the case of homeomorphism, this can be done by suitably selecting points and showing their removal disconnects the letters differently. For example, X and Y are not homeomorphic because removing the center point of the X leaves four pieces; whatever point in Y corresponds to this point, its removal can leave at most three pieces. The case of homotopy equivalence is harder and requires a more elaborate argument showing an algebraic invariant, such as the fundamental group, is different on the supposedly differing classes.

Letter topology has some practical relevance in stencil typography. The font Braggadocio, for instance, has stencils that are made of one connected piece of material.

Mathematical definition

Main article: Topological space

Let **X** be any set and let ***T*** be a family of subsets of **X**. Then ***T*** is called a *topology on* **X** if:

1. Both the empty set and **X** are elements of ***T***.
2. Any union of arbitrarily many elements of ***T*** is an element of ***T***.
3. Any intersection of finitely many elements of ***T*** is an element of ***T***.

If ***T*** is a topology on **X**, then the pair (**X**, ***T***) is called a *topological space*, and the notation $\mathbf{X}_{\boldsymbol{T}}$ is used to denote a set **X** endowed with the particular topology ***T***.

The *open* sets in X are defined to be the members of T; note that in general not all subsets of **X** need be in ***T***. A subset of **X** is said to be closed if its complement is in ***T*** (i.e., its complement is open). A subset of **X** may be open, closed, both, or neither.

A function or map from one topological space to another is called *continuous* if the inverse image of any open set is open. If the function maps the real numbers to the real numbers (both spaces with the Standard Topology), then this definition of continuous is equivalent to the definition of continuous in calculus. If a continuous function is one-to-one and onto and if the inverse of the function is also continuous, then the function is called a homeomorphism and the domain of the function is said to be homeomorphic to the range. Another way of saying this is that the function has a natural extension to the topology. If two spaces are homeomorphic, they have identical topological properties, and are considered to be topologically the same. The cube and the sphere are homeomorphic, as are the coffee cup and the doughnut. But the circle is not homeomorphic to the doughnut.

Topology topics

Some theorems in general topology

- Every closed interval in **R** of finite length is compact. More is true: In $\mathbf{R}^n$, a set is compact if and only if it is closed and bounded. (See Heine–Borel theorem).
- Every continuous image of a compact space is compact.
- Tychonoff's theorem: the (arbitrary) product of compact spaces is compact.
- A compact subspace of a Hausdorff space is closed.
- Every continuous bijection from a compact space to a Hausdorff space is necessarily a homeomorphism.
- Every sequence of points in a compact metric space has a convergent subsequence.
- Every interval in **R** is connected.
- Every compact finite-dimensional manifold can be embedded in some Euclidean space $\mathbf{R}^n$.
- The continuous image of a connected space is connected.
- A metric space is Hausdorff, also normal and paracompact.
- The metrization theorems provide necessary and sufficient conditions for a topology to come from a metric.
- The Tietze extension theorem: In a normal space, every continuous real-valued function defined on a closed subspace can be extended to a continuous map defined on the whole space.
- Any open subspace of a Baire space is itself a Baire space.
- The Baire category theorem: If X is a complete metric space or a locally compact Hausdorff space, then the interior of every union of countably many nowhere dense sets is empty.
- On a paracompact Hausdorff space every open cover admits a partition of unity subordinate to the cover.
- Every path-connected, locally path-connected and semi-locally simply connected space has a universal cover.

General topology also has some surprising connections to other areas of mathematics. For example:

- In number theory, Fürstenberg's proof of the infinitude of primes.

See also some counter-intuitive theorems, e.g. the Banach–Tarski one.

Some useful notions from algebraic topology

See also list of algebraic topology topics.

- Homology and cohomology: Betti numbers, Euler characteristic, degree of a continuous mapping.
- Operations: cup product, Massey product
- Intuitively attractive applications: Brouwer fixed-point theorem, Hairy ball theorem, Borsuk–Ulam theorem, Ham sandwich theorem.
- Homotopy groups (including the fundamental group).
- Chern classes, Stiefel–Whitney classes, Pontryagin classes.

Generalizations

Occasionally, one needs to use the tools of topology but a "set of points" is not available. In pointless topology one considers instead the lattice of open sets as the basic notion of the theory, while Grothendieck topologies are certain structures defined on arbitrary categories which allow the definition of sheaves on those categories, and with that the definition of quite general cohomology theories.

See also

- List of algebraic topology topics
- List of general topology topics

- List of geometric topology topics
- List of topology topics
- Publications in topology
- Topology glossary

References

1. ^ Euler, Leonhard, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf)
2. ^ Listing, Johann Benedict, "Vorstudien zur Topologie", Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, p. 67, 1848
3. ^ Tait, Peter Guthrie, "Johann Benedict Listing (obituary)", Nature *27*, 1 February 1883, pp. 316–317
4. ^ Poincaré, Henri, "Analysis situs", Journal de l'École Polytechnique ser 2, 1 (1895) pp. 1–123
5. ^ Fréchet, Maurice, "Sur quelques points du calcul fonctionnel", PhD dissertation, 1906
6. ^ Hausdorff, Felix, "Grundzüge der Mengenlehre", Leipzig: Veit. In (Hausdorff Werke, II (2002), 91–576)

Further reading

- Basener, William (2006). *Topology and Its Applications* (1st ed.). Wiley. ISBN 0-471-68755-3.
- Bourbaki; *Elements of Mathematics: General Topology*, Addison–Wesley (1966).
- Breitenberger, E. (2006). "Johann Benedict Listing". In I.M. James. *History of Topology*. North Holland. ISBN 978-0444823755.
- Kelley, John L. (1975). *General Topology*. Springer-Verlag. ISBN 0-387-90125-6.
- Munkres, James (1999). *Topology* (2nd ed.). Prentice Hall. ISBN 0-13-181629-2.
- Pickover, Clifford A. (2006). *The Möbius Strip: Dr. August Möbius's Marvelous Band in Mathematics, Games, Literature, Art, Technology, and Cosmology*. Thunder's Mouth Press (Provides a popular introduction to topology and geometry). ISBN 1-56025-826-8.
- Boto von Querenburg (2006). *Mengentheoretische Topologie*. Heidelberg: Springer-Lehrbuch. ISBN 3-540-67790-9 **(German)**
- Richeson, David S. (2008) *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton University Press.
- Willard, Stephen (2004). *General Topology*. Dover Publications. ISBN 0-486-43479-6.

External links

- Elementary Topology: A First Course (http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/index.html) Viro, Ivanov, Netsvetaev, Kharlamov
- Topology (http://www.dmoz.org/Science/Math/Topology/) at the Open Directory Project
- The Topological Zoo (http://www.geom.uiuc.edu/zoo/) at The Geometry Center
- Topology Atlas (http://at.yorku.ca/topology/)
- Topology Course Lecture Notes (http://at.yorku.ca/i/a/a/b/23.htm) Aisling McCluskey and Brian McMaster, Topology Atlas
- Topology Glossary (http://www.ornl.gov/sci/ortep/topology/defs.txt)
- Moscow 1935: Topology moving towards America (http://www.ams.org/online_bks/hmath1/hmath1-whitney10.pdf) , a historical essay by Hassler Whitney.

11 Συναρτήσεις

Συναρτήσεις

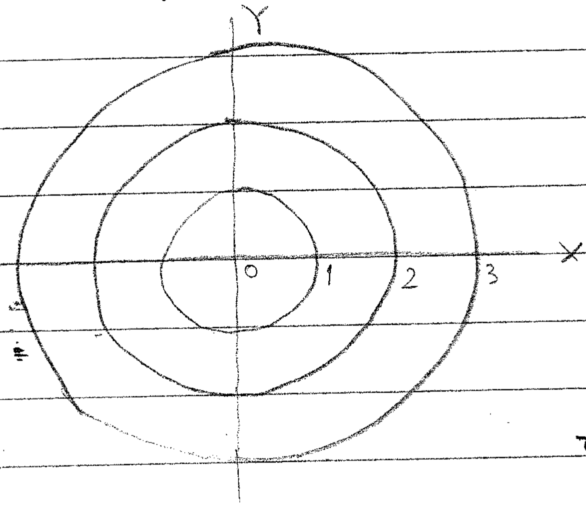
Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία αντιστοιχία από ένα $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ σε ένα $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε σε κάθε $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{A}$ αντιστοιχίζει ένα και μοναδικό $f(\underset{\sim}{a}) \in \mathcal{B}$. Γιά παράδειγμα, η

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \underset{\sim}{x} \mapsto |\underset{\sim}{x}|$$

αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ την απόσταση του σημείου από το 0. Η γεωμετρική εικόνα αυτής της συνάρτησης βρίσκεται αν ξεχωρίσουμε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ που αντιστοιχίζονται στον ίδιο αριθμό $c\ (\geq 0)$, δηλ., τα σύνολα της μορφής

$$\{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x}) = c\}.$$

Για $c=0$, το σύνολο είναι το μονοσύνολο $\underset{\sim}{0}$ ενώ για $c>0$ τα προκύπτοντα σύνολα είναι κύκλοι (βλ. Σχήμα).



Γενικά, γιά μια $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τα σύνολα

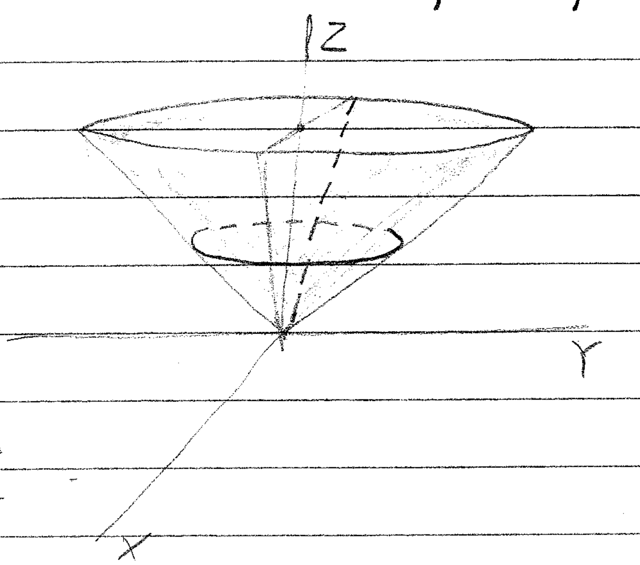
$$\{(x,y) : f(x,y) = c\}$$

ονομάζονται τα <u>ισόπεδα σύνολα</u> της f. Παραδείγματα τέτοιων συνόλων είναι οι ισουψείς καμπύλες της επιφάνειας της Γης σε έναν χάρτη, και οι ισοβαρείς ή ισόθερμες καμπύλες που προκύπτουν από την P–V σχέση ενός αερίου.

Το <u>γράφημα</u> μιάς $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των σημείων της μορφής

$$\{(x,y,z) : z = f(x,y),\ (x,y) \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^3$$

το οποίο παριστάνει μία <u>επιφάνεια στον (φυσικό) χώρο</u>. Γιά παράδειγμα, το γράφημα της $f(\underset{\sim}{x}) = |\underset{\sim}{x}|$ ή $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ προκύπτει από τα ισόπεδα σύνολα, αφού κανένα σημείο του γραφήματος δεν μπορεί να βρίσκεται κάτω από το επίπεδο XY $(z<0)$ αφού $z=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$. Στο XY-επίπεδο υπάρχει μόνο το σημείο $\underset{\sim}{0}$ $(z=0)$ και σε κάθε επίπεδο $z=c>0$, τα σημεία του γραφήματος πάνω σε αυτό είναι κύκλοι. Δηλ., τα ισόπεδα σύνολα της f είναι οι καμπύλες τομής του γραφήματος με επίπεδα παράλληλα στο XY-επίπεδο. Ομοίως, οι τομές του γραφήματος της f (δηλ. όλης της προκύπτουσας επιφάνειας) με τα επίπεδα XZ και YZ είναι για την επιφάνεια $z=\sqrt{x^2+y^2}$, με το XZ-επίπεδο $(y=0)$ η ευθεία $z=\sqrt{x^2}=|x|$ και με το YZ-επίπεδο $(x=0)$ η ευθεία $z=\sqrt{y^2}=|y|$. Βλέπουμε ότι το γράφημα της f είναι ο κώνος που προκύπτει από την περιστροφή της ημιευθείας $z=x,\ x\geq 0$ τον z-άξονα στο επίπεδο X-Z.



Ο τρόπος να 'παράγουμε' συνθετότερες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών από κάποιες βασικές είναι ακριβώς ανάλογος με αυτόν που ακολουθήσαμε στην 'Ανάλυση Ι'. Κατ' αρχήν ορίζουμε την σταθερή συνάρτηση n μεταβλητών και το αντίστοιχο της ταυτοτικής.

<u>Ορισμός 1</u>

α) Η σταθερή συνάρτηση $c:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ έχει $\mathcal{D}_c=\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{R}_c=\{c\}$.

β) Η <u>κ-προβολή</u> I_k $(k=1,\dots,n)$ είναι η συνάρτηση με $\mathcal{D}_{I_k}=\mathbb{R}^n$ και τύπο $I_k(\underset{\sim}{x})=x_k$, όπου x_k

είναι η k-συνιστώσα του $\underset{\sim}{x}$. Απεικονίζει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$ πάνω στην ορθογώνια προβολή του στον X_k-άξονα - δηλ., για $n=3$
$I_1(x,y,z)=x$, $I_2(x,y,z)=y$, $I_3(x,y,z)=z$. ⊠

Αντίστοιχα, ορίζονται και οι πράξεις $(+)$, $(-)$, $(\times)$, $(\div)$ για $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

<u>Ορισμός 2</u>

Αν $f:\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g:\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τότε ορίζουμ[ε] τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg, f/g ως ακολούθως:

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \,, \quad [f+g](\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}) + g(\underset{\sim}{x})$$
$$\mathcal{D}_{f-g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \,, \quad [f-g](\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}) - g(\underset{\sim}{x})$$
$$\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \,, \quad [fg](\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x})\, g(\underset{\sim}{x})$$
$$\mathcal{D}_{f/g} = \{\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g : g(\underset{\sim}{x}) \neq 0\} \,, \quad \left[\frac{f}{g}\right](\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x})}{g(\underset{\sim}{x})}.$$

Εύκολα προκύπτει από τους ορισμούς ότι η πρόσθεση και ο πολ/σμός έχουν τις προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές ιδιότητες:

$$f+(g+h)=(f+g)+h \qquad\qquad f(gh)=(fg)h$$
$$f+g=g+f \qquad\qquad fg=gf$$
$$f(g+h)=fg+fh.$$

<u>Ορισμός 3</u>

Αν $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η <u>σύνθεση</u> της g με την f, $g\circ f$, ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{\underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_f \,,\, f(\underset{\sim}{x}) \in \mathcal{D}_g\} \,, \quad (g\circ f)(\underset{\sim}{x}) = g(f(\underset{\sim}{x})).$$

Όλες οι προηγούμενες συναρτήσεις είναι ουσιωδώς τέτοιες συνθέσεις, $g \circ f$. Π.χ.,

αν $f(x,y) = x^2 + 2xy$, $f = I_1^2 + 2I_1 I_2$

αν $f(x,y) = e^{xy}$, $f = \exp \circ (I_1 I_2)$

αν $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$, $f = I_3 - I^{1/2} \circ (I_1^2 + I_2^2)$.

Χρησιμοποιώντας τις τέσσερεις πράξεις σε συνδιασμό με τις συναρτήσεις c και I_k έναν πεπερασμένο αριθμό φορών, παίρνουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (πολυώνυμα πολλών μεταβλητών). Π.χ., έστω η πολυωνυμική συνάρτηση

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

όπου: $p = 3I_1^2 I_2 I_3 - 4I_1^4 I_3^2 + 10 I_3^2$. Αυτή δίνει το πολυώνυμο τριών μεταβλητών

$$p(x,y,z) = 3x^2yz - 4x^4z^2 + 10z^2,$$

με $\mathcal{D}_p = \mathbb{R}^3$.

Ομοίως ορίζονται οι ρητές συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Π.χ., $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$r = \frac{3I_1 I_2 + I_2^3}{I_1^2 + I_1 I_2^2}$$

δηλ.,

$$r(x,y) = \frac{3xy + y^3}{x^2 + xy^2},$$

και

$$\mathcal{D}_r = \{(x,y) : x^2 + xy^2 \neq 0.$$

84

(12) Όρια και συνέχεια

Όρια και συνέχεια

Το όριο μίας $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται, κατ' αναλογία με την την 1-διάστατη περίπτωση, με: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ και σημαίνει ότι η $f(x)$ είναι κοντά στο b όταν το x είναι κοντά στο a. Γιά νά έχουν όλα αυτά νόημα πρέπει προφανώς το a να είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_f$.

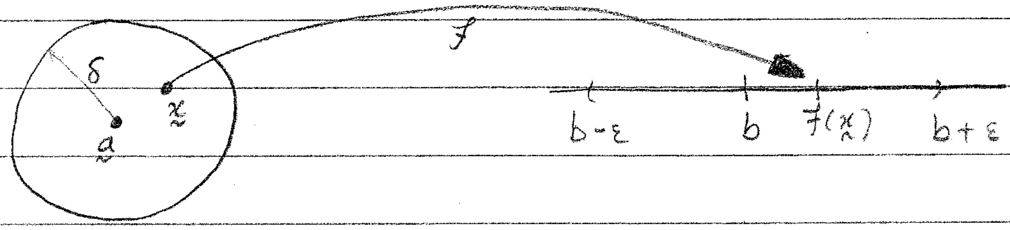
Ορισμός 1

Ο αριθμός b ονομάζεται το όριο της f στο a αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

όταν το $x \in \mathcal{D}_f$ και $0 < |x - a| < \delta$.

Γεωμετρικά αυτός ο ορισμός μας λέει ότι $\lim_{a} f = b$ αν γιά κάθε δοθείσα περιοχή $S(b;\varepsilon)$ του b υπάρχει περιοχή $S(a;\delta)$: αν $x \in S'(a;\delta) \cap \mathcal{D}_f$ (*), τότε $f(x) \in S(b;\varepsilon)$.
Δηλ; $f(\mathcal{D}_f \cap S'(a;\delta)) \subset S(b;\varepsilon) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.



Παράδειγμα 1

a) Αν $c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια σταθερή συνάρτηση και $a \in \mathbb{R}^n$, τότε $\lim_{a} c = c$.

b) Αν I_k είναι μία προβολή $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}^n$, τότε $\lim_{a} I_k = a_k$.

Απόδειξη

a) Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$

(*) $S'(a;\delta)$: διαγραφείσα περιοχή.

τέτοιο ώστε $|c-c|<\varepsilon$ όταν $0<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|<\delta$. Είναι προφανέ[ς] ότι μπορούμε να επιλέξουμε ως δ κάθε θετικό αριθμό.

(b) Έστω $\varepsilon>0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\exists\delta>0$ τέτοιο ώστε $|I_k(\underset{\sim}{x})-a_k|<\varepsilon$ όταν $0<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|<\delta$. Έστω $\delta=\varepsilon$. Τότε αφού $|x_k-a_k|<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|$, οι ανισότητες

$$0<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|<\delta$$

συνεπάγονται την $|x_k-a_k|<\varepsilon$. ☒

Ανάλογα με το αντίστοιχο θεώρημα γιά συναρτήσεις $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ βρίσκουμε:

Θεώρημα 1

Αν γιά τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ υπάρχουν τα όρια $\lim_a f$, $\lim_a g$ και αν a είναι ένα σ.σ. του $\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g$, τότε

$$\lim_a (f+g)=\lim_a f+\lim_a g$$
$$\lim_a (f-g)=\lim_a f-\lim_a g$$
$$\lim_a (fg)=(\lim_a f)(\lim_a g)$$
$$\lim_a (f/g)=(\lim_a f)/(\lim_a g) \quad (\text{αν } \lim_a g\neq 0). \ \boxtimes$$

Επιπλέον,

Θεώρημα 2

Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $\lim_a f=b$, αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο b, και αν $\underset{\sim}{a}$ είναι ένα σ.σ. του $\mathcal{D}_{g\circ f}$, τότε

$$\lim_a (g\circ f)=g(b).$$

Απόδειξη

Ακριβώς ανάλογη με την 1-διάστατη περίπτωση. Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή g συνεχής στο b, $\exists\eta>0$:

$$|g(y)-g(b)|<\varepsilon, \text{ γιά } y\in\mathcal{D}_g \text{ και } |y-b|<\eta.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

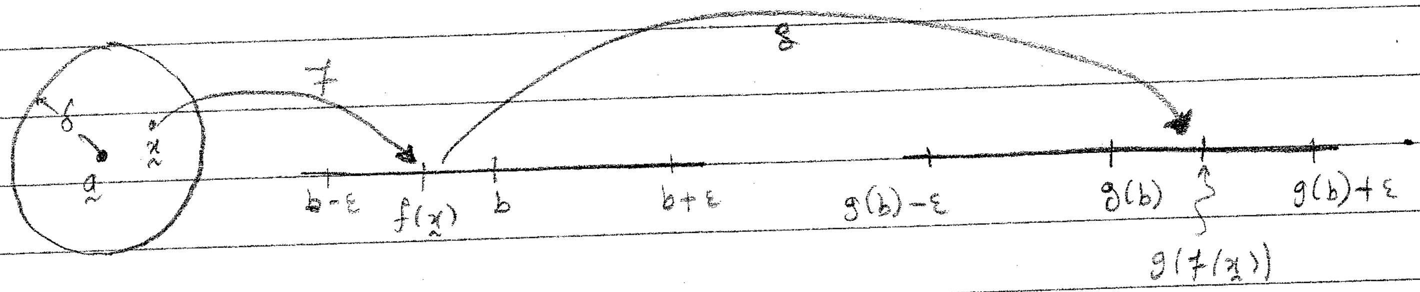
Ομοίως, επειδή $\lim_a f=b$, $\exists\delta>0$:

83

$|f(\underset{\sim}{x})-b|<\eta$, όταν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_f$ και $0<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|<\delta$. Αν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_{g\circ f}$ και $0<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|<\delta$, τότε $|f(\underset{\sim}{x})-b|<\eta$ και έτσι

$$|g(f(\underset{\sim}{x}))-g(b)|<\varepsilon .$$

Άρα $\lim\limits_{a}(g\circ f)=g(b)$.



$\boxtimes$

Τα προηγούμενα θεωρήματα μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων. Γιά ρητές συναρτήσεις, το Θεώρημα 1 εφαρμόζεται μόνο όταν ο παρονομαστής έχει όριο διάφορο του μηδενός, αλλιώς λέμε ότι το όριο δεν υπάρχει ή ότι το όριο είναι το άπειρο.

Ορισμός 2

Η f έχει όριο το άπειρο στο $\underset{\sim}{a}$ ή ότι το όριο της f στο a δεν υπάρχει, $\lim\limits_{\underset{\sim}{a}} f=\infty$ ή $\lim\limits_{\underset{\sim}{x}\to\underset{\sim}{a}} f(\underset{\sim}{x})=\infty$, αν το $\underset{\sim}{a}$ είναι ένα σ.σ. της f και $\forall M>0 \ \exists \delta>0$ έτσι ώστε

$$f(\underset{\sim}{x})>M$$

όταν $\underset{\sim}{x}\in\mathcal{D}_f$ και $0<|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}|<\delta$.

Αυτός ο ορισμός μας ωθεί στο να ορίσουμε την έννοια 'περιοχή του ∞' ως το (M,∞) (περιοχή του $-\infty$: $(-\infty, M)$) έτσι ώστε ο ορισμός του $\lim\limits_{a} f=p$ ($p\in\mathbb{R}$ ή $p=\infty$) να γίνει ως εξής: Γιά κάθε περιοχή $\mathcal{N}(p)$ του p υπάρχει μια διαγραφείσα περιοχή $\mathcal{N}'(\underset{\sim}{a})$ του $\underset{\sim}{a}$ έτσι ώστε:

$$f\left(\mathcal{N}'(\underset{\sim}{a}) \cap \mathcal{D}_f\right) \subset \mathcal{N}(p).$$

– Διάφορα παραδείγματα ορίων στα φροντιστήρια.

Ένας άλλος τύπος ορίου που απαντάται συχνά είναι το επαναληπτικό όριο: $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$, γιά παράδειγμα αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αυτό το όριο σημαίνει: γιά κάθε σταθερό x σε κάποια διαγραφείσα περιοχή $\mathcal{S}'(x_0; r)$ του x_0, παίρνουμε το $\lim_{y_0} g$ της $g(y)$ στο y_0, όπου $g(y) = f(x,y)$. Αν αυτό το $\lim_{y\to y_0} g(y)$ υπάρχει $\forall x \in \mathcal{S}'(x_0; r)$, τότε η συνάρτηση h : $h(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ υπάρχει και είναι καλά ορισμένη στο σύνολο $\mathcal{S}'(x_0; r)$. Αν το $\lim_{x_0} h$ υπάρχει, τότε αυτό είναι ίσο με $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$.

Παράδειγμα 2

Βρείτε το $\lim_{x\to 3} \lim_{y\to 2} (x^2y + 2xy^2)$.

Λύση

Έχουμε

$$\lim_{x\to 3} \lim_{y\to 2} (x^2y + 2xy^2) = \lim_{x\to 3} \left(2x^2 + 8x\right) = 42. \quad \boxtimes$$

Παρατηρείστε ότι $\lim_{(x,y)\to(3,2)} (x^2y + 2xy^2) = 42$ επίσης. Γενικά:

Θεώρημα 3

Αν το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ υπάρχει, και αν $\forall x$ σε μία διαγραφείσα περιοχή του x_0 το $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ υπάρχει, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=b$ και $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = h(x)$ και η h είναι ορισμένη γιά κάθε x σε μία $\mathcal{N}'(x_0)$ του x_0. Παίρνοντας ένα $\varepsilon>0$, θέλουμε να δείξουμε ότι αν $x\in \mathcal{N}'(x_0)$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε

$$|h(x)-b|<\varepsilon .$$

Επειδή $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=b$, $\exists \delta>0$: γιά $(x,y)\in \mathcal{S}'((x_0,y_0);\delta)\cap \mathcal{D}_f$,

$$|f(x,y)-b|<\varepsilon/2 .$$

Επειδή $\lim_{y\to y_0} f(x,y)=h(x)$, γιά κάθε $x\in \mathcal{N}'(x_0)$: $|x-x_0|<\delta$, υπάρχει ένας αριθμός y (βλ. Σχήμα) : $(x,y)\in \mathcal{S}'((x_0,y_0);\delta)\cap \mathcal{D}_f$ και

$$|f(x,y)-h(x)|<\varepsilon/2 .$$

Άρα γιά κατάλληλα y και γιά $x\in \mathcal{N}'(x_0)$ και $|x-x_0|<\delta$,

$$|h(x)-b|\le |h(x)-f(x,y)|+|f(x,y)-b|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon .$$

Άρα αποδείξαμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=b=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y). \quad \boxtimes$$

Δηλ., αν $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ υπάρχει και αν $\forall x\in \mathcal{N}'(x_0)$ το $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ υπάρχει, και επιπλέον αν $\forall y\in \mathcal{N}'(y_0)$ το $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ υπάρχει, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Πολλές φορές αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται γιά να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. Π.χ, για $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\forall x\in \mathcal{N}'(0)$ έχουμε: $\lim_{y\to 0} f(x,y)=\dfrac{1}{x}$. Άρα άν το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπήρχε, τότε το $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ θα υπήρχε – άτοπο διότι το $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Ορισμός 3

Η f ονομάζεται συνεχής στο σημείο a του $\mathcal{D}_f$, αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όταν $x \in \mathcal{D}_f$ και $|x - a| < \delta$,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Ισοδύναμα, η f συνεχής στο $a \in \mathcal{D}_f$ αν για κάθε περιοχή $\mathcal{N}$ του $f(a)$ υπάρχει περιοχή $\mathcal{M}$ του a τέτοια ώστε

$$f(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}_f) \subset \mathcal{N}.$$

Αν το $a \in \mathcal{D}_f$ αλλά δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_f$, τότε υπάρχει μία περιοχή $\mathcal{M}$ του a τέτοια ώστε $\mathcal{M} \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$, και άρα αν $\mathcal{N}$ είναι μία περιοχή του $f(a)$, τότε

$$f(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}_f) = \{f(a)\} \subset \mathcal{N},$$

δηλ. η f είναι συνεχής στο a.

Αν το a είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_f$ τότε ο ορισμός 3 είναι ισοδύναμος με την πρόταση:

"f συνεχής στο a αν $\lim_{a} f = f(a)$".

Θεώρημα 4

Αν οι f, g είναι συνεχείς στο a, τότε οι $f+g$, $f-g$, fg είναι συνεχείς στο a και η f/g είναι συνεχής στο a αν $g(a) \neq 0$.

Απόδειξη

Αν a δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, τότε η απόδειξη είναι άμεση.
Αν το a είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, τότε είναι σ.σ. και του $\mathcal{D}_f$ και του $\mathcal{D}_g$, και άρα:

$$\lim_{a} (f+g) = \lim_{a} f + \lim_{a} g = f(a) + g(a) = [f+g](a)$$

κ.λ.π. ⊠

Επειδή οι σταθερή c και η προβολή I_k είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $\underset{\sim}{a}$, από το Θεώρημα 4 έχουμε ότι οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις (όπου ορίζονται) είναι συνεχείς στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον η $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$ αν η f είναι συνεχής στο $a \in \mathbb{R}^n$ και η g συνεχής στο $f(\underset{\sim}{a}) \in \mathbb{R}$. (Παρατηρείστε ότι επειδή $\mathcal{D}_{g\circ f} \subset \mathcal{D}_f$, αν το a είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_{g \circ f}$, τότε το a είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_f$.)

Ορισμός 4

a) Λέμε f <u>συνεχής</u> αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}_f$.

b) Λέμε f συνεχής στο σύνολο $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_f$ αν ο περιορισμός $f_{\mathcal{S}}$ είναι συνεχής.

Τέλος, αποδεικνύουμε την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής γιά $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ορισμός 5

Αν $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$, λέμε ότι το E είναι <u>ανοικτό ως προς το F</u> αν υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $E = G \cap F$.

Δηλ., E ανοικτό ως προς F αν και μόνο αν $\forall \underset{\sim}{x} \in E$ υπάρχει περιοχή $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ ώστε $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r) \cap F \subseteq E$.

Για παράδειγμα το $[0,1) \subset \mathbb{R}$ είναι ανοικτό ως προς το $[0, \infty)$ αφού $[0,1) = (-1,1) \cap [0,\infty)$.

Ορισμός 6

Το $E \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>συνεκτικό</u> αν δεν υπάρχουν σύνολα A, B ξένα μεταξύ τους, μη κενά, και ανοικτά ως προς το E, έτσι ώστε $E = A \cup B$.

Αν E ανοικτό, τότε το E είναι συνεκτικό αν δεν γράφεται ως $E = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$ $A \cap B = \emptyset$, A, B ανοιχτά.

Γιά παράδειγμα, διαστήματα στο $\mathbb{R}$, κύκλοι στο $\mathbb{R}^2$, και περιοχές του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικά σύνολα. Το σύνολο $\{\underset{\sim}{x} : |\underset{\sim}{x}| > 1\}$ δεν είναι συνεκτικό στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι στο $\mathbb{R}^n$ για $n > 1$.

Θεώρημα 5 (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)
Έστω $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής στο ανοιχτό και συνεκτικό E και έστω ότι γιά κάποια $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E$ έχουμε $f(\underset{\sim}{a}) < f(\underset{\sim}{b})$. Τότε γιά κάθε t τέτοιο ώστε $f(\underset{\sim}{a}) < t < f(\underset{\sim}{b})$ υπάρχει ένα σημείο $\underset{\sim}{c} \in E$ τέτοιο ώστε $f(\underset{\sim}{c}) = t$.

Απόδειξη
Θέτουμε:

$$A = \{\underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} \in E \text{ και } f(\underset{\sim}{x}) < t\}$$

και

$$B = \{\underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} \in E \text{ και } f(\underset{\sim}{x}) > t\}$$

και βλέπουμε ότι $A, B \neq \emptyset$ $(\underset{\sim}{a} \in A, \underset{\sim}{b} \in B)$ και $A \cap B = \emptyset$.
Έστω $\underset{\sim}{x} \in A$. Αφού $f(\underset{\sim}{x}) < t$ και f συνεχής στο $\underset{\sim}{x}$, $\exists$ περιοχή $S(\underset{\sim}{x}) \subset E$ τέτοια ώστε

$$f(\underset{\sim}{y}) < t \quad , \quad \forall\, \underset{\sim}{y} \in S(\underset{\sim}{x}).$$

Άρα A ανοιχτό. Ομοίως B ανοιχτό. Άτοπο γιατί $A \cup B = E$ και E συνεκτικό. Άρα $\exists\, \underset{\sim}{c} \in E$ τέτοιο ώστε $\underset{\sim}{c} \notin A \cap B$ δηλ. $f(\underset{\sim}{c}) = t$. ⊠

13 Διαφορίσιμες συναρτήσεις

Διαφορίσιμες συναρτήσεις

Όπως γνωρίζουμε, η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν η f έχει παράγωγο στο x. Ομοίως, η $\underset{\sim}{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο αν και μόνο αν έχει παράγωγο σε εκείνο το σημείο. Έτσι αυτές οι δύο έννοιες είναι, στις παραπάνω περιπτώσεις, ισοδύναμες (ή ταυτόσημες). Π.χ. γιά μία $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν υπάρχει η $f'(x)$, στο $x\in\mathbb{R}$, τότε

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

και θέτοντας $\phi(x;h) = \frac{1}{h}\left[f(x+h)-f(x)\right] - f'(x)$, $h\neq 0$, βρίσκουμε:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \phi(x;h)h, \text{ όπου } \lim_{h\to 0}\phi(x;h) = 0.$$

Λέμε ότι η f είναι <u>διαφορίσιμη στο σημείο x</u>, αν η f ορίζεται σε μία περιοχή $\mathcal{S}(x;r)$ του x και αν υπάρχει αριθμός a ανεξάρτητος του h τέτοιος ώστε $\forall\, x+h\in \mathcal{S}(x;r)$,

$$f(x+h) = f(x) + ah + \phi(x;h)h, \quad \lim_{h\to 0}\phi(x;h) = 0.$$

Ονομάζουμε τον όρο ah <u>το διαφορικό της f στο x και h</u> θέτουμε $df = ah$. Έτσι δείξαμε ότι αν η f έχει παράγωγο στο σημείο x, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο x με $a = f'(x)$ και, άρα $df(x;h) = f'(x)h$. Αντιστρόφως, έστω ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο x. Επειδή γιά όλα τα $x+h$ σε μία διαγραφείσα περιοχή του x

$$f(x+h) = f(x) + ah + \phi(x;h)h, \quad \lim_{h\to 0}\phi(x;h) = 0,$$

έχουμε,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$$

και άρα η $f'(x)$ υπάρχει και ισούται με a.

Το ενδιαφέρον είναι ότι γιά συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ενώ η έννοια της παραγώγου δεν επεκτείνεται άμεσα από τις περιπτώσεις των συναρτήσεων $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, η έννοια της διαφορισιμότητας επεκτείνεται εύκολα και έτσι μπορούμε να προχωρήσουμε και στην έννοια της παραγώγου για $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

<u>Ορισμός 1</u>

Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, λέμε ότι η f είναι <u>διαφορίσιμη στο σημείο $\underset{\sim}{x}$</u> αν η f ορίζεται σε μία περιοχή $S(\underset{\sim}{x};r)$ του $\underset{\sim}{x}$ και αν υπάρχει ένα διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$ (ανεξάρτητο του h) τέτοιο ώστε γιά κάθε σημείο $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}$ στην $S'(\underset{\sim}{x};r)$ να ισχύει:

$$f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = f(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\cdot\underset{\sim}{h}, \quad \lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})=\underset{\sim}{0}$$

Ο όρος

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{h}$$

ονομάζεται το <u>διαφορικό της f στο $\underset{\sim}{x}$</u> και $\underset{\sim}{h}$ και συμβολίζεται με $df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})$. Το διάνυσμα $\underset{\sim}{a}$ ονομάζεται η <u>παράγωγος της f στο $\underset{\sim}{x}$</u> και συμβολίζεται με $\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})$.

Παρατηρούμε ότι γιά σταθερό $\underset{\sim}{x}$ η

$$\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

δηλαδή

$$\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = \left(\phi_1(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}),\ldots,\phi_n(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\right), \quad \phi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$$

και το

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{0}$$

σημαίνει:

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}\phi_k(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = 0, \quad \text{γιά } k=1,\ldots,n.$$

$\underset{\sim}{h}=(h_1,h_2)=(dx,dy)$

Παράδειγμα 1

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=x^2+xy$$

είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη

Θέτουμε $\underset{\sim}{x}=(x,y)$ ένα τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ και $\underset{\sim}{h}=(h_1,h_2)$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$, και υπολογίζουμε το $f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h})$:

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) &= f(x+h_1,\, y+h_2) = (x+h_1)^2+(x+h_1)(y+h_2) \\ &= x^2+2xh_1+h_1^2+xy+yh_1+xh_2+h_1h_2 \\ &= x^2+xy+(2x+y,\,x)\cdot(h_1,h_2)+(h_1,h_1)\cdot(h_1,h_2) \\ &= f(\underset{\sim}{x})+\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{h}+\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\cdot\underset{\sim}{h}, \end{aligned}$$

όπου $\underset{\sim}{a}=(2x+y,x)$ και $\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})=(h_1,h_1)$. Απομένει να δείξουμε ότι $\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})=\underset{\sim}{0}$. Είναι :

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}(h_1,h_1)=\left(\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}h_1,\ \lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}}h_2\right)=(0,0),$$

και άρα η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.

Το <u>διαφορικό της f</u> στο $\underset{\sim}{x}$ και $\underset{\sim}{h}$ είναι

$$df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})=(2x+y,\,x)\cdot(h_1,h_2)=(2x+y)h_1+xh_2,$$

και η <u>παράγωγος της f</u> στο $\underset{\sim}{x}$ είναι

$$\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})=(2x+y,\,x). \qquad \boxtimes$$

Όταν μελετούμε συναρτήσεις διαφορίσιμες σε ένα σύνολο, θέλουμε η συνάρτηση να ορίζεται σε μία περιοχή κάθε σημείου του συνόλου και άρα θεωρούμε διαφορισιμότητα σε <u>ανοικτά</u> σύνολα και μόνο.

Τα ακόλουθα θεωρήματα είναι ανάλογα των αντίστοιχων γιά συναρτήσεις $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ και οι αποδείξεις τους αφήνονται ως άσκηση.

Θεώρημα 1

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}$.

Απόδειξη

Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$, η f ορίζεται σε μία περιοχή $S(\underset{\sim}{x};r)$ του $\underset{\sim}{x}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}} f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = f(\underset{\sim}{x}).$$

Από την διαφορισιμότητα έπεται ότι για κάθε σημείο $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h} \in S'(\underset{\sim}{x};r)$ έχουμε

$f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = f(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};h)\cdot\underset{\sim}{h}$, και $\lim\limits_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}} \underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{0}$.

Άρα

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to 0} f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = f(\underset{\sim}{x})$$

και η f είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}$. ⊠

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1 δεν ισχύει. Π.χ., η $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ είναι συνεχής στο $(0,0)$ αλλά όχι διαφορίσιμη (άσκηση).

Θεώρημα 2

Αν οι $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο $\underset{\sim}{x}$, τότε οι $f+g$, fg είναι διαφορίσιμες στο $\underset{\sim}{x}$ και

$$d(f+g)(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = df(\underset{\sim}{x};h) + dg(\underset{\sim}{x};h)$$

$$\underset{\sim}{D}[f+g](\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{D}g(\underset{\sim}{x})$$

$$d(fg)(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = f(\underset{\sim}{x})\,dg(\underset{\sim}{x};h) + g(\underset{\sim}{x})\,df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})$$

$$\underset{\sim}{D}(fg)(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x})\,\underset{\sim}{D}g(\underset{\sim}{x}) + g(\underset{\sim}{x})\,\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})$$

Απόδειξη

Άσκηση. ⊠

Θεώρημα 3

Αν η $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $f(\underset{\sim}{x})$, τότε η $g\circ f$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ και

$$d(g\circ f)(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = dg\big(f(\underset{\sim}{x}); df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\big)$$

$$\underset{\sim}{D}[g\circ f](\underset{\sim}{x}) = Dg(f(\underset{\sim}{x}))\,\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Απόδειξη

Άσκηση.

Θεώρημα 4

Αν οι $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο $\underset{\sim}{x}$ και $g(\underset{\sim}{x})\neq 0$, τότε η f/g είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ και

$$d\left[\frac{f}{g}\right](\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = \frac{g(\underset{\sim}{x})\,df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{x})\,dg(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})}{g^2(\underset{\sim}{x})}$$

$$\underset{\sim}{D}\left[\frac{f}{g}\right](\underset{\sim}{x}) = \frac{g(\underset{\sim}{x})\,Df(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{x})\,Dg(\underset{\sim}{x})}{g^2(\underset{\sim}{x})}.$$

Απόδειξη

Άσκηση.

Θεώρημα 5 (Κανόνας αλυσίδας)

Αν $\underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη $:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ στο t και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{g}(t)$, τότε η $f\circ\underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο t και

$$d[f\circ\underset{\sim}{g}](t;h) = df\big(\underset{\sim}{g}(t); d\underset{\sim}{g}(t;h)\big)$$

$$D[f\circ\underset{\sim}{g}](t) = \underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{g}(t))\cdot D\underset{\sim}{g}(t)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Απόδειξη

Άσκηση.

Μέσω του Θεωρήματος 5 και του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για συναρτήσεων από το $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουμε:

<u>Θεώρημα 6</u> (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο ανοικτό σύνολο $E\subset\mathbb{R}^n$ που περιέχει το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα από το $\underset{\sim}{x}$ στο $\underset{\sim}{y}$, τότε υπάρχει αριθμός $\theta\in(0,1)$ τέτοιος ώστε

$$f(\underset{\sim}{y})-f(\underset{\sim}{x})=(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x})\cdot \underset{\sim}{D}f(x+\theta(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x})).$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω

$$\underset{\sim}{g}(t)=\underset{\sim}{x}+t(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x})$$

και

$$F=f\circ\underset{\sim}{g}.$$

Τότε

$$f(\underset{\sim}{y})-f(\underset{\sim}{x})=f(\underset{\sim}{g}(1))-f(\underset{\sim}{g}(0))=F(1)-F(0).$$

Από το Θεώρημα 5, η F είναι διαφορίσιμη στο $(0,1)$, ενώ από το ΘΜΤ γιά την $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παίρνουμε

$$F(1)-F(0)=F'(\theta),\ \text{γιά κάποιο } \theta\in(0,1).$$

Αυτό μας λέει ότι

$$f(\underset{\sim}{y})-f(\underset{\sim}{x})=D[f\circ\underset{\sim}{g}](\theta)=\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{g}(\theta))\cdot D\underset{\sim}{g}(\theta)$$

$$=(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x})\cdot Df(\underset{\sim}{x}+\theta(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{x})).\quad \boxtimes$$

14

Παράγωγος κατεύθυνσης

≥

μερικές παράγωγοι

Γιά την γεωμετρική εικόνα των εννοιών αυτής της παραγράφου περιοριζόμαστε σε $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, των οποίων, όπως γνωρίζουμε, το γράφημα είναι μία (2-διάστατη) επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Εν τούτοις, όλες οι έννοιες ορίζονται και μελετώνται γιά $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

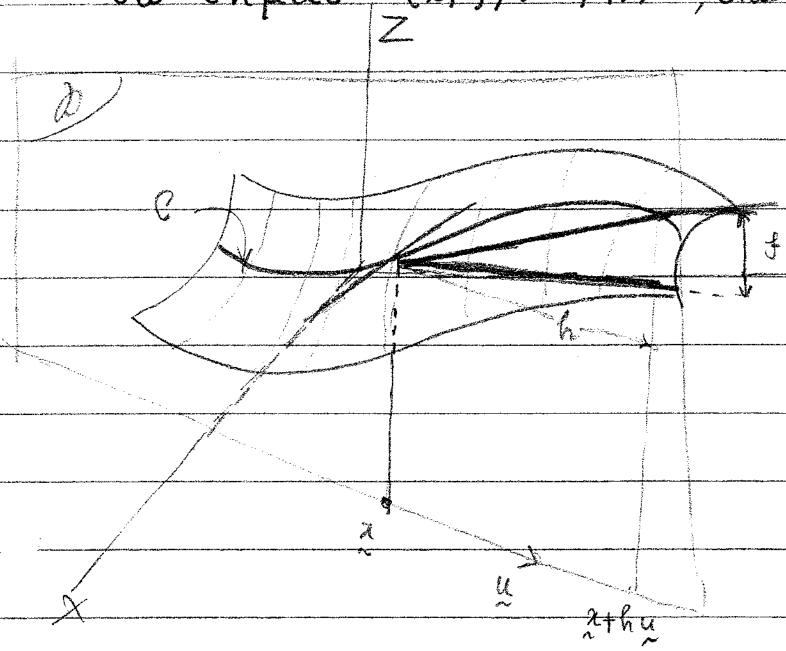
Για συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η df/dx δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της f στην "διεύθυνση" του x δηλ. καθώς το x "κινείται" πάνω στην ευθεία - δηλ., στο 1-διάστατο πεδίο ορισμού της f. Όταν μελετούμε συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ το $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_f$ μπορεί να "κινείται" σε πολλές (n) διευθύνσεις με διαφορετικούς ρυθμούς σε κάθε διεύθυνση. Ο ρυθμός μεταβολής της f στην διεύθυνση $\underset{\sim}{u}$, όπου $\underset{\sim}{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, δίνεται από το όριο

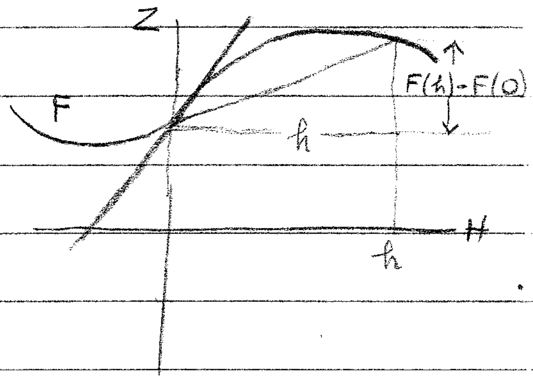
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u}) - f(\underset{\sim}{x})}{h}.$$

Αυτό το όριο είναι η λεγόμενη Παράγωγος κατεύθυνσης της f στην διεύθυνση $\underset{\sim}{u}$ στο σημείο $\underset{\sim}{x}$, συμβολισμός $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x})$. Παρατηρούμε ότι η τιμή της $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x})$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στα σημεία της ευθείας $\{\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u} : h \in \mathbb{R}\}$. Διαφορετικά σημεία πάνω σε αυτήν την ευθεία δημιουργούνται με διαφορετικές τιμές του h. Έτσι αν ορίσουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h \longmapsto F(h) = f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u})$ έχουμε ότι το γράφημα της F αντιστοιχεί στη τομή του γραφήματος της f με το επίπεδο που είναι κάθετο στο επίπεδο XY και περιέχει την ευθεία $\{\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u}\}$. Έτσι το σημείο $(0, F(0))$ αντιστοιχεί στο $(x, y, f(x,y))$. Επειδή

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u}) - f(\underset{\sim}{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0), \quad (1)$$

λέμε ότι η $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x})$ αντιστοιχεί στην κλίση της καμπύλης C στο σημείο $(x,y,f(x,y))$, όπως στο Σχήμα.





Ορισμός 1

Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό και $\underset{\sim}{u}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Η <u>παράγωγος κατεύθυνσης</u> της f στην διεύθυνση $\underset{\sim}{u}$ είναι η συνάρτηση $D_{\underset{\sim}{u}} f$ με τύπο

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underset{\sim}{x}+h\underset{\sim}{u})-f(\underset{\sim}{x})}{h}$$

και πεδίο ορισμού όλα τα $x \in U$ τέτοια ώστε το όριο αυτό υπάρχει.

Παρατήρηση 1

Η παράγωγος κατεύθυνσης δίνει το ορισμό της παραγώγου μιας $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν θέσουμε $u=1$.

Π.χ. έστω $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ όπου η τιμή $f(x,y,z,t)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) την χρονική στιγμή t. Θέτοντας $u=(u_1,u_2,u_3,0)$, η $D_u f(x,y,z,t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας (στο σημείο (x,y,z) την στιγμή t) ως προς την απόσταση κατά μήκος της ευθείας που διέρχεται από το (x,y,z) στην κατεύθυνση (u_1,u_2,u_3). Και αν $\underset{\sim}{u} = (0,0,0,1)$, τότε η $D_{\underset{\sim}{u}} f(x,y,z,t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας (στο σημείο (x,y,z) την στιγμή t) ως προς τον χρόνο.

Πως υπολογίζουμε παραγώγους κατεύθυνσης; Επειδή, για σταθερά $\underset{\sim}{x}$ και $\underset{\sim}{u}$, θέτοντας $F(h) = f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u})$, έχουμε όπως πριν

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underset{\sim}{x}+h\underset{\sim}{u}) - f(\underset{\sim}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(h)-F(0)}{h} = F'(0)$$

και άρα ο υπολογισμός της $D_{\underset{\sim}{u}} f$ ανάγεται σε εκείνον της παραγώγου μιάς συνάρτησης $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Υπολογίστε την $D_{\underset{\sim}{u}} f$, όπου $f = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ και $\underset{\sim}{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$.

<u>Λύση</u>

Θέτοντας $F(h) = f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u})$, έχουμε ότι $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = F'(0)$

Τότε

$$F(h) = f(\underset{\sim}{x}+h\underset{\sim}{u}) = \left(x + \frac{2}{\sqrt{6}}h\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{6}}h\right)^2 + \left(z + \frac{1}{\sqrt{6}}h\right)^2$$

και

$$F'(h) = \frac{4}{\sqrt{6}}\left(x + \frac{2}{\sqrt{6}}h\right) - \frac{2}{\sqrt{6}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{6}}h\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(z + \frac{1}{\sqrt{6}}h\right).$$

Άρα

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = F'(0) = \frac{4}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{2}{\sqrt{6}}z$$

και

$$D_{\underset{\sim}{u}} f = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(2I_1 - I_2 + I_3\right).$$

Αν και η παράγωγος κατεύθυνσης φαίνεται από τα παραπάνω να αποτελεί μία φυσιολογική επέκταση της παραγώγου μιάς συνάρτησης $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, κάποιες σημαντικές ιδιότητες δεν μεταφέρονται σε αυτή την επέκταση. Π.χ., αν μία συνάρτηση έχει παραγώγους κατεύθυνσης σε όλες τις κατευθύνσεις, τότε δεν είναι απαραίτητα διαφορίσιμη και, όπως δείχνει το ακόλουθο σημαντικό παράδειγμα, δεν είναι απαραίτητα ούτε καν συνεχής (πόσο μάλλον διαφορίσιμη).

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{y^2 + x^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι: 1) Στο $(0,0)$ η παράγωγος κατεύθυνσης της f σε κάθε κατεύθυνση υπάρχει

2) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Λύση

Έστω $\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2)$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h^3 u_1^2 u_2}{h^2 u_2^2 + h^4 u_1^4} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2 + h^2 u_1^4}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{u_1^2}{u_2}, & u_2 \neq 0 \\ 0, & u_2 = 0. \end{cases}$$

Άρα η $D_{\underset{\sim}{u}} f$ υπάρχει σε κάθε κατεύθυνση $\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2)$.

Έστω η παραβολή $\mathcal{E} = \{(x,y) : y = x^2\}$. Τότε υπολογίζουμε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ στην } \mathcal{E}.$$

Επειδή $f(0,0) = 0$, η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. $\boxtimes$

Τώρα έχουμε το θεμελιώδες:

<u>Θεώρημα 1</u>

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$, τότε η παράγωγος κατεύθυνσης της f σε κάθε κατεύθυνση $\underset{\sim}{u}$ υπάρχει στο $\underset{\sim}{x}$ και

$$D_u f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u} = df(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{u}). \quad (2)$$

<u>Απόδειξη</u>

Αν θέσουμε $\underset{\sim}{g}(h) = \underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u}$ και $F = f \circ \underset{\sim}{g}$, τότε $F(h) = f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u})$ και από τον Εξ. (1) έχουμε ότι $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = F'(0)$. Από το Θεώρημα Γ (κανόνας αλυσίδας) της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι

$$F'(0) = D[f \circ \underset{\sim}{g}](0) = \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{g}(0)) \cdot D\underset{\sim}{g}(0)$$

και έτσι

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u} = df(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{u}). \quad \boxtimes$$

Από την σχέση (2) προκύπτει ένα σημαντικό ποιοτικό συμπέρασμα: Η $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x})$ παίρνει την μέγιστη τιμή της όταν τα διανύσματα $\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})$ και $\underset{\sim}{u}$ έχουν την ίδια φορά, αφού $D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) \cdot u = \pi_{\underset{\sim}{u}} \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x})$. Άρα συμπεραίνουμε ότι η $\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})$ δείχνει προς την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f και αυτός ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής $= |\underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x})|$. (Παρατηρείστε ότι αλλάζοντας το $\underset{\sim}{u}$ βλέπουμε ποιά είναι αυτή η κατεύθυνση: Είναι αυτή του $\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x})$!).

Επιπλέον, γιά το διαφορικό $df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})$ παρατηρούμε ότι θέτοντας $\underset{\sim}{h} = h\underset{\sim}{u}$, $h = |\underset{\sim}{h}|$, τότε

$$df(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = h\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{D}f(\underset{\sim}{x}) = h\,D_{\underset{\sim}{u}}f(\underset{\sim}{x}),$$

δηλ., το διαφορικό είναι το μήκος του $\underset{\sim}{h}$ επί την τιμή της $D_{\underset{\sim}{u}}f(\underset{\sim}{x})$ στο $\underset{\sim}{x}$ στην διεύθυνση του $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{h}/|\underset{\sim}{h}|$.

~.~

Οι παράγωγοι κατεύθυνσης στις κατευθύνσεις των αξόνων των συντεταγμένων ονομάζονται μερικές παράγωγοι.

<u>Ορισμός 2</u>

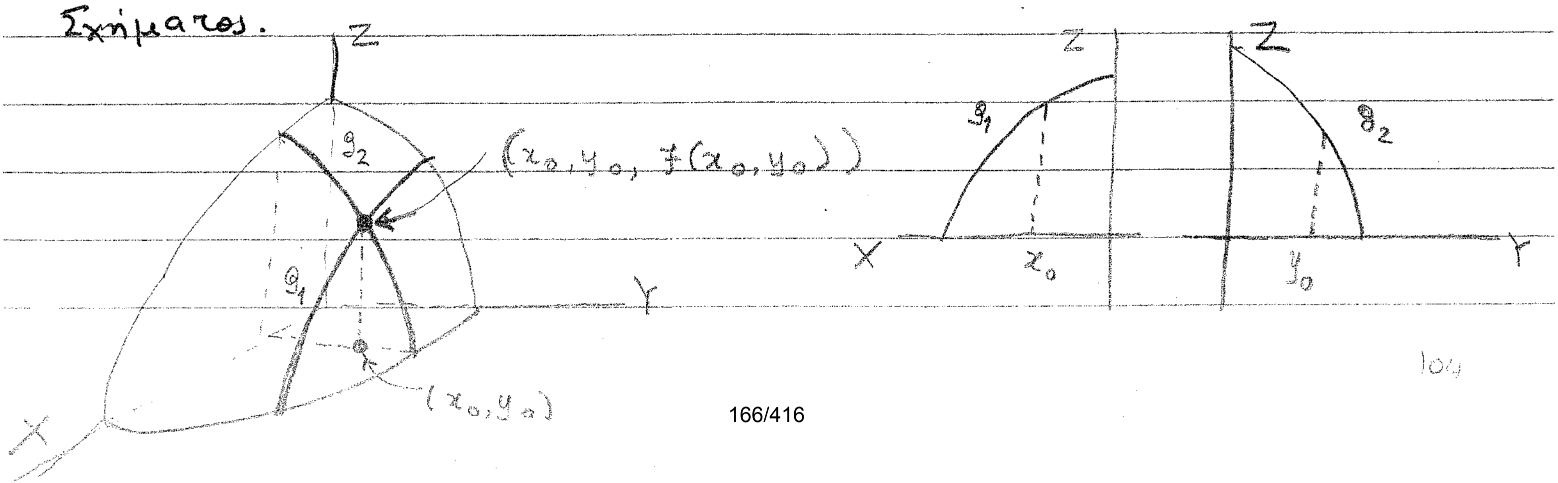
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$. Αν $\underset{\sim}{u}_k = (0,..,0,1,0,...,0)$ ($\uparrow$ κ-θέση) ονομάζουμε την $D_{\underset{\sim}{u}_k}f$ την <u>μερική παράγωγο της f ως προς την κ συντεταγμένη</u>.

Συμβολίζοντας γιά συντομία την $D_{\underset{\sim}{u}_k}f$ με $D_k f$, τότε η $D_k f$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$D_k f(\underset{\sim}{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\underset{\sim}{x} + h\underset{\sim}{u}_k) - f(\underset{\sim}{x})}{h} \qquad (3)$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο των $\underset{\sim}{x}$ στο $\mathcal{D}_f$ γιά τα οποία υπάρχει το όριο (3).

Γιά παράδειγμα, έστω η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το γράφημα της f, $\{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$ είναι η επιφάνεια του Σχήματος.

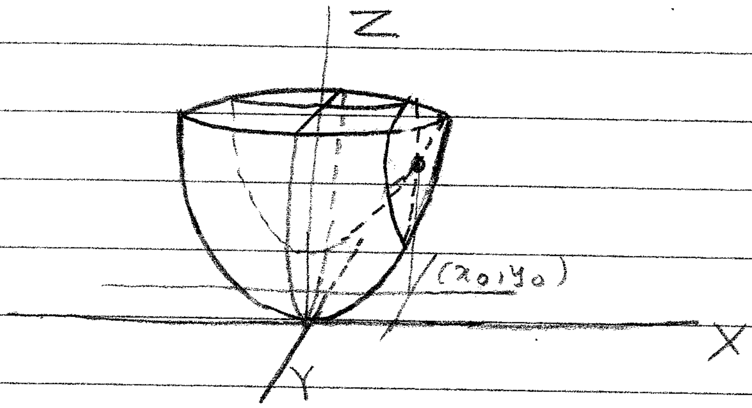


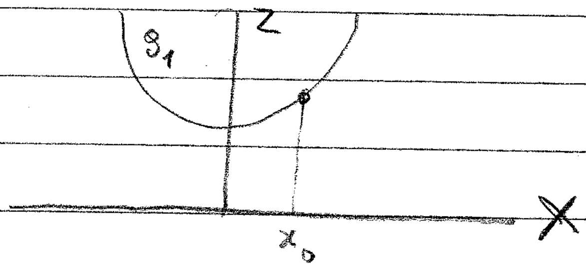
Παράδειγμα 3

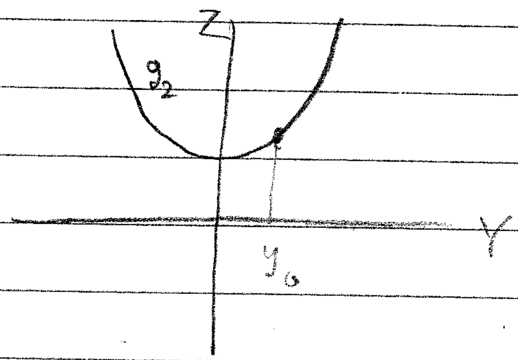
Βρείτε τις μερικές παραγώγους της $f = I_1^2 + I_2^2$.

Λύση

Θέτοντας, για ένα τυχόν σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $g_1(x) = f(x, y_0)$, τότε $D_1 f(x_0, y_0) = g_1'(x_0)$.







Επειδή $f = I_1^2 + I_2^2$,

$$g_1(x) = x^2 + y_0^2$$

και

$$g_1'(x) = 2x.$$

Άρα $D_1 f(x_0, y_0) = 2x_0$ και $D_1 f = 2I_1$. Θέτοντας $g_2(y) = f(x, y_0)$, έχουμε $D_2 f(x_0, y_0) = g_2'(y_0)$, και άρα

$$g_2(y) = x_0^2 + y^2$$

και

$$g_2'(y) = 2y.$$

Έτσι $D_2 f(x_0, y_0) = 2y_0$ και $D_2 f = 2I_2$. $\boxtimes$

Δεν χρειάζεται να εισάγουμε τις συναρτήσεις g_1 και g_2 γιά να υπολογίζουμε μερικές παραγώγους. Π.χ., γιά την

$$f(x,y) = x^2+y^2,$$

παρατηρούμε ότι γιά την $D_1 f$ αρκεί να θεωρήσουμε ότι το y είναι ένας σταθερός αριθμός και τότε η $f(x,y)$ γίνεται μία συνάρτηση μιάς μεταβλητής - της x, η $g_1(x)$, της οποίας η παράγωγος είναι η $D_1 f$. Ομοίως γιά την $D_2 f$.

Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται γιά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων συναρτήσεων $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Γιά να υπολογίσουμε την μερική παράγωγο της f ως προς την k-οστή συντεταγμένη, θεωρούμε όλες τις υπόλοιπες συν/νες ως σταθερούς αριθμούς εκτός από την k-οστή. Τότε παίρνουμε μία συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής της οποίας η παράγωγος είναι η $D_k f$. Δηλαδή, αν

$$g_k(x_k) = f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n)$$

τότε

$$D_k f(\underset{\sim}{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k+h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g_k(a_k+h) - g_k(a_k)}{h} = g_k'(a_k).$$

Παράδειγμα 4

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της $f(x,y,z) = xy + \cos(yz)$.

Λύση

Θεωρώντας τα y, z ως σταθερές, παραγωγίζουμε την συνάρτηση

$$g_1(x) = f(x,y,z) = xy + \cos(yz).$$

Έχουμε

$$D_1 f = y.$$

107

Θεωρώντας τα x, z σταθερά, βρίσκουμε

$$D_2 f(x,y,z) = x - z\sin(yz)$$

ενώ, θεωρώντας τα x, y ως σταθερά,

$$D_3 f(x,y,z) = -y\sin(yz). \quad \boxtimes$$

Συμβολισμός 1.

Οι συμβολισμοί γιά τις μερικές παραγώγους μιάς συνάρτησης είναι πολλοί και ποικίλοι. Π.χ., αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, θέτοντας $z = f(x,y)$, οι συμβολισμοί είναι:

$$D_1 f(x,y) = f_1(x,y) = f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \partial_x z$$

$$D_2 f(x,y) = f_2(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \partial_y z$$

Π.χ., αν $z = x^2 + y^2$, $\partial_x z = 2x$, $\partial_y z = 2y$. $\boxtimes$

Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν αρκεί γιά να μας πει αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη (βλ. παρ. 2). Εντούτοις έχουμε το εξής θεώρημα (η απόδειξη παραλείπεται).

Θεώρημα 2

Αν όλες οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν και είναι συνεχείς στο ανοικτό E, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο E.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του θεωρήματος 2 δεν ισχύει: Η συνάρτηση

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, αλλά δεν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους εκεί.

Παρατήρηση. Αφού οι μερικές παράγωγοι πολυωνύμων και ρητών συναρτήσεων (όπου αυτές ορίζονται) είναι πολυώνυμα και ρητές συναρτήσεις αντίστοιχα, το Θεώρημα 2 συνεπάγεται ότι τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις (όπου αυτές ορίζονται) είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του $\mathbb{R}^n$.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο, αναπτύσσοντας τεχνικές υπολογισμού της παραγώγου, του διαφορικού και των παραγώγων κατεύθυνση μιάς $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 1, Εξ. (2) ότι γιά $\underset{\sim}{u}$ μοναδιαίο διάνυσμα,

$$D_{\underset{\sim}{u}} f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}. \qquad (4)$$

Έτσι αν $\underset{\sim}{u}_k = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k\text{-θέση}}}{1},0,\dots,0)$, τότε

$$D_k f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_k$$

και επειδή η $\underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_k$ είναι η k-οστή συνιστώσα του $\underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x})$, έχουμε ότι

$$\underset{\sim}{D} f(\underset{\sim}{x}) = \left(D_1 f(\underset{\sim}{x}),\dots, D_n f(\underset{\sim}{x})\right). \qquad (5)$$

Αυτό το διάνυσμα ονομάζεται η βαθμίδα της f στο $\underset{\sim}{x}$, συμβολισμός ($\text{grad } f = \underset{\sim}{\nabla} f$):

$$\underset{\sim}{\nabla} f(\underset{\sim}{x}) = \left(D_1 f(\underset{\sim}{x}),\dots, D_n f(\underset{\sim}{x})\right). \qquad (6)$$

Έτσι, δείξαμε ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$, τότε η παράγωγος της f στο $\underset{\sim}{x}$ ισούται με το $\underset{\sim}{\nabla} f(\underset{\sim}{x})$. Έτσι η μέθοδος είναι: Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους, κατόπιν από την (5) την παράγωγο και μετά από την (4) τις παραγώγους κατεύθυνσης. Γιά το διαφορικό, χρησιμοποιώνται τον συνήθη συμβολισμό όπου $\underset{\sim}{h}$ το $d\underset{\sim}{x}$, γιά μιά συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, θέτοντας $w = f(x,y,z)$, γράφουμε $df(\underset{\sim}{x}; d\underset{\sim}{x})$ και αυτό το εκφράζουμε ως εξής:

$$dw = \underset{\sim}{\nabla} f(\underset{\sim}{x}) \cdot d\underset{\sim}{x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

ή

$$\boxed{dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz .} \qquad (7)$$

Παράδειγμα 5

Υπολογίστε το διαφορικό της f, όταν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = x^2 y + x e^z$.

Λύση

Το grad (βαθμίδα) της f, $\underset{\sim}{\nabla} f$, είναι

$$\underset{\sim}{\nabla} f(x,y,z) = (2xy + e^z, x^2, xe^z)$$

και αφού το $\underset{\sim}{\nabla} f(x,y,z)$ είναι συνεχή συνάρτηση, από το Θεώρημα 2 έπεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^3$. Θέτοντας $w = f(x,y,z)$, έχουμε

$$df(\underset{\sim}{x}; d\underset{\sim}{x}) = dw = (2xy + e^z, x^2, xe^z) \cdot (dx, dy, dz)$$
$$= (2xy + e^z)dx + x^2 dy + xe^z dz . \qquad \boxtimes$$

Παράδειγμα 6

Βρείτε την $D_{\underset{\sim}{u}} f$, όπου $f = I_1^2 + I_1 I_2$ και $\underset{\sim}{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$.

Λύση

Το grad είναι $\underset{\sim}{\nabla} f = (2I_1 + I_2, I_1)$, και αφού είναι συνεχές, η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ και, άρα, $D_{\underset{\sim}{u}} f = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{\nabla} f$. Άρα

$$D_{\underset{\sim}{u}} f = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) \cdot (2I_1 + I_2, I_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(3I_1 + 2I_2). \qquad \boxtimes$$

Παράδειγμα 7

Έστω
$$f(x,y,z) = \sin(x^2 - 3zy + xz)$$
Παραγωγίζοντας ως προς x (κρατώντας τα y, z σταθερά), βρίσκουμε
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 + 3zy + xz)(2x + z).$$
Γενικότερα, έστω
$$f(x,y,z) = g(x^2 - 3zy + xz),$$
όπου g διαφορίσιμη συνάρτηση, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (πριν είχαμε θέσει $g(u) = \sin u$). Τότε
$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x^2 - 3zy + xz)(2x + z).$$
Θα μπορούσαμε να γράψουμε εναλλακτικά
$$u = x^2 - 3zy + xz$$
και τότε
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial x},$$
το οποίο δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως πριν.

15 Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

Το εφαπτόμενο επίπεδο μιάς επιφάνειας

Μέχρι τώρα έχουμε ονομάσει επιφάνειες σύνολα των εξής δύο ειδών:

1) Γιά μιά $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, το γράφημα της f είναι η επιφάνεια

$$\{(x,y,z) : z = f(x,y)\}. \qquad (1)$$

2) Γιά $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, τά ισόπεδα σύνολα της F είναι οι επιφάνειες

$$\{(x,y,z) : F(x,y,z) = c\}. \qquad (2)$$

Οι επιφάνειες της μορφής (1) και (2) έχουν την κοινή ιδιότητα ότι ένα σημείο μπορεί να κινηθεί πάνω σε αυτά τα σύνολα με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Παρατηρούμε ότι θέτοντας $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ κάθε επιφάνεια της μορφής (1) γράφεται στην μορφή (2). Επίσης κάτω από κάποιες προϋποθέσεις (βλ. επόμενη παράγραφο) ένα σύνολο της μορφής (2) γράφεται στην μορφή (1).

Ο σκοπός μας εδώ είναι να ορίσουμε την έννοια του εφαπτόμενου επιπέδου γιά επιφάνειες της μορφής (2) και της μορφής (1).

Έστω $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό $E \subset \mathbb{R}^3$ και έστω η επιφάνεια

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in E : F(x,y,z) = c\}. \qquad (3)$$

Παίρνουμε ένα σημείο $\underset{\sim}{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ και μία καμπύλη C της $\mathcal{S}$ που διέρχεται από το $\underset{\sim}{x}_0$:

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{g}(t), \quad t \in (a,b).$$

Αφού $\underset{\sim}{x}_0 \in \mathscr{C}$, $\underset{\sim}{x}_0 = \underset{\sim}{g}(t_0)$, γιά κάποιο $t_0 \in (a,b)$, και αφού η $\mathscr{C}$ κείνται πάνω στην $\tilde{\mathscr{S}}$

$$F(\underset{\sim}{g}(t)) = c \quad , \quad \forall t \in (a,b).$$

Υποθέτοντας ότι η $\underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b), από το Θεώρημα 5, σελ. 97, έπεται ότι η $F \circ \underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b) και από τον κανόνα αλυσίδας για την $F \circ \underset{\sim}{g}$, έχουμε ότι:

$$\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{g}(t)) \cdot \underset{\sim}{g}'(t) = 0 \quad , \quad \forall t \in (a,b).$$

Ειδικά γιά $t = t_0$ (ή όταν $t = t_0$!),

$$\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{g}(t_0)) \cdot \underset{\sim}{g}'(t_0) = 0. \qquad (4)$$

Έτσι αποδείξαμε ότι:

<u>Θεώρημα 1</u>

<u>Στο $\underset{\sim}{x}_0$, το $\underset{\sim}{\nabla} F$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα <u>κάθε</u> καμπύλης $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{g}(t)$ που κείται στην επιφάνεια $\mathscr{S}$ και διέρχεται από το $\underset{\sim}{x}_0$. Άρα αν $\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0) \neq \underset{\sim}{0}$, οι εφαπτομένες όλων των καμπυλών της $\mathscr{S}$ που διέρχονται από το $\underset{\sim}{x}_0$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.</u> ☒

Αν $\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0) \neq \underset{\sim}{0}$, ορίζουμε το <u>εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathscr{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0$</u> (η $\mathscr{S}$ δίνεται από την (3)), ως το επίπεδο που διέρχεται από το $\underset{\sim}{x}_0$ και έχει κάθετο διάνυσμα το $\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0)$. Έτσι το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathscr{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0$ έχει εξίσωση

$$\boxed{(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) \cdot \underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0) = 0} \qquad (5)$$

ή αλλιώς,

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

και οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (x_0, y_0, z_0). Αν $\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0) = \underset{\sim}{0}$, τότε η F δεν έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\underset{\sim}{x}_0$.

Έστω τώρα $\mathcal{S}$ μία επιφάνεια της μορφής (1):

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in \mathcal{E}\}, \qquad (7)$$

και η $f: \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο ανοικτό $\mathcal{E}$. Θέτοντας $F(x,y,z) = f(x,y) - z$, η $\mathcal{S}$ γράφεται στην μορφή

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}, \qquad (8)$$

όπου η F είναι διαφορίσιμη στο ανοικτό σύνολο $\{(x,y,z) : (x,y) \in \mathcal{E},\ z \in \mathbb{R}\}$. Έτσι αν $\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0) \neq \underset{\sim}{0}$, μία εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $\mathcal{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ είναι

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) \cdot \underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0) = 0, \qquad (9)$$

ή ως προς την f,

$$(x - x_0) D_1 f(x_0, y_0) + (y - y_0) D_2 f(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (10)$$

Η (10) γράφεται προφανώς και στην μορφή

$$(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y} - (z - z_0) = 0 \qquad (11)$$

και οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (x_0, y_0, z_0).

Βλέπουμε ότι αφού

$$\underset{\sim}{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\underset{\sim}{x}_0}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\underset{\sim}{x}_0}, -1 \right),$$

το $\underset{\sim}{\nabla} F(\underset{\sim}{x}_0)$ είναι $\neq \underset{\sim}{0}$ παντού και άρα το εφαπτόμενο επίπεδο ορίζεται σε κάθε σημείο της $\mathcal{S}$.

Η (11) μας δίνει την γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού. Έστω $(x_0, y_0) = \underset{\sim}{x}_0$ και $(x,y) = \underset{\sim}{x}$. Τότε $z_0 = f(\underset{\sim}{x}_0)$ και η (11) γράφεται

$$\begin{aligned} z &= f(\underset{\sim}{x}_0) + \underset{\sim}{\nabla} f(\underset{\sim}{x}_0) \cdot (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) \\ &= f(\underset{\sim}{x}_0) + df(\underset{\sim}{x}_0 ; \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0) \end{aligned} \qquad (12)$$

Άρα για $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0$ μικρό, προσεγγίζοντας την $\Delta f(\underset{\sim}{x}_0 ; \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0)$ με το $df(\underset{\sim}{x}_0 ; \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0)$, ουσιωδώς προσεγγίζουμε την επιφάνεια με το εφαπτόμενο επίπεδό της στην γειτονιά του $\underset{\sim}{x}_0$. (βλ. Σχήμα)

Παράδειγμα 1

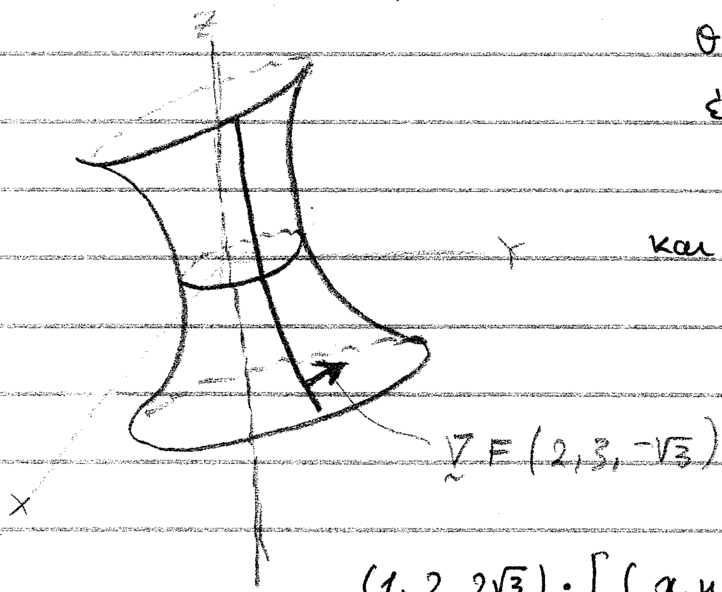
Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S όπου:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=1$$

στο σημείο $(2,3,-\sqrt{3})$.

Λύση

Αυτή η επιφάνεια ονομάζεται μονόφυλλο υπερβολοειδές. (Για το γράφημα, κατά τα γνωστά, θέτοντας διαδοχικά $x=0$, $y=0$, $z=0$ στην εξίσωση της f, παίρνουμε υπερβολές, ελλειψη, ενώνουμε κλπ.)



Θέτοντας $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2$, έχουμε:

$$\underset{\sim}{\nabla} F(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{2}{3}y, -2z\right)$$

και

$$\underset{\sim}{\nabla} F(2,3,-\sqrt{3})=\left(1,2,2\sqrt{3}\right).$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι (βλ. εξ. (5))

$$(1,2,2\sqrt{3})\cdot\left[(x,y,z)-(2,3,-\sqrt{3})\right]=0$$

ή

$$x+2y+2\sqrt{3}\,z-2=0. \quad \boxtimes$$

Παράδειγμα 2.

Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z=2x^2+y^2$ στο σημείο $(1,2,6)$.

Λύση

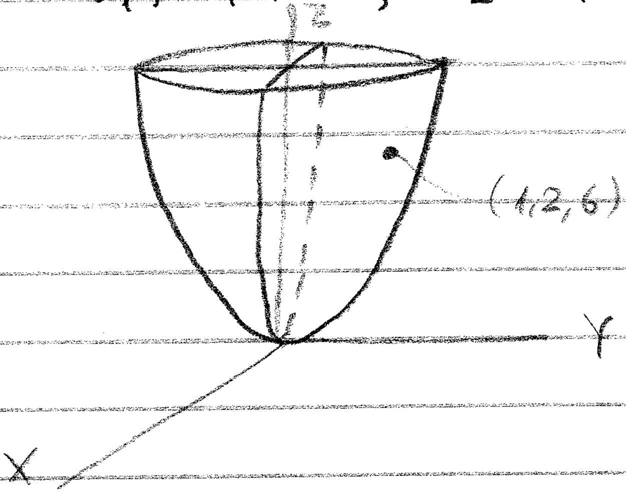
Η επιφάνεια S ονομάζεται ελλειπτικό παραβολοειδές (για το γράφημα, κατά τα γνωστά).

Θέτοντας $f(x,y)=2x^2+y^2$, έχουμε

$$D_1 f(x,y)=4x \quad , \quad D_2 f(x,y)=2y$$

και

$$D_1 f(1,2) = 4, \quad D_2 f(1,2) = 4.$$



Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι (βλ. εξ. (11))

$$4(x-1) + 4(y-2) - (z-6) = 0$$

ή

$$4x + 4y - z - 6 = 0. \quad \boxtimes$$

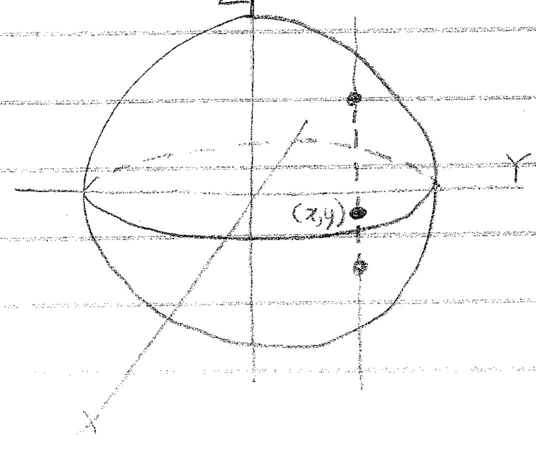
~ • ~

Μία επιφάνεια της μορφής (2) δεν γράφεται πάντοτε στην μορφή (1). Π.χ., μία επιφάνεια δεν μπορεί να είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αν έχει περισσότερες από μία τομές με μία ευθεία κάθετη στο επίπεδο XY.

Έστω γιά παράδειγμα η σφαίρα

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2-4=0\},$$

η οποία (βεβαίως) <u>δεν</u> είναι το γράφημα κάποιας $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αφού $\forall (x,y)$ στο δίσκο $S((0,0);2)$ η ευθεία που διέρχεται από το (x,y) και είναι κάθετη στο επίπεδο XY τέμνει την σφαίρα σε δύο σημεία.



Λύνοντας την εξίσωση της σφαίρας, έχουμε $z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2}$. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_1(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ και $f_2(x,y) = -\sqrt{4-x^2-y^2}$, βλέπουμε ότι η σφαίρα είναι η ένωση των γραφημάτων των f_1, f_2:

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) : z = f_1(x,y)\} \cup \{(x,y,z) : z = f_2(x,y)\},$$

όπου η f_1 έχει γράφημα το άνω ημισφαίριο και η f_2 το κάτω ημισφαίριο. Βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις f_1 και f_2 εκφράζονται πεπλεγμένα μέσω της εξίσωσης $x^2+y^2+z^2-4=0$.

Γενικά, λέμε ότι η f <u>ορίζεται</u> <u>πεπλεγμένα</u> από (ή μέσω) την εξίσωση

$$F(x,y,z)=0,$$

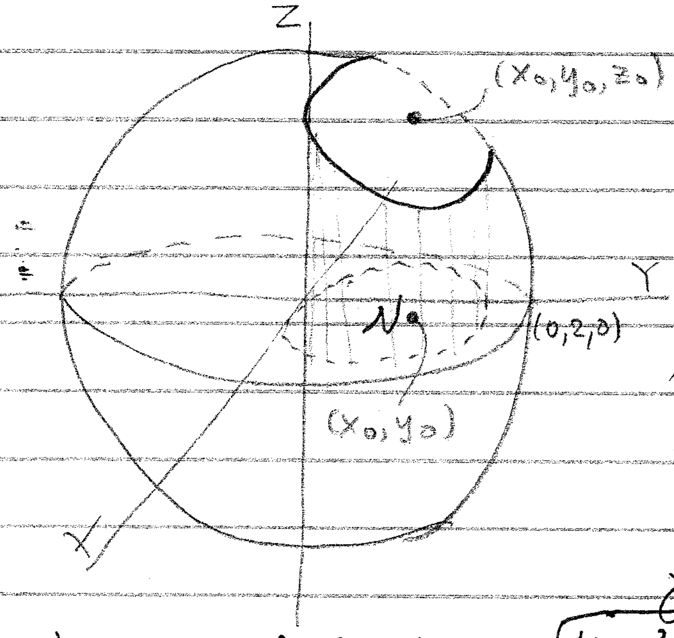
αν $\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f$, έχουμε

$$F(x,y,f(x,y)) = 0.$$

Με άλλα λόγια, η f ορίζεται πεπλεγμένα από την $F(x,y,z)=0$ αν

$$\{(x,y,z) : z = f(x,y);\ (x,y) \in \mathcal{D}_f\} \subset \{(x,y,z) : F(x,y,z)=0\}.$$

Θεωρώντας ένα σημείο (x_0,y_0,z_0) στο άνω ημισφαίριο $(z_0>0)$,



η εξίσωση της σφαίρας ορίζει πεπλεγμένα μία <u>μοναδική</u> συνεχή συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι μία αρκούντως μικρή περιοχή N του (x_0,y_0) στο επίπεδο XY και το γράφημά της περιέχει το σημείο (x_0,y_0,z_0): $f: N \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Ομοίως για το κάτω ημισφαίριο και την συνάρτηση $f_2(x,y) = -\sqrt{4-x^2-y^2}$. Εν τούτοις για ένα σημείο της σφαίρας πάνω στο επίπεδο XY, έστω το $(x_0,y_0,0)=(0,2,0)$, <u>δεν</u> υπάρχει περιοχή του $(0,2)$ στο επίπεδο XY που να δίνει το πεδίο ορισμού μιάς μοναδικής συνεχούς συνάρτησης η οποία να έχει γράφημα που να περιέχει το $(0,2,0)$. Εδώ το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας είναι παράλληλο στον z-άξονα.

Δηλ., σ'αυτό το παράδειγμα δύο συναρτήσεις χρειάζονται για να καλύψουμε μέρος του γραφήματος της επιφάνειας. Η εύρεση αυτών των συναρτήσεων ήταν εύκολη εδώ, - η λύση ως προς z σαν συνάρτηση των x, y ήταν εύκολη και έδωσε τις δύο συναρτήσεις που ορίστηκαν πεπλεγμένα μέσω της εξίσωσης της επιφάνειας.

Εν τούτοις κάτι τέτοιο δεν είναι πάντοτε εφικτό. Η ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων, πεπλεγμένα ορισμένων από την εξίσωση μιάς επιφάνειας, εξασφαλίζεται κάτω από προϋποθέσεις από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2 (Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης)

Έστω $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα ανοικτό σύνολο E. Αν $F(\underset{\sim}{x}_0) = 0$ και $D_3 F(\underset{\sim}{x}_0) \neq 0$, όπου $\underset{\sim}{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E$, τότε υπάρχει μία περιοχή $\mathcal{N}$ του (x_0, y_0), μία περιοχή $(z_0 - c, z_0 + c)$ του z_0, και μία μοναδική συνάρτηση $f: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους, έτσι ώστε

$$f(x_0, y_0) = z_0,$$

και $\forall (x,y) \in \mathcal{N}$

$$f(x,y) \in (z_0 - c, z_0 + c),$$

και

$$F(x, y, f(x,y)) = 0.$$

Επιπλέον $\forall (x,y) \in \mathcal{N}$,

$$D_1 f(x,y) = -\frac{D_1 F(x,y,f(x,y))}{D_3 F(x,y,f(x,y))}$$

και

$$D_2 f(x,y) = -\frac{D_2 F(x,y,f(x,y))}{D_3 F(x,y,f(x,y))}. \quad \boxtimes$$

Δηλ, υπό τις προϋποθέσεις γιά την F, αν το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $\{(x,y,z):\ F(x,y,z)=0\}$ δεν είναι παράλληλο στον z-άξονα ($D_3F(\underset{\sim}{x}_0)\neq 0$) στο σημείο $\underset{\sim}{x}_0$ της επιφάνειας, τότε σε μία περιοχή του $\underset{\sim}{x}_0$ η επιφάνεια αναπαρίσταται στην μορφή $\{(x,y,z):\ z=f(x,y)\}$.

Παράδειγμα 3

Αποδείξτε ότι στην περιοχή του $(0,2,-3)$ η εξίσωση

$$xz^3+yz+6=0$$

λύνεται γιά το z ως προς x και y και βρείτε τις $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$ σε αυτό το σημείο.

Λύση

Θέτοντας $w=F(x,y,z)=xz^3+yz+6$, υπολογίζουμε

$$\frac{\partial w}{\partial x}=D_1F(x,y,z)=z^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=D_2F(x,y,z)=z$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=D_3F(x,y,z)=3xz^2+y$$

δηλ, η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^3$ και $D_3F(0,2,-3)=2\neq 0$. Άρα η εξίσωση λύνεται γιά το z ως προς x,y σε μία περιοχή του $(0,2,-3)$ και σε αυτήν την περιοχή έχουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z^3}{3xz^2+y},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{3xz^2+y}.$$

Έτσι στο $(0,2,-3)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{27}{2}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}$. $\boxtimes$

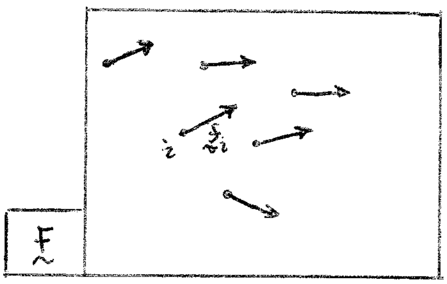
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1 Δύναμη.

Έστω σύστημα υλικών σημείων. Ομιλούμε για τη δύναμη $\underset{\sim}{f}_i$ που ασκείται στο i-οστό υλικό σημείο μάζας m_i και του προσδίδει επιτάχυνση $\underset{\sim}{a}_i$ και τη συμβολίζουμε με ένα άνυσμα με αρχή το υλικό σημείο. Το σύνολο όλων των $\underset{\sim}{f}_i$, $\forall i=1,\dots,n$, το ονομάζουμε το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $\underset{\sim}{F}$.

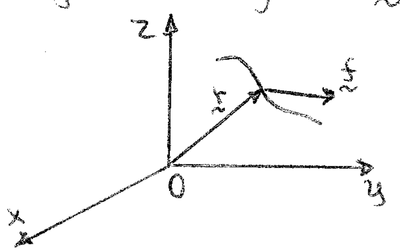


Σε γενικά η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνάρτηση της θέσης $\underset{\sim}{x}$ αλλά και της ταχύτητας $\dot{\underset{\sim}{x}}=\underset{\sim}{v}$, δηλαδή,

$$\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},\dot{\underset{\sim}{x}}).$$

2 Ροπή.

Αν ένα υλικό σημείο με διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{r}$ κινείται σ' ένα πεδίο δυνάμεων $\underset{\sim}{F}$ ορίζουμε τη ροπή της δύ-



ναμης $\underset{\sim}{f}$ ως προς το O ως εξής,

$$\boxed{\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{f}} \qquad (1)$$

.3 Ενέργεια.

Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m, το οποίο κινείται και η θέση του δίνεται από τη βαθμωτή συνάρτηση $x(t)$. Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου είναι,

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2} \quad . \qquad (2)$$

Αν $f(x)$ είναι το μέτρο της δύναμης $f(x)=|\underline{F}(\underline{x})|$, που ασκείται στο υλικό σημείο, τότε η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου είναι,

$$\boxed{V(x)=-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds} \quad , \qquad (3)$$

όπου x_0 είναι η αρχική θέση του υλικού σημείου.

Η ολική ενέργεια του υλικού σημείου είναι,

$$\boxed{E=T+V} \qquad (4) .$$

Παρατήρηση. Θα πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η δυναμική ενέργεια δεν ορίζεται πάντα όταν ασκείται δύναμη σ' ένα υλικό σημείο, αλλά μόνον στην περίπτωση που η δύναμη είναι συντηρητική, δηλαδή το έργο της μεταξύ δύο σημείων Α και Β είναι ανεξάρτητο της ακολουθούμενης διαδρομής (δες παράγραφο 4.2).

Σε αυτήν πάντως την περίπτωση η δυναμική ενέργεια του συστήματος καθορίζει πλήρως τη (συντηρητική) δύναμη που ασκείται σ' αυτό, αφού,

$$f(x)=-\frac{dV(x)}{dx}.$$

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας.

Αν η θέση του συστήματος είναι $\underset{\sim}{r}(t)$ και το σύστημα έχει μάζα m, τότε η κινητική ενέργεια είναι,

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m\dot{\underset{\sim}{r}}^{2}} \quad , \qquad (5)$$

όπου $\dot{\underset{\sim}{r}}^{2}=\dot{\underset{\sim}{r}}\cdot\dot{\underset{\sim}{r}}$ με $(\cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος ορίζεται ως η συνάρτηση,

$$\boxed{V=V(\underset{\sim}{r})} \quad . \qquad (6)$$

Εδώ δεν μπορεί να εκφραστεί η V σε μία σχέση της μορφής $V=-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$, εκτός αν το πεδίο είναι συντηρητικό.

Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι,

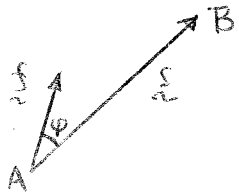
$$E=T+V.$$

4. Έργο.

Γνωρίζουμε ότι, για μια ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου μάζας m, στο οποίο ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου $f(x)=|\underset{\sim}{f}|$, το έργο της δύναμης $\underset{\sim}{f}$ στο υλικό σημείο δίνεται από τη σχέση,

$$W=\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{x}, \qquad |\underset{\sim}{f}|=\text{σταθ.}$$

Γενικότερα έχουμε ότι,

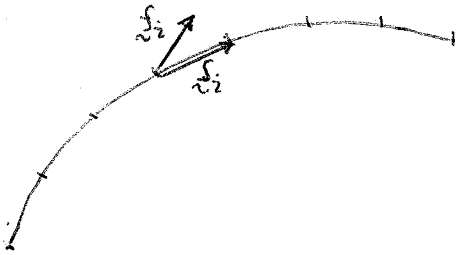


$W=\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{s}=f\cdot s\cdot\cos\varphi$, όταν η δύναμη $\underset{\sim}{f}$ δεν είναι στη διεύθυνση της μετατόπισης του συστήματος, αλλά έχει σταθερό μέτρο και σταθερή κατεύθυνση.

Στη γενική περίπτωση, όπου το μέτρο της $\underset{\sim}{f}$ δεν είναι σταθερό και η κίνηση γίνεται πάνω σε μία τυχαία διαφορίσιμη καμπύλη l, ορίζουμε το έργο της $\underset{\sim}{f}$ κατά μήκος της l ως εξής:

$$\boxed{W=\int_l \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{s}} \qquad (7)$$

Αυτό έχει την παρακάτω ερμηνεία.



Χωρίζουμε, με πλήθος σημείων της, την l και λαμβάνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $\underset{\sim}{s}_i$. Αν η διαμέριση γίνει μεγάλη, τότε σε κάθε διάνυσμα $\underset{\sim}{s}_i$ ισχύει κατά προσέγγιση ότι το αντίστοιχο έργο είναι $W_i=\underset{\sim}{f}_i\cdot\underset{\sim}{s}_i$. Έτσι, το ολικό έργο W ορίζεται μέσω του ακόλουθου οριακού επιχειρήματος: $W=\lim_{\underset{\sim}{s}_i\to\underset{\sim}{0}}\sum_i \underset{\sim}{f}_i\cdot\underset{\sim}{s}_i$, το οποίο είναι ακριβώς το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_l \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{s}$.

Αν $U(x)$ είναι η δυναμική ενέργεια βαρύτητας και $x_1<x_2$ τότε μπορούμε να δείξουμε με τη βοήθεια του έργου ότι $U(x_1)<U(x_2)$. Η απαίτηση στην ουσία αυτού του γεγονότος εξηγεί το πρόσημο $(-)$ στη σχέση (3)

Το παραπάνω αποδεικνύεται ως εξής:

$$U(x_2) = -\int_{x_0}^{x_2} = -\left[\int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2}\right] = -\int_{x_0}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} =$$

$$= U(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} = U(x_1) + W_{21} \quad , \text{με } W_{21} > 0.$$

Το W_{21} εκφράζει το έργο της δύναμης του πεδίου (ελκτική) για μετατόπιση μοναδιαίας μάζας από το x_2 στο x_1. Επειδή $\underset{\sim}{s}_{21} \uparrow\uparrow \underset{\sim}{f}$ το W_{21} είναι θετικό.

, <u>Θέματα.</u>

Θέμα 1ο// [<u>Βαθμίδα</u> - <u>απόκλιση</u> - <u>στροβιλισμός</u>]

(Στο παρόν θέμα εισάγονται οι έννοιες:

βαθμίδα βαθμωτής συνάρτησης ϕ: $\operatorname{grad}\phi = \underset{\sim}{\nabla}\phi$,

απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}$: $\operatorname{div}\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{f}$,

στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης $\underset{\sim}{F}$: $\operatorname{curl}\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{f}$,

όπου $\underset{\sim}{\nabla}$, ο διαφορικός τελεστής που ονομάζεται ανάδελτα και ο οποίος δίνεται από τη σχέση,

$$\underset{\sim}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underset{\sim}{k},$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες).

Αν $\phi = x^2yz^3$ και $\underset{\sim}{F} = xz\underset{\sim}{i} - y^2\underset{\sim}{j} + 2x^2y\underset{\sim}{k}$, βρείτε τα

(α) $\operatorname{grad}\phi$ (β) $\operatorname{div}\underset{\sim}{F}$ (γ) $\operatorname{curl}\underset{\sim}{F}$ (δ) $\operatorname{div}(\phi\cdot\underset{\sim}{F})$

(ε) $\operatorname{curl}(\phi\underset{\sim}{F})$

<u>Λύση.</u>

(α) $\underset{\sim}{\nabla}\cdot\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underset{\sim}{k}\right)\cdot\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underset{\sim}{k} =$

$= 2xyz^3 \underset{\sim}{i} + x^2z^3 \underset{\sim}{j} + 3x^2yz^2 \underset{\sim}{k}.$

(β) $\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underset{\sim}{k}\right) \cdot \left(xz\underset{\sim}{i} - y^2\underset{\sim}{j} + 2x^2y\underset{\sim}{k}\right) =$

$$= \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2x^2y)}{\partial z} = z - 2y.$$

(γ) $\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underset{\sim}{k}\right) \times \left(xz\underset{\sim}{i} - y^2\underset{\sim}{j} + 2x^2y\underset{\sim}{k}\right) =$

$$= \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial(2x^2y)}{\partial y} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial z}\right]\underset{\sim}{i} - \left[\frac{\partial(2x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}\right]\underset{\sim}{j} + \left[\frac{\partial(-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y}\right]\cdot\underset{\sim}{k} =$$

$$= 2x^2\underset{\sim}{i} + (x - 4xy)\underset{\sim}{j}.$$

(δ) $div(\phi \underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot (\phi \underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \left(x^3yz^4\underset{\sim}{i} - x^2y^3z^3\underset{\sim}{j} + 2x^4y^2z^3\underset{\sim}{k}\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3yz^4\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2y^3z^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2x^4y^2z^3\right) =$$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2.$$

(ε) $curl(\phi \underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{\nabla} \times (\phi \underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{\nabla} \times \left(x^3yz^4\underset{\sim}{i} - x^2y^3z^3\underset{\sim}{j} + 2x^4y^2z^3\underset{\sim}{k}\right) =$

$$= \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2\right)\underset{\sim}{i} + \left(4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3\right)\underset{\sim}{j} - \left(2xy^3z^3 + x^3z^4\right)\underset{\sim}{k}.$$

Θέμα 2ο

Έστω το πεδίο δυνάμεων,

$\underset{\sim}{F} = (2xy + z^3)\,\underset{\sim}{i} + (x^2 + 2y)\,\underset{\sim}{j} + (3xz^2 - 2)\,\underset{\sim}{k}$.

(α) Δείξτε ότι $\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$ (τότε το $\underset{\sim}{F}$ ονομάζεται <u>αστρόβιλο πεδίο</u>).

(β) Βρείτε τη βαθμωτή συνάρτηση ϕ ώστε $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \phi$.

<u>Λύση.</u>

(α)

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 3xz^2 - 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

(β) Έστω ότι ισχύει $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \phi$. Τότε,

$$\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{\nabla}\phi \cdot d\underset{\sim}{r} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\underset{\sim}{k}\right) \cdot \left(dx\,\underset{\sim}{i} + dy\,\underset{\sim}{j} + dz\,\underset{\sim}{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = d\phi .$$

Δηλαδή το $\underset{\sim}{f} \cdot d\underset{\sim}{r}$ είναι ένα ολικό διαφορικό. Άρα,

$$d\phi = \underset{\sim}{f} \cdot d\underset{\sim}{r} = (2xy + z^3)dx + (x^2 + 2y)dy + (3xz^2 - 2)dz =$$

$$= \left[(2xy + z^3)dx + x^2 dy + 3xz^2\,dz\right] + 2y\,dy - 2\,dz =$$

$$= d(x^2y + xz^3) + d(y^2) + d(-2z).$$

Επομένως $\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z$.

Θέμα 3ο//

Αν $\underset{\sim}{F} = (3x^2 - 6yz)\,\underset{\sim}{i} + (2y + 3xz)\,\underset{\sim}{j} + (1 - 4xyz^2)\,\underset{\sim}{k}$, υπολογίστε το έργο $\int_c \underset{\sim}{f} \cdot d\underset{\sim}{r}$ από το $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$ κατά μήκος των ακόλουθων καμπυλών (δρόμων):

(α) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,$

(β) ευθείες: από το (0,0,0) στο (0,0,1), στο (0,1,1) και στο (1,1,1),

(γ) ευθεία από το (0,0,0) στο (1,1,1).

<u>Λύση.</u>

(α) Θα βρούμε πρώτα το διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης C. Κατά μήκος της C λοιπόν, έχουμε,

$$\underset{\sim}{F}=(3t^2-6t^5)\underset{\sim}{i}+(2t^2+3t^4)\underset{\sim}{j}+(1-4t^9)\underset{\sim}{k} \quad (*),$$

και

$$\underset{\sim}{r}=x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}+z\underset{\sim}{k}=t\cdot\underset{\sim}{i}+t^2\underset{\sim}{j}+t^3\cdot\underset{\sim}{k} \quad , \text{δηλαδή}$$

$$d\underset{\sim}{r}=dt(\underset{\sim}{i}+2t\underset{\sim}{j}+3t^2\underset{\sim}{k}) \quad (**).$$

$$(*) \text{ κ' } (**) \rightsquigarrow \int_C \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}=\int_0^1 (3t^2-6t^5)dt+(4t^3+6t^5)dt+(3t^2-12t^{11})dt=$$

$$=2.$$

(β) Κατά μήκος της ευθείας από το (0,0,0) στο (0,0,1) έχουμε ότι,

$x=0 \Rightarrow dx=0,$

$y=0 \Rightarrow dy=0,$

το z μεταβάλλεται από το 0 στο 1.

Άρα,

$$\int_{z=0}^{1}(3\cdot 0^2+6\cdot 0\cdot z)\cdot 0+(2\cdot 0+3\cdot 0\cdot z)\cdot 0+(1-4\cdot 0\cdot 0\cdot z^2)dz=$$

$$=\int_0^1 dz=1.$$

Ακολούθως, για τη δεύτερη ευθεία, έχουμε,

$x=0 \Rightarrow dx=0,$

$z=0 \Rightarrow dz=0,$

το y μεταβάλλεται από το 0 στο 1.

Έτσι βρίσκουμε,

$$\int_{y=0}^{1} = \int_0^1 2y\,dy = 1,$$

και όμοια για τον τρίτο δρόμο,

$$\int_{x=0}^{1} = \int_0^1 (3x^2-6)\,dx = -5.$$

Αθροίζονται,

$$\int_C \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = -3.$$

(γ) $\int_C \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = \int_C (3x^2-6yz)dx + (2y+3xz)dy + (1-4xyz^2)dz =$

$$= \int_0^1 dt\,(2t+1-4t^4) = \frac{6}{5},$$

[όπου θέσαμε $x=t, y=t, z=t$].

Θέμα 4ο

Αν το $\underset{\sim}{F} = (2xy+z^3)\underset{\sim}{i} + (x^2+2y)\underset{\sim}{j} + (3xz^2-2)\underset{\sim}{k}$,

(α) Αποδείξτε ότι το έργο $\int_C \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης C, η οποία συνδέει τα σημεία $(1,-1,1)$ και $(2,1,2)$.

(β) Βρείτε την τιμή του.

Λύση.

(α) Από το θέμα 2 έπεται ότι $\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$ ή το στοιχειώδες έργο είναι ολικό διαφορικό, δηλαδή,

$$\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = d\phi = d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z).$$

Συνεπώς,

$$\int_c \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = \int_c d\phi = \phi \Big]_{\text{άκρο } 1}^{\text{άκρο } 2}$$, ανεξάρτητο του δρόμου.

(β) $$\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r} = \int_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} d(x^2y+xz^3+y^2-2z) = (x^2y+xz^3+y^2-2z)\Big]_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} =$$

$= 18$.

Θέμα 5ο//

Βρείτε το έργο που παρήγαγε η δύναμη,

$$\underset{\sim}{F} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k},$$

κατά την κίνηση ενός αντικειμένου κατά μήκος της ευθύγραμμης διαδρομής,

$$\underset{\sim}{r} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k}.$$

Λύση

$$W = \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r} = (2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k})\cdot(3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k}) = 6-2+5 = 9.$$

Θέμα 6ο//

Αν το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου είναι,

$$\underset{\sim}{r} = a\cos\omega t\,\underset{\sim}{i} + b\sin\omega t\,\underset{\sim}{j},$$

τότε,

(α) Βρείτε την κινητική ενέργεια του υλικού σημείου στα σημεία:

A ($\cos\omega t = 1$, $\sin\omega t = 0$) και

B ($\cos\omega t = 0$, $\sin\omega t = 1$).

(β) Βρείτε το έργο από το A στο B αν στο υλικό σημείο ασκείται δύναμη $\underset{\sim}{F} = -m\omega^2\underset{\sim}{r}$.

(γ) Τι παρατηρείτε;

(δ) Δείξτε ότι το ολικό έργο που παρήγαγε το πεδίο κατά την κίνηση του υλικού σημείου μια φορά γύρω από την έλλειψη είναι μηδέν.

Λύση

(α) $\underset{\sim}{v} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \frac{d(a\cos\omega t)}{dt}\,\underset{\sim}{i} + \frac{d(b\sin\omega t)}{dt}\,\underset{\sim}{j} =$

$= -\omega a\sin\omega t\,\underset{\sim}{i} + \omega b\cos\omega t\,\underset{\sim}{j}.$

Άρα $T = \frac{1}{2}m\underset{\sim}{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\omega^2 a^2\sin^2\omega t + \omega^2 b^2\cos^2\omega t\right),$

και έτσι,

$T_{(A)} = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \quad , \quad T_{(B)} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2.$

(β) $W_{AB} = \int_A^B \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r} = \int_A^B (-m\omega^2\underset{\sim}{r})\,d\underset{\sim}{r} =$

$= -m\omega^2\int_A^B \underset{\sim}{r}\cdot d\underset{\sim}{r} \quad \underline{\underline{d(\underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{r}) = 2r\,dr}} \quad -\frac{1}{2}m\omega^2\int_A^B d(\underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{r}) =$

$= \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\Big]_A^B = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2).$

(γ) Παρατηρούμε ότι:

Έργο από το A στο B = Μεταβολή κινητικής Ενέργειας στα άκρα A & B.

Αυτό είναι ειδική περίπτωση του γενικού θεωρήματος έργου-ενέργειας, που θα γνωρίσουμε στο 5ο κεφάλαιο.

(δ) Στο σημείο A είναι $t=0$ και στο τελικό σημείο, μετά από μια πλήρη στροφή είναι $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Ας υπολογίσουμε πρώτα το W_{AB}: $W_{AB} = \int_A^B \underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r} = \int_0^{2\pi} -m\omega^2(a\cos\omega t\,\underset{\sim}{i} + b\sin\omega t\,\underset{\sim}{j})\cdot(-\omega a\sin\omega t\,\underset{\sim}{i} + \omega b\cos\omega t$

$\underset{\sim}{j})\,dt = \int_0^{\pi/2\omega} m\omega^3(a^2 - b^2)\sin\omega t\cos\omega t\,dt.$ Άρα,

$W_{\text{ολ}} = \int_0^{2\pi/\omega} m\omega^3(a^2 - b^2)\sin\omega t\cos\omega t\,dt = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)\sin^2\omega t\Big]_0^{2\pi/\omega} = 0.$

Θέμα 7ο//

Αν $\mathbf{F}$ είναι η δύναμη που ασκείται σ' ένα υλικό σημείο που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, δείξτε ότι η ισχύς P που δίνεται στο σημείο είναι,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Λύση

$P = \dfrac{dW}{dt}$, εξ ορισμού (όπου W το έργο).

Επειδή $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ έχουμε ότι,

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

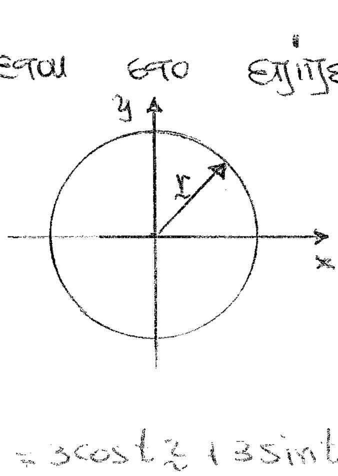
Θέμα 8ο//

Βρείτε το έργο που παράγεται κατά την κυκλική κίνηση υλικού σημείου στο επίπεδο xy, αν ο κύκλος έχει κέντρο το (0,0,0) και ακτίνα 3 και η δύναμη, που ασκείται στο σημείο είναι,

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\,\mathbf{i} + (x + y - z^2)\,\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\,\mathbf{k}.$$

Λύση

Η κίνηση γίνεται στο επίπεδο z=0 και ισχύει ότι,



$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$,

και άρα

$$W=\int_c \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r}=\int_c\left[(2x-y)\underset{\sim}{i}+(x+y)\underset{\sim}{j}+(3x-2y)\underset{\sim}{k}\right]\cdot(dx\,\underset{\sim}{i}+dy\,\underset{\sim}{j}+0\underset{\sim}{k})=$$

$$=\int_c (2x-y)dx+(x+y)dy=$$

$$=\int_{t=0}^{2\pi}\left[2(3\cos t)-3\sin t\right](-3\sin t)dt+(3\cos t+3\sin t)3\cos t\,dt=$$

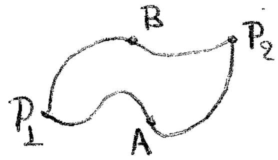
$$=18\pi.$$

Θέμα 9ο//

Δείξτε ότι αν το έργο από ένα σημείο P_1 στο P_2 του επιπέδου είναι ανεξάρτητο του δρόμου που συνδέει τα P_1 και P_2 τότε $\oint \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r}=0$ για κάθε κλειστό δρόμο και αντιστρόφως.

<u>Λύση</u>

($\Rightarrow$) Η $P_1AP_2BP_1$ είναι μια κλειστή καμπύλη και άρα,



$$\oint \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r}=\int_{P_1AP_2BP_1}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}=\int_{P_1AP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}+\int_{P_2BP_1}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}=\int_{P_1AP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}-\int_{P_1BP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}=0.$$

($\Leftarrow$) Αν τώρα, $\oint \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_{P_1AP_2BP_1}\underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{r}=0\Rightarrow\int_{P_1AP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}+\int_{P_2BP_1}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}=0\Rightarrow\int_{P_1AP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}-\int_{P_1BP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{P_1AP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}=\int_{P_1BP_2}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{r}.$$

Θέμα 10ο//

Έστω το εξής πεδίο δυνάμεων στον $\mathbb{R}^3$,

$$\underset{\sim}{F} = f_1 \cdot \underset{\sim}{i} + f_2 \cdot \underset{\sim}{j} + f_3 \cdot \underset{\sim}{k}.$$

Να δειχτεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η έκφραση, $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, να είναι ένα τέλειο διαφορικό είναι ότι το πεδίο είναι αστρόβιλο, δηλαδή,

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}.$$

Λύση

($\Rightarrow$) Έστω ότι το $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ είναι τέλειο διαφορικό, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε,

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz.$$

Έπεται ότι,

$$\left(f_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx + \left(f_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy + \left(f_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ f_2 = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ f_3 = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right\} \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \phi \Rightarrow \underset{\sim}{\nabla} \times F = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{\nabla} \phi = 0.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow (\exists$ βαθμωτό $\phi)$: $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \phi$ και άρα $\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{\nabla} \phi \cdot d\underset{\sim}{r} = d\phi.$

Θέμα 11ο//

Δείξτε ότι η έκφραση,

$$(y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z) dx + 2z^3 y \sin y \, dy + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) dz,$$

είναι τέλειο διαφορικό.

Λύση

Θεωρώντας την,

$$\underset{\sim}{F} = (y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z)\,\underset{\sim}{i} + 2z^3 y \sin y\,\underset{\sim}{j} + (3y^2 z^2 \sin x - x^4)\,\underset{\sim}{k},$$

έχουμε ότι,

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}.$$

Οπότε από το θέμα 10 ~ ότι η δοσμένη έκφραση είναι τέλειο διαφορικό.

Θέμα 12ο//

Δείξτε ότι σε πολικές συντεταγμένες r, θ οι συνιστώσες του grad ενός βαθμωτού V είναι,

$$\underset{\sim}{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\underset{\sim}{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta.$$

Λύση

Θα είναι $\underset{\sim}{\nabla} \cdot V = G \cdot \underset{\sim}{e}_r + H \cdot \underset{\sim}{e}_\theta.$

Υπολογίζουμε το $d\underset{\sim}{r}$ σε πολικές συντεταγμένες:

$$d\underset{\sim}{r} = dr \cdot \underset{\sim}{e}_r + r \cdot d\theta \cdot \underset{\sim}{e}_\theta.$$

Επιπλέον υπολογίζουμε τη βαθμίδα του $V \cdot d\underset{\sim}{r}$:

$$\underset{\sim}{\nabla} V d\underset{\sim}{r} = dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta,$$

Και αντικαθιστώντας στο $\underset{\sim}{\nabla} V d\underset{\sim}{r}$ έχουμε,

$$(G\underset{\sim}{e}_r + H\underset{\sim}{e}_\theta)(dr \cdot \underset{\sim}{e}_r + r\, d\theta \cdot \underset{\sim}{e}_\theta) =$$

$$= G\,dr + H r\, d\theta = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta.$$

Συνεπώς: $G = \partial V/\partial r$ και $H = (1/r)\,\partial V/\partial \theta.$

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

1 Υλικό σημείο

Ο νόμος του Νεύτωνα λέει ότι ένα υλικό σημείο μάζας m, το οποίο κινείται στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και στο οποίο ασκείται δύναμη $\underset{\sim}{F}$ αποκτά επιτάχυνση τέτοια, ώστε,

$$\boxed{\underset{\sim}{F} = m \cdot \underset{\sim}{a}} \qquad (1).$$

Επειδή $\underset{\sim}{a} = \dot{\underset{\sim}{v}} = \frac{\dot{\underset{\sim}{p}}}{m}$, έπεται ότι ο νόμος του Νεύτωνος μπορεί να γραφτεί:

$$\boxed{\underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{p}}} \qquad (2).$$

Ο νόμος του Νεύτωνος είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με άγνωστο τη θέση του υλικού σημείου ως συνάρτηση του χρόνου. Θέτοντας $m=1$, ο νόμος του Νεύτωνος γράφεται,

$$\boxed{\ddot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})} \qquad (3),$$

όπου $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(t)$ η θέση του υλικού σημείου, δηλαδή,

$$\underset{\sim}{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \underset{\sim}{x}(t).$$

Έτσι, αυτό είναι ισοδύναμο με ένα μη γραμμικό σύστημα τριών συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, ως προς τις (άγνωστες), συνιστώσες της θέσης,

$$\underset{\sim}{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

και άρα ο νόμος του Νεύτωνος μπορεί να γραφτεί με τη μορφή συστήματος ως εξής:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(x,y,z) \\ \ddot{y} &= f_2(x,y,z) \\ \ddot{z} &= f_3(x,y,z) \end{aligned}} \qquad (4)$$

3 βαθμοί ελευθερίας

όπου $\underset{\sim}{F} = (f_1, f_2, f_3)$ είναι η δοθείσα δύναμη, που ασκείται στο σύστημα.

<u>Παρατήρηση</u>: Για μια <u>δι-διάστατη κίνηση</u>, η δοθείσα γράφεται προφανώς,

$$\ddot{x} = f_1(x,y),$$

2- βαθμοί ελευθερίας

$$\ddot{y} = f_2(x,y).$$

Ενώ για μια <u>μονο-διάστατη κίνηση</u> έχουμε,

$$\ddot{x} = f(x).$$

1 βαθμός ελευθερίας

Εάν το πεδίο $\underset{\sim}{F}$ ικανοποιεί τη σχέση $\underset{\sim}{F} = -\underset{\sim}{\nabla} \cdot U$, όπου $U(x,y,z)$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε το $\underset{\sim}{F}$ ονομάζεται <u>συντηρητικό</u>.

<u>Θεώρημα 1</u> (1ος νόμος του Νεύτωνα).

Ένα υλικό σημείο διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή μονοδιάστατης ομαλής κίνησης εκτός αν αναγκαστεί να μεταβάλλει την κατάσταση αυτή από δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.

<u>Απόδειξη</u>.

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{P}} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{P} = \text{σταθερό} \quad \blacksquare$$

<u>Θεώρημα 2</u> (<u>έργου - ενέργειας</u>).

Το έργο W_{AB}, που παράγει η δύναμη, που ασκείται σε ένα υλικό σημείο και το μεταφέρει από τη θέση A, με κινητική ενέργεια T_A, στη θέση B, με κινητική ενέργεια T_B, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων, δηλαδή,

$$\boxed{W_{AB} = T_B - T_A} \qquad (5).$$

<u>Απόδειξη</u>

Θα δειχτεί για Σ.1.Β.Ε. Ισχύει,

$$\alpha = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx} \quad (*),$$

και επειδή, $f = m\alpha \overset{(*)}{=} m\cdot u\dfrac{du}{dx}$, έχουμε,

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} f\,dx = \int_{x_A}^{x_B} m\cdot u\frac{du}{dx}\,dx = \int_{u_A}^{u_B} mu\,du =$$

$$= \frac{1}{2}mu_B^2 - \frac{1}{2}m\cdot u_A^2 = T_B - T_A. \quad ■$$

<u>Θεώρημα 3</u> (<u>Νόμος διατήρησης της ενέργειας</u>. Σ.1.Β.Ε).

Η ολική ενέργεια ενός υλικού σημείου που κινείται σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνος $(\ddot{x} = f(x))$, διατηρείται. Δηλαδή η $E(x(t), \dot{x}(t))$ είναι ανεξάρτητη του t.

<u>Απόδειξη</u>

Ισχύει ότι,

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)\right) = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} =$$

$$= \dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\right) = \dot{x}(m\ddot{x} - f) = 0. \quad ■$$

<u>Θεώρημα 4</u> (<u>Νόμος διατήρησης της ενέργειας</u>. Σ.2.Β.Ε).

Η ολική <u>ενέργεια</u> ενός <u>συντηρητικού</u> <u>συστήματος</u> είναι

$$E=\frac{1}{2}m\dot{\underset{\sim}{x}}^2+U(\underset{\sim}{x}), \text{ όπου } \underset{\sim}{x}^2=\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{x},$$

διατηρείται. Δηλαδή η $E(\underset{\sim}{x}(t),\dot{\underset{\sim}{x}}(t))$ είναι ανεξάρτητη του t.

Απόδειξη

$$\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\underset{\sim}{x}}^2+U(x)\right)=m\dot{\underset{\sim}{x}}\cdot\ddot{\underset{\sim}{x}}+\underset{\sim}{\nabla}\cdot U\cdot\dot{\underset{\sim}{x}}=\dot{\underset{\sim}{x}}\cdot(m\ddot{\underset{\sim}{x}}+\underset{\sim}{\nabla}\cdot U)=$$

$$=\dot{\underset{\sim}{x}}\cdot(m\ddot{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{F})=0 \quad . \blacksquare$$

Θεώρημα 5 (Νόμος διατήρησης της ορμής).

Αν η συνολική δύναμη που ασκείται σ' ένα υλικό σημείο είναι μηδέν, τότε η συνολική ορμή διατηρείται. Δηλαδή,

$$\frac{d\underset{\sim}{P}}{dt}=\underset{\sim}{0}.$$

Απόδειξη

Από το νόμο του Νεύτωνα,

$$\underset{\sim}{F}=\dot{\underset{\sim}{P}} \xRightarrow{\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0}} \dot{\underset{\sim}{P}}=\underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{P}=\text{σταθερό} \quad . \blacksquare$$

Πριν συνεχίσουμε, θα δώσουμε τον ορισμό του κεντρικού πεδίου δυνάμεων. Ένα πεδίο δυνάμεων $\underset{\sim}{F}$ λέγεται κεντρικό αν και μόνον αν ισχύει,

$$\boxed{\underset{\sim}{F}=\phi(r)\,\underset{\sim}{r}}\quad, r=|\underset{\sim}{r}|. \quad (6)$$

Τότε, από το νόμο του Νεύτωνος ($m\ddot{\underset{\sim}{r}}=\underset{\sim}{F}$) προκύπτει ότι $m\ddot{\underset{\sim}{r}}=\phi(r)\,\underset{\sim}{r}$, δηλαδή τα διανύσματα της επιτάχυνσης ($\ddot{\underset{\sim}{r}}$) και της θέσης ($\underset{\sim}{r}$) είναι συγγραμμικά.

Θεώρημα 6. (Νόμος διατήρησης της στροφορμής).

Σε ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων, η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς το κέντρο O (του πεδίου) δεν αλλάζει με το χρόνο.

Απόδειξη.

Η παράγωγος της στροφορμής είναι,

$$\dot{\underset{\sim}{L}} = (\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p})^{\cdot} = \dot{\underset{\sim}{r}} \times p + \underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{p}} = (\dot{\underset{\sim}{r}} \times m\dot{\underset{\sim}{r}}) + (r \times m\ddot{\underset{\sim}{r}}) =$$

$$= \underset{\sim}{0} + \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}.$$

Άρα η στροφορμή διατηρείται. ■

Εάν $\underset{\sim}{r}$ και $\ddot{\underset{\sim}{r}}$ δεν είναι παράλληλα τότε,

$$\dot{\underset{\sim}{L}} = \underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{p}} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \tau \quad \text{(ροπή δύναμης)}.$$

Έτσι, μία άλλη διατύπωση του νόμου διατήρησης της στροφορμής είναι η εξής: Αν η συνολική ροπή που ασκείται σ' ένα υλικό σημείο είναι μηδέν, τότε η στροφορμή διατηρείται.

Παρατήρηση: Ο νόμος του Νεύτωνος είναι ο κεντρικός πυρήνας της Κλασσικής Μηχανικής και περιγράφει όλα εκείνα τα φυσικά συστήματα, τα οποία ικανοποιούν τρεις βασικές προϋποθέσεις:

(i) Είναι ντετερμινιστικά, δηλαδή το μέλλον και το παρελθόν του συστήματος καθορίζονται μονοσήμαντα από το παρόν του.

(ii) Έχουν την ιδιότητα της διαφορισιμότητας δηλαδή οι μεταβολές στην κατάσταση του συστήματος περιγράφονται από διαφορίσιμες συναρτήσεις π.χ. τα $\underset{\sim}{r}$, $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{I}$ κλπ.

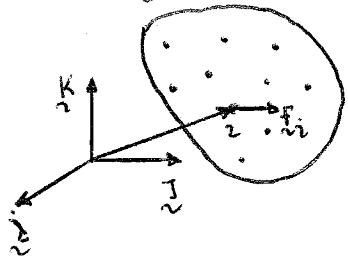
(iii) Έχουν την ιδιότητα της πεπερασμένης διάστασης του χώρου καταστάσεών τους.

2. Συστήματα υλικών σημείων

Έστω ένα σύνολο υλικών σημείων με μάζες m_i και διανύσματα θέσης $\underset{\sim}{r}_i$, $i=1,\dots,n$, το οποίο κινείται στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Τότε μιλούμε για ένα (μηχανικό) σύστημα υλικών σημείων. Οι εξισώσεις του Νεύτωνος σε αυτή την περίπτωση είναι οι εξής:

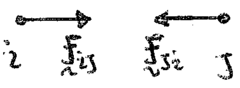
$$\boxed{m_i \cdot \ddot{\underset{\sim}{r}}_i = \underset{\sim}{F}_i \quad , i=1,\dots,n} \qquad (7),$$

όπου $\underset{\sim}{F}_i$ η δύναμη, που ασκείται στο i-οστό σημείο.



Γενικότερα, υπάρχουν δύο ειδών συστήματα σημείων:
(i) τα διακριτά, όπως το παραπάνω,
(ii) τα συνεχή, π.χ ένα στερεό σώμα ή ένα υγρό.

Συχνά παρατηρείται ότι οι δυνάμεις μεταξύ δύο σημείων του συστήματος είναι ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης, δηλαδή αν $\underset{\sim}{F}_{ij}$ η δύναμη που ασκεί το j σημείο στο i σημείο,



τότε, $\underset{\sim}{F}_{ij} = -\underset{\sim}{F}_{ji}$.

π.χ η δύναμη της βαρύτητας, όπου,

$$\underset{\sim}{F}_{ij} = G\,\frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^3} \cdot \underset{\sim}{r}_{ij},$$

όπου r_{ij} η απόσταση του j από το i υλικό σημείο.

Τέτοιες δυνάμεις ονομάζονται <u>δυνάμεις αλληλεπίδρασης</u> και ένα σύστημα σημείων, στο οποίο όλες οι δυνάμεις που ασκούνται είναι δυνάμεις αλληλεπίδρασης, ονομάζεται κλειστό σύστημα. Σε ένα κλειστό σύστημα η δύναμη $\underset{\sim}{f}_i$, η οποία ασκείται στο i-οστό υλικό σημείο από όλα τα υπόλοιπα σημεία του συστήματος, δίνεται από τη σχέση:

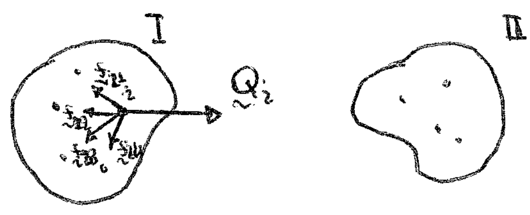
$$\boxed{\underset{\sim}{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \underset{\sim}{f}_{ij}} \qquad (8).$$

Αν ένα σύστημα υλικών σημείων δεν είναι κλειστό (ανοιχτό σύστημα) τότε η συνολική δύναμη που ασκείται στο i-οστό υλικό σημείο, είναι,

$$\boxed{\underset{\sim}{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \underset{\sim}{f}_{ij} + \underset{\sim}{Q}_i} \qquad (9),$$

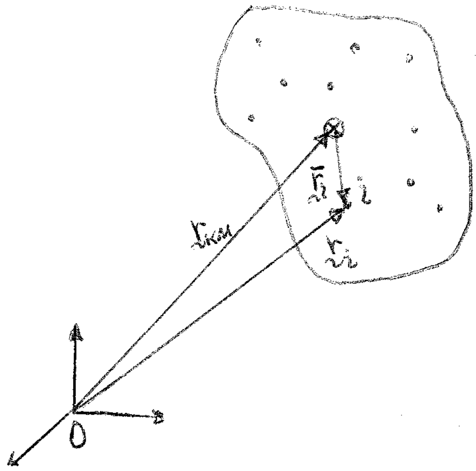
όπου $\underset{\sim}{Q}_i$ είναι η συνολική <u>εξωτερική δύναμη</u> που ασκείται στο i-οστό υλικό σημείο του συστήματος, από σώματα, τα οποία δεν ανήκουν στο σύστημα.

π.χ.



Το σύστημα I του παραπάνω σχήματος είναι ένα ανοιχτό σύστημα και στο i-οστό υλικό σημείο του, εκτός των δυνάμεων $\underset{\sim}{f}_{i1}$, $\underset{\sim}{f}_{i2}$, $\underset{\sim}{f}_{i3}$ και $\underset{\sim}{f}_{i4}$ αλληλεπίδρασης, ασκείται και η εξωτερική δύναμη $\underset{\sim}{Q}_i$ από το σύστημα II.

Θεωρούμε τώρα, ένα σύστημα υλικών σημείων στο χώρο.



Αν το i-οστό σημείο του συστήματος έχει διάνυσμα θέσης r_i ως προς το O και $\bar{r}_i$ ως προς το κέντρο μάζας τότε προφανώς, $r_i = \bar{r}_i + r_{KM}$ (*).

Θεώρημα 1.

Η ολική στροφορμή του συστήματος L ισούται με το άθροισμα της στροφορμής του κέντρου μάζας ως προς το O και της στροφορμής του συστήματος γύρω από το κέντρο μάζας.

Απόδειξη

Η στροφορμή του συστήματος είναι,

$$L = \sum_i L_i = \sum_i (r_i \times p_i) = \sum_i (r_i \times m_i \dot{r}_i) =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_i (\bar{r}_i + r_{KM}) \times m_i (\dot{\bar{r}}_i + \dot{r}_{KM}) =$$

$$= \sum_i m_i \left\{ (\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) + (\bar{r}_i \times \dot{r}_{KM}) + (r_{KM} \times \dot{\bar{r}}_i) + (r_{KM} \times \dot{r}_{KM}) \right\}.$$

Οι δύο μεσαίοι όροι γράφονται ως εξής:

$$\sum_i (m_i \bar{\underset{\sim}{r}}_i) \times \dot{\underset{\sim}{r}}_{KM} + \underset{\sim}{r}_{KM} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \bar{\underset{\sim}{r}}_i\right) = 0,$$

διότι,

$$\sum_i m_i \bar{\underset{\sim}{r}}_i \overset{(*)}{=} \sum_i m_i (\underset{\sim}{r}_i - \underset{\sim}{r}_{KM}) = \sum_i m_i \underset{\sim}{r}_i - \sum_i m_i \underset{\sim}{r}_{KM}.$$

Άρα,

$$\underset{\sim}{L} = M \cdot \underset{\sim}{r}_{KM} \times \dot{\underset{\sim}{r}}_{KM} + \sum_i (\bar{\underset{\sim}{r}}_i \times \bar{\underset{\sim}{p}}_i).$$

Ο πρώτος όρος είναι η στροφορμή του κέντρου μάζας ως προς το Ο, ενώ ο δεύτερος είναι η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας, δηλαδή,

$$\boxed{\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}^{(O)}_{K.M} + \underset{\sim}{L}^{(K.M)}_{συστ.}} \qquad (10).$$

■

Θεώρημα 2.

Η παράγωγος της ορμής ενός συστήματος ισούται με το άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα υλικά σημεία του συστήματος.

Απόδειξη.

Η ορμή του συστήματος είναι,

$$\underset{\sim}{P} = \sum_i m_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i \quad \text{και άρα,}$$

$$\dot{\underset{\sim}{P}} = \sum_i m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i = \sum_i \underset{\sim}{F}_i = \sum_i \left(\sum_j \underset{\sim}{F}_{ij} + \underset{\sim}{Q}_i\right) =$$

$$= \sum_{i,j} \underset{\sim}{F}_{ij} + \sum_i \underset{\sim}{Q}_i = \sum_i \underset{\sim}{Q}_i,$$

όπου $\sum_i \underset{\sim}{F}_i$ η συνισταμένη δύναμη στο i-οστό σωμάτιο, Q_i η συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο i-οστό σωμάτιο και $\sum_{ij} F_{ij}$ οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης, ίσου γι αυτό το λόγο μηδενίζονται στο τελευταίο βήμα της απόδειξης. ■

Πόρισμα 1 (Νόμος διατήρησης της ορμής)

Η ορμή κλειστού συστήματος διατηρείται. ■

Πόρισμα 2

Αν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα σύστημα είναι κάθετη στον x-άξονα, τότε η προβολή P_x της συνολικής ορμής στον x άξονα διατηρείται, δηλ P_x = σταθερο.

Απόδειξη

Είναι $\sum \underset{\sim}{F} \uparrow\uparrow \dot{\underset{\sim}{P}} \xRightarrow{\sum F_x = 0} \dot{\underset{\sim}{P}}_x = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{P}_x =$ σταθερο. ■

Θεώρημα 3

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος κινείται σαν όλες οι μάζες να ήταν συγκεντρωμένες σ' αυτό και όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα να ασκούνταν σε αυτο.

Απόδειξη.

Ισχύει, από τον ορισμό του κέντρου μάζας με παραγώγιση, ότι,

$$\sum_i m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{KM} = \underset{\sim}{P} = \sum_i m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i .$$

Άρα, παραγωγίζοντας πάλι,

$$\left(\sum_i m_i\right) \ddot{\underset{\sim}{r}}_{KM} = \frac{d\underset{\sim}{P}}{dt} = \sum_i \underset{\sim}{F}_i .$$ ■

Πόρισμα 3.

Το κέντρο μάζας ενός κλειστού συστήματος κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. ■

Θεώρημα 4.

Η παράγωγος της στροφορμής ισούται με το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα υλικά σημεία του συστήματος.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι,

$$\frac{d\underset{\sim}{L}}{dt} = \sum_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \times m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i + \sum_i \underset{\sim}{r}_i \times m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i = \underset{\sim}{0} + \sum_i \underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{F}_i =$$

$$= \sum_i \underset{\sim}{r}_i \times \left(\sum_j \underset{\sim}{F}_{ij} + \underset{\sim}{Q}_i \right) = \sum_i \left(\underset{\sim}{r}_i \times \sum_j \underset{\sim}{F}_{ij} \right) + \sum_i \left(\underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{Q}_i \right).$$

Ο τελευταίος όρος στην παραπάνω σχέση, δηλαδή ο όρος $\sum_i (\underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{Q}_i)$ εκφράζει την συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή την $\underset{\sim}{\tau}_{εξ}$.

Ο πρώτος όρος τώρα, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sum_{ij} \left(\underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{F}_{ij} \right) = \sum_{i<j} \left(\underset{\sim}{r}_i \times \underset{\sim}{F}_{ij} \right) + \left(\underset{\sim}{r}_j \times \underset{\sim}{F}_{ji} \right) =$$

$$\overset{\underset{\sim}{F}_{ji} = -\underset{\sim}{F}_{ij}}{=} \sum_{i<j} (\underset{\sim}{r}_i - \underset{\sim}{r}_j) \times \underset{\sim}{F}_{ij} = \underset{\sim}{0}.$$

Άρα,

$$\dot{\underset{\sim}{L}} = \underset{\sim}{\tau}_{εξ}.$$ ■

Πόρισμα 4 (Νόμος διατήρησης στροφορμής).

Η στροφορμή ενός κλειστού συστήματος διατηρείται. ■

Πόρισμα 5.

Αν η συνολική ροπή $\underset{\sim}{\tau}$ σε ένα σύστημα, ως προς τον άξονα z είναι μηδέν, τότε η $\underset{\sim}{L}_z$ είναι σταθερή. ■

Θεώρημα 5 (έργου - ενέργειας).

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας συστήματος ισούται με το έργο της δύναμης $\underset{\sim}{F}$ που ασκείται στο σύστημα κατά τη διαδρομή $\underset{\sim}{r}(t)$.

Απόδειξη.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \ddot{\underset{\sim}{r}}_i = \sum_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot (m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i) = \sum_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \underset{\sim}{F}_i \quad (*),$$

και άρα,

$$T_B - T_A = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dT}{dt} dt \overset{(*)}{=} \sum_i \int_{t_A}^{t_B} (\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \underset{\sim}{F}_i) dt = \sum_i \int_{r_A}^{r_B} \underset{\sim}{F}_i \cdot d\underset{\sim}{r}_i =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = W_{AB} .$$ ■

Θεώρημα 6.

Η ολική ενέργεια $E = T + V$ ενός συντηρητικού συστήματος διατηρείται, δηλαδή μεταξύ δυο χρονικών στιγμών t_A και t_B ισχύει $E_A = E_B$.

Απόδειξη.

Αφού, $T_B - T_A = \int_{r_A}^{r_B} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = \int_{r_A}^{r_B} \underset{\sim}{\nabla} V \, d\underset{\sim}{r} = -(V_B - V_A) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow T_A + V_A = T_B + V_B \Longrightarrow E_A = E_B .$$ ■

Θέματα

Θέμα 1ο//

Ένα υλικό σημείο μάζας $m=3$ κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης σ' ένα πεδίο δυνάμεων έτσι, ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι,

$$\underset{\sim}{r}(t) = (2t^3+t)\underset{\sim}{i} + (3t^4 - t^2+8)\underset{\sim}{j} - 12t^2\underset{\sim}{k}.$$

Βρείτε τα $\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{F}$.

Λύση.

$$\underset{\sim}{v} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = (6t^2+1)\underset{\sim}{i} + (12t^3-2t)\underset{\sim}{j} - 24t\underset{\sim}{k}$$

$$\underset{\sim}{P} = m\cdot\underset{\sim}{v} = 3\underset{\sim}{v} = (18t^2+3)\underset{\sim}{i} + (36t^3-6t)\underset{\sim}{j} - 72t\underset{\sim}{k}$$

$$\underset{\sim}{a} = \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = 12t\underset{\sim}{i} + (36t^2-2)\underset{\sim}{j} - 24\underset{\sim}{k}$$

$$\underset{\sim}{F} = \frac{d\underset{\sim}{P}}{dt} = 36t\underset{\sim}{i} + (108t^2-6)\underset{\sim}{j} - 72\underset{\sim}{k}.$$

Ομοίως αν χρησιμοποιούσαμε $\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$.

Θέμα 2ο//

Ένα υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο xy έτσι, ώστε το διάνυσμα θέσης να είναι,

$$\underset{\sim}{r}(t) = a\cos\omega t\,\underset{\sim}{i} + b\sin\omega t\,\underset{\sim}{j},$$

$a, b, \omega > 0$.

Δείξτε ότι:

(i) η τροχιά είναι έλλειψη,

(ii) η δύναμη κατευθύνεται πάντα προς την αρχή των αξόνων.

<u>Λύση.</u>

(i) Γνωρίζουμε ότι $x(t) = a\cos\omega t$ και $y(t) = b\sin\omega t$ και επιπλέον ότι μία έλλειψη με ημιάξονες a, b δίνεται από την εξίσωση,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 .$$

Άρα, αρκεί να ελέγξουμε αν τα δοθέντα x, y ικανοποιούν αυτή την εξίσωση:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos\omega t}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\sin\omega t}{b}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1,$$

και επομένως η εξίσωση ισχύει.

(ii) Γνωρίζουμε ότι,

$$\underset{\sim}{F} \text{ κεντρική} \iff \underset{\sim}{F} = \Phi(r)\cdot\underset{\sim}{r} .$$

Έχουμε ότι αν m = σταθερή τότε,

$$\underset{\sim}{F} = m\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = m\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(a\cos\omega t\,\underset{\sim}{i} + b\sin\omega t\,\underset{\sim}{j}\right) =$$

$$= m\left(-\omega^2 a\cos\omega t\,\underset{\sim}{i} - \omega^2 b\sin\omega t\,\underset{\sim}{j}\right) =$$

$$= -m\omega^2\left(a\cos\omega t\,\underset{\sim}{i} + b\sin\omega t\,\underset{\sim}{j}\right) =$$

$$= -m\omega^2\underset{\sim}{r} .$$

Άρα η δύναμη είναι κεντρική.

Θέμα 3ο//

Μία σταθερή δύναμη που ασκείται σ' ένα υλικό σημείο μάζας m μεταβάλλει την ταχύτητά του από $\underset{\sim}{v}_1$ σε $\underset{\sim}{v}_2$ σε χρόνο t.

(i) Δείξτε ότι $\underset{\sim}{F} = \frac{m(\underset{\sim}{v}_2 - \underset{\sim}{v}_1)}{t}$.

(ii) Ισχύει το (i) αν η $\underset{\sim}{F}$ δεν είναι σταθερή;

Λύση

1ος τρόπος.

Αφού $\underset{\sim}{F} = m\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt}$ έπεται ότι,

$m\,d\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{F}\cdot dt$, και επειδή για $t=0 \Rightarrow \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_1$, ενώ τη στιγμή t $\Rightarrow \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_2$, έχουμε ολοκληρώνοντας:

$$\int_{\underset{\sim}{v}_1}^{\underset{\sim}{v}_2} m\,d\underset{\sim}{v} = \int_0^t \underset{\sim}{F}\cdot dt \Rightarrow m(\underset{\sim}{v}_2 - \underset{\sim}{v}_1) = \underset{\sim}{F}\cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{F} = \frac{m(\underset{\sim}{v}_2 - \underset{\sim}{v}_1)}{t}.$$

2ος τρόπος.

Αφού, $\underset{\sim}{F} = m\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \frac{F}{m}$,

Ολοκληρώνοντας

$$\underset{\sim}{v} = \frac{\underset{\sim}{F}}{m}t + \underset{\sim}{c}.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες:

Για $t=0 \Rightarrow \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_1$ και άρα $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{v}_1$. Έτσι έχουμε

$$\underset{\sim}{v} = \frac{\underset{\sim}{F}}{m} t + \underset{\sim}{v}_1 .$$

Για $t = t$ ⇝ $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_2$ και άρα $\underset{\sim}{v}_2 = \frac{\underset{\sim}{F}}{m} t + \underset{\sim}{v}_1$, δηλαδή,

$$\underset{\sim}{F} = \frac{m(\underset{\sim}{v}_2 - \underset{\sim}{v}_1)}{t} .$$

(ii) Η απαντηση ειναι οχι, αφου αν η $\underset{\sim}{F}$ ειναι μεταβλητη δεν μπορουμε να κανουμε ολοκληρωση οπως στο (i).

Θέμα 4ο//

Να δειχτει οτι αν η κινηση υλικου σημειου ειναι συντηρητικη — δηλαδη ισχυει $\underset{\sim}{F} = -\underset{\sim}{\nabla} \cdot U$ — τοτε κατά την κινηση του σημειου απο το A στο B, το συνολικο εργο που παραγεται ειναι:

$$W_{AB} = U(A) - U(B) .$$

Λυση

Ισχυει οτι,

$$W_{AB} = \int_A^B \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = -\int_A^B \underset{\sim}{\nabla} \cdot U \, d\underset{\sim}{r} = -\int_A^B dU = -(U_B - U_A) =$$

$$= U_A - U_B .$$

Θέμα 5ο// (εφαρμογη του 4)

Να βρεθεί το εργο που παραγεται, κατα την κινηση υλικου σημειου μεταξυ των σημειων $A = (-2, 1, 3)$ και

$B=(1,-2,-1)$ του συντηρητικού πεδίου δυνάμεων,

$$\underset{\sim}{F}=(y^2z^3-6xz^2)\underset{\sim}{i}+2xyz^3\underset{\sim}{j}+(3xy^2z^2-6x^2z)\underset{\sim}{k}.$$

Λύση

Είναι, $W=\int_A^B \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}=\int_A^B -\underset{\sim}{\nabla}U\cdot d\underset{\sim}{r}=$

$$=\int_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)} -dU = -U(x,y,z)\Big]_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)}=$$

$$=-3x^2z^2+xy^2z^3-c\Big]_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)}=155.$$

Θέμα 6ο

Ένα ομογενές πεδίο δυνάμεων $\underset{\sim}{F}$ είναι ένα πεδίο τέτοιο ώστε $\underset{\sim}{F}=-F_0\underset{\sim}{k}$, $F_0=$σταθερό.

(i) Αποδείξατε ότι αυτό το πεδίο είναι συντηρητικό.

(ii) Βρείτε το δυναμικό αυτού του πεδίου.

(iii) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας m μέσα σ' ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας.

Λύση

(i) Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το $\underset{\sim}{F}$ στον άξονα z. Ο στροβιλισμός του $\underset{\sim}{F}$ είναι,

$$\text{curl}\,\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{F}=\begin{vmatrix}\underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & -F_0\end{vmatrix}=0.$$

Άρα, το πεδίο είναι συντηρητικό.

(ii) Από το (i) έπεται ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση U τέτοια, ώστε $\underset{\sim}{F}=-\underset{\sim}{\nabla}\cdot U \Rightarrow -F_0\underset{\sim}{k}=-\underset{\sim}{\nabla}U \Rightarrow$

$$\Rightarrow -F_0 \underset{\sim}{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\underset{\sim}{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\underset{\sim}{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\underset{\sim}{k}.$$

Άρα $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ και

$$\frac{\partial U}{\partial z} = F_0 \Rightarrow U = F_0 z + c.$$

Αν στο ύψος z_0 το $U=0$ τότε $c = -F_0 z_0$. Άρα

$$U = F_0 (z - z_0).$$

(iii) Το ομογενές πεδίο βαρύτητας είναι,

$$\underset{\sim}{F} = -mg\,\underset{\sim}{k} \quad , \text{δηλαδή } F_0 = mg.$$

Άρα από το (ii) έπεται ότι,

$$U = mg(z - z_0).$$

Θέμα 7ο// (Απλός αρμονικός ταλαντωτής).

Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής είναι το σύστημα που περιγράφεται από το νόμο του Newton, στη μορφή,

$$m\ddot{x} = -Kx \quad , K = \text{σταθερά},$$

ή $$m\frac{d}{dt^2}(x\underset{\sim}{i}) = -Kx\,\underset{\sim}{i},$$

δηλαδή, η δύναμη που ασκείται σ' αυτό, υποτίθεται της μορφής, $\underset{\sim}{F} = -Kx\cdot\underset{\sim}{i}$.

(i) Δείξτε ότι αυτό το σύστημα είναι συντηρητικό.

(ii) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

(iii) Αποδείξτε ότι η ολική ενέργεια διατηρείται.

Λύση

(i) Ισχύει,

$$\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -kx & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Άρα, το σύστημα είναι συντηρητικό.

(ii) Από το (i) έπεται ότι υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση U και εδώ έχουμε,

$$\underset{\sim}{F} = -\underset{\sim}{\nabla} U = -kx\,\underset{\sim}{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -kx\,\underset{\sim}{i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\underset{\sim}{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\underset{\sim}{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\underset{\sim}{k} \right).$$

Άρα, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0$ και $\dfrac{\partial U}{\partial x} = kx$.

Συνεπώς, ολοκληρώνοντας,

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + c .$$

Αν στη θέση $x=0$ το $U=0$, τότε η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι,

$$U = \frac{1}{2}kx^2 .$$

(iii) 1ος τρόπος

Είναι $E = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Άρα,

$$\dot{E} = mu\dot{u} + kxu = u(m\dot{u} + kx) = u(ma + kx) = 0 =$$

$$= u(F + kx) = u(-kx + kx) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow E =$ σταθερή.

2ος τρόπος

Μέσω του νόμου του Newton,

$$m\frac{du}{dt} = -Kx \Rightarrow m\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = -Kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mu\frac{du}{dx} = -Kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mu\,du = -kx\,dx,$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c \equiv E.$$

Γενικό συμπέρασμα: Οι νόμοι της κίνησης περιλαμβάνουν τους νόμους διατήρησης.

Θέμα 8ο

Δείξτε ότι το πεδίο δυνάμεων $\underset{\sim}{F} = x^2yz\underset{\sim}{i} - xyz^2\underset{\sim}{k}$ είναι μη συντηρητικό.

Λύση

$$\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{F} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & 0 & -xyz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -xz^2\underset{\sim}{i} + (x^2y + yz^2)\underset{\sim}{j} - x^2z\underset{\sim}{k},$$

το οποίο γενικώς είναι διάφορο του μηδενός.

Θέμα 9ο

Ένα σημείο μάζας m κινείται στον x-άξονα σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων, δυναμικού $U(x)$ έτσι, ώστε τις στιγμές t_1, t_2 να είναι σε θέσεις x_1, x_2 αντίστοιχα.

Δείξτε ότι η ολική ενέργεια E ικανοποιεί τη σχέση,

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} .$$

Λύση

Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας, προκύπτει ότι,

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - U(x)\right).$$

Ολοκληρώνοντας,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \Rightarrow t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} .$$

Θέμα 10ο // (Εφαρμογή του 9)

Αν $U(x)$ είναι τετραγωνικό δυναμικό, δηλαδή,

$$U(x) = \frac{1}{2} K x^2, \quad K = \text{σταθερά};$$

και για $t=0$ το $x=a$ και $U=0$,

δείξτε ότι $x = a \cdot \cos\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t$ και περιγράψτε την κίνηση.

Λύση

Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας, έχουμε ότι,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} K x^2\right).$$

Επειδή για $x = a$ το $\frac{dx}{dt} = 0$, έχουμε ότι $E = \frac{1}{2} K a^2$.

Έτσι,

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, dt.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c.$$

Αλλά για $t=0$ το $x=a$, οπότε $c=\frac{\pi}{2}$ και συνεπώς,

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t.$$

Η κίνηση είναι ταλάντωση από το $x=a$ έως το $x=-a$, με περίοδο $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Θέμα 11ο

Ένα υλικό σημείο μάζας $m=3$, κινείται στο επίπεδο συντηρητικά, με δυναμική ενέργεια,

$$U(x,y) = 12x(3y-4x),$$

ξεκινώντας από την ηρεμία (στο $t=0$) από το σημείο με διάνυσμα θέσης,

$$\underset{\sim}{r}(t=0) = 10\,\underset{\sim}{i} - 10\,\underset{\sim}{j}.$$

(i) Διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης του προβλήματος καθώς και τις αρχικές συνθήκες.

(ii) Λύστε τις εξισώσεις κίνησης.

(iii) Βρείτε τις θέσεις και τις ταχύτητες ως συναρτήσεις του χρόνου.

Λύση

(i) Το πεδίο δυνάμεων είναι,

$$\underset{\sim}{F} = -\underset{\sim}{\nabla}\cdot U = -\frac{\partial U}{\partial x}\underset{\sim}{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\underset{\sim}{j} = (-36y+96x)\underset{\sim}{i} - 36x\underset{\sim}{j},$$

και ο νόμος του Νεύτωνος δίνει,

$$3\frac{d^2r}{dt^2} = (-36y+96x)\underset{\sim}{i} - 36x\underset{\sim}{j}$$ ή μέσω συνιστωσών,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -12y+32x & (*) \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -12x & (**) \end{cases},$$

όπου για $t=0 \rightsquigarrow \begin{cases} x=10, \text{ δηλαδή } \dot{x}=0 \\ y=-10, \text{ δηλαδή } \dot{y}=0 \end{cases}$ (Αρχικές συνθήκες).

(ii) Λύση του συστήματος:

Από την $(**) \rightsquigarrow x = -\frac{1}{12}\frac{d^2y}{dt^2}$,

και αντικαθιστώντας στην $(*)$,

$$y^{(iv)} - 32y'' - 144y = 0 \quad (***) \quad [\text{εδώ } y=y(x)].$$

Θέτοντας μια δοκιμαστική λύση $y=e^{ax}$ στην $(***)$ έχουμε ότι,

$$a^4 - 32a^2 - 144 = 0 \Rightarrow (a^2+4)(a^2-36) = 0 \Rightarrow a = \pm 2i \text{ ή } a = \pm 6.$$

Άρα οι λύσεις είναι,

$$e^{2it},\ e^{-2it},\ e^{6t},\ e^{-6t}.$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις είναι $\cos 2t, \sin 2t, e^{6t}, e^{-6t}$.

Άρα η γενική λύση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αιτιών, δηλαδή,

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 e^{6t} + c_4 e^{-6t}.$$

Αφού $x = -\frac{1}{12} y'' \Rightarrow x = \frac{1}{3} c_1 \cos 2t + \frac{1}{3} c_2 \sin 2t - 3c_3 e^{6t} - 3c_4 e^{-6t}$,

και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες,

$$c_1 = -6,\ c_2 = 0,\ c_3 = -2,\ c_4 = -2,$$

έχουμε τη μοναδική λύση,

$$y = -6\cos 2t - 2e^{6t} - 2e^{-6t} \quad \text{και} \quad x = -2\cos 2t + 6e^{2t} + 6e^{-6t}.$$

(iii) Είναι,

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} \quad \text{και} \quad \dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{x}\underset{\sim}{i} + \dot{y}\underset{\sim}{j}.$$

Θέμα 12ο//

Ένα σύστημα σημείων αποτελείται από μία μάζα $m_1 = 3$ στο σημείο $(1,0,-1)$, μία μάζα $m_2 = 5$ στο σημείο $(-2,1,3)$, και μία μάζα $m_3 = 2$ στο σημείο $(3,-1,1)$. Βρείτε το κέντρο μάζας του συστήματος.

<u>Λύση</u>

Για το κέντρο μάζας του συστήματος ισχύει,

$$\underset{\sim}{R} = \frac{\sum_i m_i \underset{\sim}{r_i}}{\sum_i m_i}$$, όπου $\underset{\sim}{r_i}$ τα διανύσματα θέσης των υλικών σημείων του συστήματος.

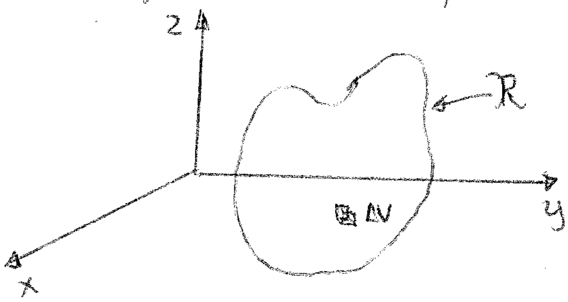
Είναι: $\underset{\sim}{r_1} = \underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{r_2} = -2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{r_3} = 3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$.

Άρα,

$$\underset{\sim}{R} = \frac{3(1,0,-1)+5(-2,1,3)+2(3,-1,1)}{10} = -\frac{1}{10}\underset{\sim}{i} + \frac{3}{10}\underset{\sim}{j} + \frac{7}{5}\underset{\sim}{k}.$$

Θέμα 13ο//

Βρείτε το κέντρο μάζας του τρισδιάστατου χωρίου



του σχήματος.

Λύση

Θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο ΔV, με μάζα $\Delta M_i = \sigma_i \Delta V_i$, όπου σ_i η πυκνότητα κατανομής της μάζας, ανά μονάδα όγκου. Άρα, για το κέντρο μάζας έχουμε,

$$\underset{\sim}{R} = \frac{\sum_i \Delta M_i \underset{\sim}{r_i}}{\sum \Delta M_i} = \frac{\sum_i \underset{\sim}{r_i}\, \sigma_i\, \Delta V_i}{\sum_i \sigma_i\, \Delta V_i} = \frac{\sum_i \underset{\sim}{r_i}\, \sigma_i\, \Delta x_i\, \Delta y_i\, \Delta z_i}{\sum_i \sigma_i\, \Delta x_i\, \Delta y_i\, \Delta z_i}.$$

Παίρνοντας το όριο $\Delta V_i \to 0$ (ή $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i \to 0$), έχουμε - ορίζοντας $\int_R dM = \lim_{i\to\infty} \sum_i \Delta M_i$ - ότι,

$$\underset{\sim}{R} = \frac{\int_R \underset{\sim}{r}\, dM}{\int_R dM}.$$

Ο τύπος αυτός, αν $\underset{\sim}{R} = R_x \underset{\sim}{i} + R_y \underset{\sim}{j} + R_z \underset{\sim}{k}$ και $\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$, γράφεται αναλυτικά,

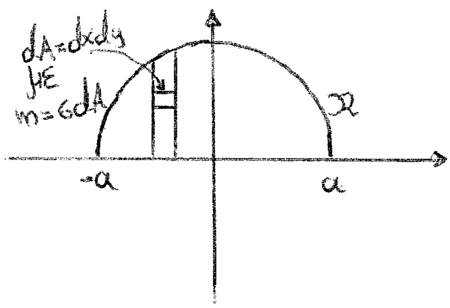
$$R_x = \frac{\iiint x\sigma\,dx\,dy\,dz}{\iiint \sigma\,dx\,dy\,dz}, \quad R_y = \frac{\iiint y\sigma\,dx\,dy\,dz}{\iiint \sigma\,dx\,dy\,dz}, \quad R_z = \frac{\iiint z\sigma\,dx\,dy\,dz}{\iiint \sigma\,dx\,dy\,dz}$$

Θέμα 14ο

Βρείτε το κέντρο μάζας ενός ημικυκλικού τόπου (χωρίου) ακτίνας α.

Λύση

Η εξίσωση της περιφέρειας του κύκλου είναι $x^2+y^2=\alpha^2$.



Επειδή $y \geq 0 \rightsquigarrow y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$.

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας $\underset{\sim}{R}(X, Y)$, δίνονται από τις σχέσεις,

$$X = \frac{\int_\Omega x\sigma\,dA}{\int_\Omega \sigma\,dA} \quad \text{και} \quad Y = \frac{\int_\Omega y\sigma\,dA}{\int_\Omega \sigma\,dA},$$

με $dA = dx \cdot dy$ και σ = σταθερό.

Οπότε,

$$X = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} x\,dx\,dy}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} dx\,dy} = 0,$$

και,

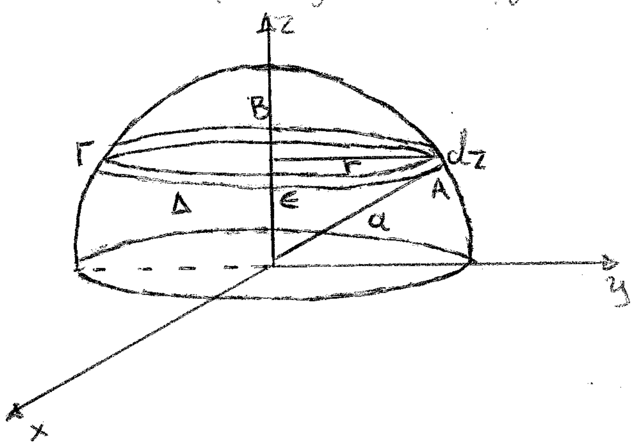
$$\bar{Y} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dx\,dy}{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx\,dy} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Θέμα 15ο

Βρείτε το κέντρο μάζας ενός ομογενούς συμπαγούς ημισφαιρίου (ημισφαιρικού θόλου) ακτίνας a.

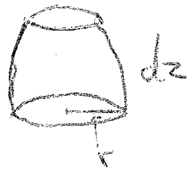
Λύση

Έστω για το κέντρο μάζας $\underline{R} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$. Λόγω



συμμετρίας, $\bar{X} = \bar{Y} = 0$.

Χωρίζουμε το θόλο σε κυκλικές πλάκες ΑΒΓΔΕ κέντρου στο z άξονα: $r^2 + z^2 = a^2$. Άρα ο όγκος κάθε τέτοιου δακτυλίου είναι $\pi r^2 dz$ και συνεπώς η μάζα



του δακτυλίου είναι $\pi\sigma(a^2 - z^2)dz$.

Οπότε,

$$\bar{z} = \frac{\int_0^a \pi z \sigma (a^2 - z^2)\, dz}{\int_0^a \pi \sigma (a^2 - z^2)\, dz} = \frac{3a}{8}.$$

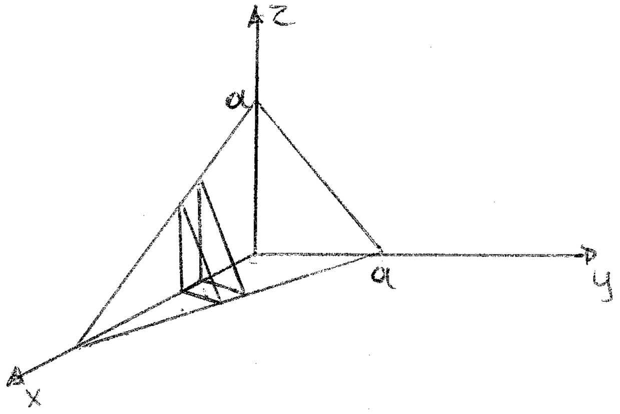
Θέμα 16ο//

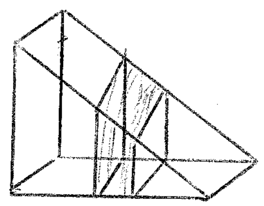
Βρείτε το κέντρο μάζας του χωρίου που σχηματίζεται από τα επίπεδα,

$x+y+z=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

<u>Λύση</u>

Κατά τα γνωστά, για το κέντρο μάζας ισχύει,





$$\underline{R} = \int_{\Omega} \frac{\sigma \underline{r}\, dV}{\sigma\, dV} = \frac{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a} \sigma (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})\, dx\, dy\, dz}{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y} \sigma\, dx\, dy\, dz} =$$

$$= \frac{\frac{a^4}{24}(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k})}{\frac{a^3}{6}} = \frac{a}{4}(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}).$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ

ΠΕΔΙΑ

16 Ἀπεικονίσεις

Συναρτήσεις, όρια και συνέχεια

Έστω $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$, και η απεικόνιση

$$\underset{\sim}{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}.$$

Η $\underset{\sim}{f}$ ονομάζεται μία διανυσματική συνάρτηση ($\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$) πολλών πραγματικών μεταβλητών ($\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$). Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι:

- $$\underset{\sim}{f}(x,y) = (x,y) + (2,3) = (x+2, y+3)$$

  και εδώ $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, είναι μία μεταφορά του επιπέδου, υπό την έννοια ότι κάθε σημείο (x,y) του $\mathbb{R}^2$ απεικονίζεται στο σημείο $(x+2, y+3)$ του $\mathbb{R}^2$.

- Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία βαθμωτή συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$, τότε το $\underset{\sim}{\nabla} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση. Π.χ., αν

$$f(x,y,z) = x^2 y + yz$$

τότε

$$\underset{\sim}{\nabla} f(x,y,z) = (2xy,\ x^2 + z,\ y)$$

και άρα βλέπουμε ότι

$$\underset{\sim}{\nabla} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Γενικότερα, αν έχουμε την $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, τότε γράφουμε $\underset{\sim}{f} = (f_1, \dots, f_m)$, και οι συνιστώσες συναρτήσεις f_k, $k = 1, \dots, m$, είναι $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \underset{\sim}{x} \mapsto f_k(\underset{\sim}{x})$

- Όλες οι συναρτήσεις που γνωρίσαμε ως τώρα,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\underset{\sim}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

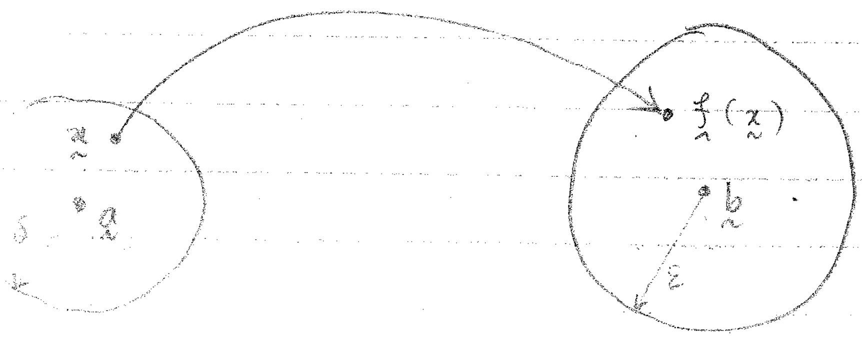
είναι ειδικές περιπτώσεις της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ που μελετούμε εδώ. 'Ενα τελευταίο φυσικό παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι:

- Στάσιμη ροή ρευστού: Το πεδίο ταχύτητας είναι $\underset{\sim}{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \underset{\sim}{x} \mapsto \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ και η ταχύτητα δεν εξαρτάται από τον χρόνο. Στην γενικότερη περίπτωση
$$\underset{\sim}{v}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z,t) \mapsto \underset{\sim}{v}(x,y,z,t)$$
είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου του ρευστού που βρίσκεται στην θέση (x,y,z) την χρονική στιγμή t.

Ως συνήθως, αν $\underset{\sim}{a}$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$, τότε ορίζουμε το $\lim_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ ως εξής.

<u>Ορισμός 1</u>

Το διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ ονομάζεται <u>το όριο της $\underset{\sim}{f}$ στο $\underset{\sim}{a}$</u>, $\lim_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ ή $\lim_{\underset{\sim}{x} \to \underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{b}$, αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε όταν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ και ισχύει ότι $0 < |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{a}| < \delta$, έχουμε
$$|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{b}| < \varepsilon.$$
Με άλλα λόγια, λέμε ότι $\lim_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ αν γιά κάθε περιοχή $\mathcal{S}(\underset{\sim}{b};\varepsilon)$ του $\underset{\sim}{b}$ υπάρχει μία διαγραφείσα περιοχή $\mathcal{S}'(\underset{\sim}{a};\delta)$ του $\underset{\sim}{a}$ έτσι ώστε $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{b};\varepsilon)$ όταν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \cap \mathcal{S}'(\underset{\sim}{a};\delta)$. $\boxtimes$



Μέσω συνιστωσών, το όριο μιάς διανυσματικής συνάρτησης εκφράζεται ως εξής (η απόδειξη παραλείπεται).

<u>Θεώρημα 1</u>

Αν $\underset{\sim}{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, $\underset{\sim}{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\underset{\sim}{a}$ είναι ένα σ.σ. του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$, τότε $\lim\limits_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{b}$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{\underset{\sim}{a}} f_k = b_k$, γιά κάθε $k = 1, \dots, m$. $\boxtimes$

Οι πράξεις μεταξύ δύο $\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορίζονται εντελώς ανάλογα, π.χ., $[\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})$, κ.λ.π. Επιπλέον εύκολα έπονται οι εξής ιδιότητες:

$$\underset{\sim}{f} \pm \underset{\sim}{g} = (f_1 \pm g_1, \dots, f_m \pm g_m) \qquad (1)$$

$$\phi \underset{\sim}{f} = (\phi f_1, \dots, \phi f_m) \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{f} \cdot \underset{\sim}{g} = \sum_{k=1}^{m} f_k g_k \qquad (3)$$

(μόνο στον $\mathbb{R}^3$) $\quad \underset{\sim}{f} \times \underset{\sim}{g} = (f_2 g_3 - f_3 g_2,\ f_3 g_1 - f_1 g_3,\ f_1 g_2 - f_2 g_1)$, (4)

και οι αντίστοιχες γιά τα όρια των αριστερών μελών των εξ. (1)-(4) (-άσκηση).

Εντελώς ανάλογη είναι και η έννοια της συνέχειας.

<u>Ορισμός 2</u>

Η συνάρτηση $\underset{\sim}{f}$ είναι <u>συνεχής στο σημείο $\underset{\sim}{a}$</u> του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ αν $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})| < \varepsilon$$

όταν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ και $|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{a}| < \delta$. $\boxtimes$

Αν το $\underset{\sim}{a}$ <u>δεν</u> είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ τότε η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$, ενώ αν το $\underset{\sim}{a}$ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ τότε ο ορισμός 2 είναι ισοδύναμος με την πρόταση: "Η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$ αν $\lim\limits_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})$."

Οι αποδείξεις του ακόλουθου θεωρήματος είναι ανάλογες των αντίστοιχων θεωρημάτων σε ειδικές περιπτώσεις που έχουμε αποδείξει, και παραλείπονται.

Θεώρημα 2

(i) Η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$ αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα της $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$

(ii) Αν οι $\underset{\sim}{f}$, $\underset{\sim}{g}$ και ϕ είναι συνεχείς στο $\underset{\sim}{a}$, τότε και οι $\underset{\sim}{f} \pm \underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f} \cdot \underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{f} \times \underset{\sim}{g}$ και $\phi \underset{\sim}{f}$ είναι συνεχείς στο $\underset{\sim}{a}$.

Ορισμός 3

Λέμε ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$, και λέμε ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής σε ένα σύνολο $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ αν ο περιορισμός $\underset{\sim}{f}_{\mathcal{S}}$ είναι συνεχής ($\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}_{\mathcal{S}}} = \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \cap \mathcal{S}$ και $\underset{\sim}{f}_{\mathcal{S}}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$ αν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \cap \mathcal{S}$). ⊠

Το επόμενο λήμμα χρησιμεύει στην απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής το οποίο αποδεικνύουμε αμέσως μετά γιά συναρτήσεις $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Λήμμα

Αν $\underset{\sim}{f}: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και αν το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι ανοικτό ως προς το $\underset{\sim}{f}(\mathcal{D}) \equiv \mathcal{R}$, τότε το $\underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A}) = \{ \underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \in \mathcal{A} \}$ είναι ανοικτό ως προς το $\mathcal{D}$.

Απόδειξη

Έστω ένα $\underset{\sim}{x}_0 \in \underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A})$ και τότε έστω $\underset{\sim}{y}_0 = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}_0)$. Αφού το $\mathcal{A}$ είναι ανοικτό ως προς $\mathcal{R}$ και $\underset{\sim}{y}_0 \in \mathcal{A}$, έπεται ότι $\exists$ περιοχή $\mathcal{S}(y_0; \varepsilon)$ τέτοια ώστε $\mathcal{S}(y_0; \varepsilon) \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Επιπλέον, επειδή η f είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}_0$, έπεται ότι γιά κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{x}_0;\delta) \cap \mathcal{D}$ τότε $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{y}_0;\varepsilon) \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Άρα έχουμε ότι $\mathcal{S}(x_0;\delta) \cap \mathcal{D} \subset \underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A})$ και έτσι το $\underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A})$ είναι ανοικτό ως προς $\mathcal{D}$. $\boxtimes$

<u>Θεώρημα 3</u> (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)

Αν $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$ συνεκτικό, τότε $\underset{\sim}{f}(\mathcal{E})$ συνεκτικό.

<u>Απόδειξη</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}}$. Έστω ότι το $\underset{\sim}{f}(\mathcal{E})$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν δύο μή-κενά, ξένα μεταξύ τους σύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ ανοικτά ως πρός το $\underset{\sim}{f}(\mathcal{E})$ τέτοια ώστε $\underset{\sim}{f}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Από το λήμμα 1 όμως έπεται ότι τα σύνολα $\underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A})$ και $\underset{\sim}{f}^*(\mathcal{B})$ είναι ανοικτά ως πρός το $\mathcal{E}$. Επιπλέον αυτά είναι ξένα μεταξύ τους και μη-κενά και

$$\mathcal{E} = \underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \underset{\sim}{f}^*(\mathcal{A}) \cup \underset{\sim}{f}^*(\mathcal{B}).$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{E}$ δεν είναι συνεκτικό — άτοπο. Άρα το $\underset{\sim}{f}(\mathcal{E})$ είναι συνεκτικό. $\boxtimes$

Συναρτήσεις με τιμές πίνακες.

Υποθέτουμε γνωστά τα εξής: Η έννοια του $m \times n$ πίνακα A πραγματικών αριθμών, πρόσθεση πινάκων: $A+B$, γινόμενο πίνακα επί πραγματικό αριθμό, γινόμενο πινάκων, αποδείξεις προσεταιριστικής ιδιότητας: $A(BC)=(AB)C$ και επιμεριστικής ιδιότητας $A(B+C)=AB+AC$, και $(A+B)C=AC+BC$. Αφού αυτές έπεται ο συνήθης τύπος γιά το $(A+B)(C+D)$.

Γιά σταθερά m, n, το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων είναι γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$ με τις συνήθεις πράξεις. Ο γραμμικός χώρος όλων των $(1 \times n)$ πινάκων είναι ισόμορφος με το $\mathbb{R}^n$, δηλ., υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των $1 \times n$ πινάκων και των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ η οποία διατηρεί την πρόσθεση και τον πολ/σμό με πραγματικό αριθμό: Αν $\underset{\sim}{a}=(a_1, \dots, a_n)$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $A = (a_{11} \ \cdots \ a_{1n})$, τότε λέμε ότι το $\underset{\sim}{a}$ <u>αντιστοιχεί</u> στον A αν και μόνο αν $a_j = a_{1j}$, $1 \le j \le n$. Τότε αν τα $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ αντιστοιχούν στους A, B αντίστοιχα, έχουμε ότι το

$$\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b} = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n),$$

αντιστοιχεί στο

$$A+B = (a_{11}+b_{11} \ \cdots \ a_{1n}+b_{1n}),$$

και το

$$r\underset{\sim}{a} = (ra_1, \dots, ra_n),$$

αντιστοιχεί στον

$$rA = (ra_{11} \ \cdots \ ra_{1n}).$$

Άρα υπάρχει ο αναφερθείς ισομορφισμός.

Ομοίως, ο χώρος των $n\times 1$ πινάκων είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ και άρα ο γραμμικός χώρος των $m\times n$ πινάκων (πραγματικών αριθμών) είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{mn}$.

Εισάγουμε τώρα την έννοια της νόρμας πίνακα.

<u>Ορισμός 1</u>

Μία συνάρτηση πραγματικών τιμών ορισμένη στο σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των πινάκων (πραγματικών αριθμών), $\|\cdot\|$, ονομάζεται <u>νόρμα πίνακα</u> αν $\forall A, B \in \mathcal{A}$ και πραγματικούς r, έχουμε

(1) $\|A\| > 0$ αν $A \neq 0$, και $\|0\| = 0$

(2) $\|rA\| = |r|\,\|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (A, B $m\times n$ πίνακες και οι δύο)

(4) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ (A $m\times n$, B $n\times p$ πίνακας).

Μέσω του ισομορφισμού των $n\times 1$ πινάκων με τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, έπεται ότι η ευκλείδια απόσταση είναι μία νόρμα πίνακα:

$|\underset{\sim}{x}| > 0$ αν $\underset{\sim}{x} \neq 0$, και $|\underset{\sim}{0}| = 0$

$|r\underset{\sim}{x}| = |r|\,|\underset{\sim}{x}|$

$|\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}| \leq |\underset{\sim}{x}| + |\underset{\sim}{y}|$ (τριγωνική ανισότητα)

$|\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y}| \leq |\underset{\sim}{x}|\,|\underset{\sim}{y}|$ (ανισότητα Schwarz)

Η πιό συνηθισμένη νόρμα γιά πίνακες είναι η λεγόμενη "ευκλείδια νόρμα πινάκων" που μελετούμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1

Η <u>ευκλείδια νόρμα πινάκων</u>, $\|\cdot\| : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, όπου

$$\|A\| = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right]^{1/2}, \quad A : m\times n \text{ πίνακας}, \tag{1}$$

είναι μία νόρμα πινάκων.

Απόδειξη

Μέσω του ισομορφισμού $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathbb{R}^{mn}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11},\dots,a_{1n},a_{21},\dots,a_{2n},\dots,a_{m1},\dots,a_{mn}) \tag{2}$$

(γιατί τότε $A+B \leftrightarrow \underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$, $rA \leftrightarrow r\underset{\sim}{a}$ - απόδειξη?), η νόρμα (1) είναι το ευκλείδιο μήκος του διανύσματος στην (2), και οι ιδιότητες (1)-(3) του Ορισμού 1 είναι οι θεμελιώδεις ιδιότητες του μήκους διανύσματος. Αποδεικνύουμε την ιδιότητα (4) του Ορισμού 1. Αν $C = AB$, τότε

$$\|A\|^2 \|B\|^2 = \left[\sum_{i,j} a_{ij}^2\right]\left[\sum_{k,l} b_{kl}^2\right] = \sum_{i,j,k,l} a_{ij}^2\, b_{kl}^2$$

και επίσης

$$\|AB\|^2 = \|C\|^2 = \sum_{i,l} c_{il}^2 = \sum_{i,l}\left[\sum_j a_{ij}\, b_{jl}\right]^2 =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} a_{ij}\, b_{jl}\, a_{ik}\, b_{kl}.$$

Άρα

$$\|A\|^2\|B\|^2 - \|AB\|^2 = \sum_{i,j,k,l} a_{ij}^2\, b_{kl}^2 - \sum_{i,j,k,l} a_{ij}\, b_{jl}\, a_{ik}\, b_{kl}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} (a_{ij}\, b_{kl} - a_{ik}\, b_{jl})^2 \geq 0,$$

όπου: $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,n$, $l = 1,\dots,p$. $\boxtimes$

Ορισμός 2

Μιά <u>διανυσματική συνάρτηση με τιμές πίνακες</u>, $F: \mathbb{R}^p \to \mathcal{M}$, έχει τύπο:

$$F(\underset{\sim}{y}) = \begin{pmatrix} f_{11}(\underset{\sim}{y}) & \cdots & f_{1n}(\underset{\sim}{y}) \\ \vdots & & \\ f_{m1}(\underset{\sim}{y}) & \cdots & f_{mn}(\underset{\sim}{y}) \end{pmatrix} \equiv (f_{ij}),$$

όπου οι $f_{ij} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

Έστω τώρα ότι το $\underset{\sim}{x}$ είναι ένα σ.σ. της F.

Ορισμός 3

Ο πίνακας A ονομάζεται το <u>όριο</u> της συνάρτησης με τιμές πίνακες F στο $\underset{\sim}{x}$,

$$\lim_{\underset{\sim}{x}} F = A,$$

αν $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε για $\underset{\sim}{y} \in \mathcal{D}_F$ και $0 < |\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x}| < \delta$, έπεται

$$\| F(\underset{\sim}{y}) - A \| < \varepsilon .$$

Αν η F έχει τιμές $m \times n$ πίνακες, ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας. Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι ανάλογη με εκείνου για συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ και παραλείπεται.

Θεώρημα 2

Αν A, F και x όπως ανωτέρω, τότε $\lim_{\underset{\sim}{x}} F = A$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x} f_{ij} = a_{ij},$$

γιά καθε ένα $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$. $\boxtimes$

17 Η Ιακωβιανή

Η παράγωγος και το διαφορικό.

Αναπτύσσουμε εδώ την θεωρία διαφορισιμότητας συναρτήσεων $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ανεξάρτητα και χωρίς προσφυγή σε συνιστώσες, χωρίς να βασιζόμαστε στα προηγούμενα αντίστοιχα αποτελέσματα γιά συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αυτά αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της θεωρίας που αναπτύσσουμε εδώ.

Ορισμός 1

Η $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται διαφορίσιμη στο σημείο $\underset{\sim}{x}$ αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι ορισμένη σε μία περιοχή $S(\underset{\sim}{x}; r)$ του $\underset{\sim}{x}$ και αν υπάρχει πίνακας A (ανεξάρτητος του $\underset{\sim}{h}$) τέτοιος ώστε $\forall$ $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h} \in S'(\underset{\sim}{x}; r)$,

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + A\underset{\sim}{h} + \Phi(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h})\underset{\sim}{h}, \qquad (1)$$

όπου $\lim\limits_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \Phi(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h}) = 0$, ($0$: μηδενικός πίνακας).

Ο όρος $A\underset{\sim}{h}$ ονομάζεται το διαφορικό της $\underset{\sim}{f}$ στα $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{h}$ και συμβολίζεται με $d\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h})$, ενώ ο πίνακας A ονομάζεται η παράγωγος της $\underset{\sim}{f}$ στο $\underset{\sim}{x}$ και συμβολίζεται με $D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$.

Θεωρούμε όλα τα διανύσματα της (1) ότι είναι διανύσματα-στήλες $(m \times 1)$ και οι A και $\Phi(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h})$ είναι $m \times n$ πίνακες. Τότε η Εξ. (1) γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$\begin{pmatrix} f_1(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) \\ \vdots \\ f_m(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\underset{\sim}{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underset{\sim}{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \phi_{11}(\underset{\sim}{x};h) \cdots & \phi_{1n}(x;h) \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{m1}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) \cdots & \phi_{mn}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(\underset{\sim}{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underset{\sim}{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 \cdot \underset{\sim}{h} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_m \cdot \underset{\sim}{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\phi}_1(\underset{\sim}{x};h) \cdot \underset{\sim}{h} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\phi}_m(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) \cdot \underset{\sim}{h} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{a}_1 \cdot \underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{\phi}_1(\underset{\sim}{x};h) \cdot h \\ \vdots \\ f_m(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{a}_m \cdot \underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{\phi}_m(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) \cdot \underset{\sim}{h} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

δηλ. η Εξ. (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξισώσεων

$$f_i(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = f_i(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{\phi}_i(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) \cdot h, \quad 1 \le i \le m, \qquad (3)$$

όπου:

$$\underset{\sim}{a}_i = (a_{i1} \cdots a_{in}), \text{ και } \underset{\sim}{\phi}_i(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = (\phi_{i1}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}), \ldots, \phi_{in}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})).$$

Παρατηρούμε ότι για $1 \le i \le m$,

$$\lim_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = 0 \iff \lim_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \underset{\sim}{\phi}_i(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{0}$$

και άρα έχουμε:

<u>Θεώρημα 1</u>

Η συνάρτηση $\underset{\sim}{f} = (f_1, \ldots, f_m) : R^n \to R^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα f_i, $1 \le i \le m$, είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$. ⊠

Τότε τα $\underset{\sim}{a}_i$ της Εξ. (3) ικανοποιούν

$$\underset{\sim}{a}_i = \underset{\sim}{D} f_i(\underset{\sim}{x}) \qquad (4)$$

Άρα έχουμε:

$$D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\underset{\sim}{x}) & \cdots & D_n f_1(\underset{\sim}{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\underset{\sim}{x}) & \cdots & D_n f_m(\underset{\sim}{x}) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

και

$$d\underset{\sim}{f} \equiv D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{h} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{D} f_1(\underset{\sim}{x})\cdot\underset{\sim}{h} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{D} f_m(\underset{\sim}{x})\cdot\underset{\sim}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d f_1(\underset{\sim}{x};h) \\ \vdots \\ d f_m(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Η συνάρτηση με τιμές-πίνακες

$$J_{\underset{\sim}{f}} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m & \cdots & D_n f_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{A} \qquad (7)$$

ονομάζεται ο <u>Ιακωβιανός πίνακας</u> της $\underset{\sim}{f}$ και η ορίζουσα $|J_{\underset{\sim}{f}}|$ η <u>Ιακωβιανή</u> (ορίζουσα) της $\underset{\sim}{f}$. Δηλ., δείξαμε ότι η παράγωγος της διαφορίσιμης $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ στο $\underset{\sim}{x}$ είναι η τιμή του Ιακωβιανού πίνακα της $\underset{\sim}{f}$ στο $\underset{\sim}{x}$.

Μία $F: E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{A}$, E ανοικτό, είναι <u>συνεχής στο $\underset{\sim}{x}_0$</u> αν

$$\lim_{\underset{\sim}{x}_0} F = F(\underset{\sim}{x}_0). \qquad (8)$$

Από το θεώρημα 2, σελ. 9, βρίσκουμε ότι η $F = (f_{ij})$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}_0$ αν και μόνο αν κάθε f_{ij} είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}_0$. Έτσι π.χ., ο Ιακωβιανός πίνακας της f είναι συνεχής αν και μόνο αν κάθε μερική παράγωγος $D_j f_i$ της f είναι συνεχής.

Θεώρημα 2

Αν $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και ο $J_{\underset{\sim}{f}}$ είναι συνεχής στο ανοικτό $E \subset \mathbb{R}^n$, τότε η $\underset{\sim}{f}$ είναι διαφορίσιμη στο E, δηλ., $\forall\ \underset{\sim}{x} \in E$ $\exists$ περιοχή $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r) \subset E$: $\forall\ \underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h} \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{x}; r)$

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})\,\underset{\sim}{h} + \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\,\underset{\sim}{h}$$

με

$$\lim_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = 0 . \qquad (9)$$

Ορισμός

Λέμε ότι η $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ανήκει στην κλάση C^k στο ανοικτό σύνολο E, $\underset{\sim}{f} \in C^k$ στο E, αν κάθε συνιστώσα f_i $(i = 1, \dots, m)$ είναι κλάσης C^k στο E δηλ., αν όλες οι μερικές παράγωγοι κ-τάξης των f_i είναι συνεχείς στο E γιά κάθε $i = 1, \dots, m$.

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η $\underset{\sim}{f}(x,y,z) = (x^2+yz,\ z\sin xy)$ είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3$ και βρείτε την $D\underset{\sim}{f}(x,y,z)$ και το $d\underset{\sim}{f}\big((x,y,z);(dx,dy,dz)\big)$.

Λύση

Η τιμή του $J_{\underset{\sim}{f}}$ σε ένα τυχόν σημείο (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$J_{\underset{\sim}{f}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ yz\cos xy & xz\cos xy & \sin xy \end{pmatrix}.$$

Αφού ο $J_{\underset{\sim}{f}}$ είναι συνεχής σε κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, έπεται από το θεωρ. 2 ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι διαφορίσιμη.
Έχουμε :

$$D\underset{\sim}{f}(x,y,z) = J_{\underset{\sim}{f}}(x,y,z),$$

και

$$d\underset{\sim}{f} = \begin{pmatrix} 2x\,dx + z\,dy + y\,dz \\ yz\cos xy\,dx + xz\cos xy\,dy + \sin xy\,dz \end{pmatrix}.$$

Πριν προχωρήσουμε στις βασικές ιδιότητες των διαφορίσιμων συναρτήσεων $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, αποδεικνύουμε ότι ο ορισμός 1 είναι συμβατός με τους αντίστοιχους για συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Κάτι τέτοιο είναι αναγκαίο αφού ο Ορισμός 1 εφαρμόζεται ειδικότερα γιά τέτοιες κλάσεις συναρτήσεων.

(i) Αν η f είναι από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, τότε η Εξ. (1) είναι

$$\big(f(x+h)\big) = \big(f(x)\big) + (a)(h) + \big(\phi(x;h)\big)(h) \quad (10)$$

όπου ο κάθε όρος στην παρένθεση είναι ένας 1×1 πίνακας. Ταυτοποιώντας κάθε τέτοιον 1×1 πίνακα με το μοναδικό του στοιχείο, βρίσκουμε

$$f(x+h) = f(x) + ah + \phi(x;h)\,h, \quad (11)$$

και $a = \lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)]/h = Df(x)$.

Άρα ο ορισμός 1 είναι συμβατός με τους αντίστοιχους της διαφορισιμότητας, παραγώγου και διαφορικού γιά $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι από $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τότε η εξ. (1) γράφεται

$$\underset{\sim}{f}(x+h) = \underset{\sim}{f}(x) + A(h) + \Phi(x;h)(h). \quad (12)$$

Ταυτοποιώντας τον (1×1) πίνακα (h) με τον πραγματικό αριθμό h, έπεται ότι η παράγωγος A αντιστοιχεί στο $\lim \frac{1}{h}[\underset{\sim}{f}(x+h)-\underset{\sim}{f}(x)]$, το οποίο δείχνει την συμβατότητα του ορισμού 1 σε αυτή την περίπτωση.

(iii) Τέλος, αν η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, η (1) γράφεται

$$\left(f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h})\right) = \left(f(\underset{\sim}{x})\right) + A\,\underset{\sim}{h} + \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\,\underset{\sim}{h}, \quad (13)$$

και ταυτοποιώντας τους 1×1 πίνακες $\left(f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h})\right)$ και $\left(f(\underset{\sim}{x})\right)$ με $f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h})$ και $f(\underset{\sim}{x})$, και τους $1\times n$ πίνακες A και $\Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})$ με τα αντίστοιχα διανύσματα $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})$, παίρνουμε

$$f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = f(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{\phi}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\cdot\underset{\sim}{h} \quad (14)$$

η οποία συμφωνεί με την αντίστοιχη σχέση γιά αυτήν την περίπτωση.

Θεώρημα 3

Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$, τότε είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}$.

Απόδειξη

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$, τότε γιά κάθε $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}$ σε μία διαγραφείσα περιοχή του x,

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + A\,\underset{\sim}{h} + \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\,\underset{\sim}{h} \quad (15)$$

με

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to \underset{\sim}{0}} \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = 0 \text{ (μηδενικός πίνακας)}. \quad (16)$$

Άρα από τις (15), (16),

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to \underset{\sim}{0}} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \quad (17)$$

και έτσι η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{x}$. $\boxtimes$

Θεώρημα 4

Αν $\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{g}$ διαφορίσιμες στο $\underset{\sim}{x}$, τότε η $\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ και

$$(18)\quad \begin{cases} D[\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) \\ d[\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = d\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}] + d\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}). \end{cases}$$

Απόδειξη

Εξ' υποθέσεως, $\exists$ περιοχή $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x};r)$ του x τέτοια ώστε $\forall$ σημείο $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h} \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{x};r)$,

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{h} + \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\underset{\sim}{h}$$

όπου $\lim\limits_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}} \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = 0$

και

$$\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{h} + \Psi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\underset{\sim}{h}$$

όπου $\lim\limits_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}} \Psi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = 0$.

Άρα

$$\begin{aligned}[\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{h}) &= \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{h} + \Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + \\ &\quad D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{h} + \Psi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\underset{\sim}{h} = \\ &= [\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) + [D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})]\underset{\sim}{h} + \\ &\quad [\Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) + \Psi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})]\underset{\sim}{h}.\end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}} [\Phi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) + \Psi(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})] = 0$$

έπεται ότι η $\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ και επίσης ισχύουν οι Εξς. (18). ☒

18. Ο κανόνας αλυσίδας

Κανόνας αλυσίδας

Ορισμός 1

Αν $\underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, τότε <u>η σύνδεση</u> $\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}$ είναι συνάρτηση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ με τύπο

$$[\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))$$

κο Π.Ο.

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}} = \{ \underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{g}}, \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{f}} \}. \boxtimes$$

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι η ίδια με εκείνη ανάλογων θεωρημάτων που έχουμε ήδη αποδείξει και παραλείπεται.

Θεώρημα 1

(i) Αν $\underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $\lim_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ συνεχής στο $\underset{\sim}{b}$ με $\underset{\sim}{a}$ σ.σ. του $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}}$, τότε

$$\lim_{\underset{\sim}{a}} (\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{b}).$$

(ii) Αν $\underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ συνεχής στο $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{a})$, τότε η $\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}$ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{a}$. $\boxtimes$

Θεώρημα 2 (Κανόνας αλυσίδας)

Αν η $\underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο ανοικτό E και η $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό που περιέχει το $\underset{\sim}{g}(E)$, τότε η $\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο E και $\forall \underset{\sim}{x} \in E$ έχουμε:

$$D[\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))\, D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) \qquad (1)$$

και

$$d[\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h}) = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))\, d\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h}) = d\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}); d\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{h})). \qquad (2)$$

Απόδειξη

Παίρνουμε $\underset{\sim}{x} \in E$. Αφού η $\underset{\sim}{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})$, υπάρχει ενας $p \times m$ πίνακας A τέτοιος ώστε γιά κάθε $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{k}$ σε μια διαγραφείσα περιοχή $\mathcal{S}'(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}); s)$ του $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})$,

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{k}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})) + [A + \Phi(\underset{\sim}{k})]\underset{\sim}{k}, \quad \lim_{\underset{\sim}{k} \to \underset{\sim}{0}} \Phi(\underset{\sim}{k}) = 0. \tag{3}$$

Ορίζουμε: $\Phi(\underset{\sim}{0}) = 0$ (:μηδενικός $p \times m$ πίνακας) και έτσι η Φ είναι συνεχής στο $\underset{\sim}{0}$. Άρα η (3) ισχύει και γιά $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{k} \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}); s))$.

Αφού $\underset{\sim}{g}$ διαφορίσιμη και άρα συνεχής στο $\underset{\sim}{x}$ έπεται ότι υπάρχει περιοχή του $\underset{\sim}{x}$, $\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)$ με $\underset{\sim}{g}(\mathcal{S}(\underset{\sim}{x}; r)) \subset \mathcal{S}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}); s)$ και επιπλέον υπάρχει πίνακας $m \times n$, B, τέτοιος ώστε

$\forall\ \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h} \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{x}; r)$,

$$\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + [B + \Psi(\underset{\sim}{h})]\underset{\sim}{h}, \quad \lim_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \Psi(\underset{\sim}{h}) = 0. \tag{4}$$

Τώρα θεωρούμε $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h} \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{x}; r)$ και θέτουμε

$$\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h}) - \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}). \tag{5}$$

Τότε

$$\lim_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{0}, \tag{6}$$

και από τις (3), (4) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
[\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h}) &= \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h})) = \\
&= \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})) + [A + \Phi(\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}))]\,\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}) \\
&\overset{(5)}{=} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})) + [A + \Phi(\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}))]\,[B + \Psi(\underset{\sim}{h})]\,\underset{\sim}{h} \\
&= \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})) + AB\,\underset{\sim}{h} + \Theta(\underset{\sim}{h})\,\underset{\sim}{h}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

και:

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to \underset{\sim}{0}} \Theta(\underset{\sim}{h}) = \lim_{\underset{\sim}{h}\to \underset{\sim}{0}} \left[\Phi(\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}))\,B + A\,\Psi(\underset{\sim}{h}) + \Phi(\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{h}))\Psi(\underset{\sim}{h})\right] = 0.$$

Άρα η $\underset{\sim}{f}\circ \underset{\sim}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\underset{\sim}{x}$ και επειδή

$$A = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})) \quad \text{και} \quad B = D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})$$

έπεται

$$D[\underset{\sim}{f}\circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))\, D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})$$

και

$$d[\underset{\sim}{f}\circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h}) = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))\, D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})\,\underset{\sim}{h} =$$

$$= D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))\, d\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})$$

$$= d\underset{\sim}{f}\big(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x});\, d\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{h})\big). \quad \boxtimes$$

Παρατήρηση 1

Από την (1) προκύπτει ότι το $(i\,j)$ στοιχείο του $D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))$ είναι το $D_j[f_i\circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x})$ και ισούται με το γινόμενο της i-γραμμής του $D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))$ επί την j-στήλη του $D\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})$:

$$D_j[f_i\circ \underset{\sim}{g}](\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{D} f_i(\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}))\cdot D_j\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}), \quad (8)$$

Η (8) ονομάζεται επίσης κανόνας αλυσίδας. $\boxtimes$

Μελετούμε τώρα το πέρασμα από τον "αναλλοίωτο" συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα στο συμβολισμό των "μεταβλητών" - πολύ χρήσιμος στις διάφορες εφαρμογές.

Θα το δείξουμε στην ειδική περίπτωση όπου $\underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Τότε $f \circ \underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Ο συμβολισμός των μεταβλητών θέτει:

$$F = f \circ \underset{\sim}{g} \tag{9}$$

$$(x,y,z) = \underset{\sim}{g}(u,v) \tag{10}$$

και
$$w = F(u,v) = f(x,y,z). \tag{11}$$

Έτσι απλουστεύεται κατά πολύ ο συμβολισμός και αποφεύγουμε εκφράσεις του τύπου

$$f(g(u,v))$$

κλπ. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας (1) βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

δηλ.,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \tag{12}$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \tag{13}$$

ή

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \tag{14}$$

και

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}. \tag{15}$$

Παράδειγμα

Εστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν αντί γιά καρτεσιανές συν/νες x, y, περιγράψουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ με πολικές συν/νες, τότε η f μετασχηματίζεται στην συνάρτηση $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F = f \circ \underset{\sim}{g}, \quad \underset{\sim}{g}(r,\theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{g_1}, \underbrace{r\sin\theta}_{g_2})$$

$$[\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,]$$

δηλ., στην

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Εκφράστε τις μερικές παραγώγους της F ως προς εκείνες της f.

Λύση 1: Μέσω παραγώγων

(A) Αναλλοίωτος συμβολισμός

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, έχουμε

$$\underset{\sim}{D} F(r,\theta) = \underset{\sim}{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \underset{\sim}{D}\underset{\sim}{g}(r,\theta)$$

$$= \Big(D_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta), D_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} D_1 g_1(r,\theta) & D_2 g_1(r,\theta) \\ D_2 g_1(r,\theta) & D_2 g_2(r,\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \big(D_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta), D_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\big)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

και έτσι βρίσκουμε

$$D_1 F(r,\theta) = \cos\theta\, D_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\, D_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

και

$$D_2 F(r,\theta) = -r\sin\theta\, D_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\, D_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(B) Συμβολισμός μεταβλητών

Θέτοντας $(x,y) = \underset{\sim}{g}(r,\theta)$ έπεται: $F(r,\theta) = f(x,y)$

και η λύση γράφεται ως εξής:

$$\underset{\sim}{D} F(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial r} & \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}, & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

και έτσι

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \underline{\text{και}} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

<u>Λύση 2: Μέσω διαφορικών</u>

<u>(A) Αναλλοίωτος συμβολισμός.</u>

Εξ' ορισμού,

$$dF\big((r,\theta);(dr,d\theta)\big) = D_1F(r,\theta)\,dr + D_2F(r,\theta)\,d\theta.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$dF\big((r,\theta);(dr,d\theta)\big) = df\Big(\underset{\sim}{g}(r,\theta);\, dg\big((r,\theta);(dr,d\theta)\big)\Big)$$

$$= D_1f\big(\underset{\sim}{g}(r,\theta)\big)\, dg_1\big((r,\theta);(dr,d\theta)\big) + D_2f\big(\underset{\sim}{g}(r,\theta)\big) \times dg_2\big((r,\theta);(dr,d\theta)\big)$$

$$= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)\, D_1f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$+ (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)\, D_2f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \big[\cos\theta\, D_1f(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\, D_2f(r\cos\theta, r\sin\theta)\big]\, dr$$

$$+ \big[-r\sin\theta\, D_1f(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\, D_2f(r\cos\theta, r\sin\theta)\big]\, d\theta.$$

Άρα έχουμε

$D_1F(r,\theta) =$ συντελεστής του dr

$D_2F(r,\theta) =$ —— " —— $d\theta$.

<u>(B) Συμβολισμός μεταβλητών</u>

Θέτουμε: $\quad (x,y) = \underset{\sim}{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\underline{\text{και}} \quad z = F(r,\theta) = f(x,y).$

Τότε

$$dz = \frac{\partial F}{\partial r}\, dr + \frac{\partial F}{\partial \theta}\, d\theta$$

Αλλά επίσης έχουμε

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =$$

$$= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\right) dr +$$

$$+ \left(-r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}\right) d\theta .$$

Άρα

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Άλλος τρόπος γραφής είναι (μόνο με το σύμβολο z):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta$$

και

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x}(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) = \left(\cos\theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial y}\right) dr$$

$$+ \left(-r\sin\theta \frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial z}{\partial y}\right) d\theta .$$

Έτσι τελικά,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial z}{\partial y} . \qquad \boxtimes$$

19

Θεωρία πεπλεγμένων

συναρτήσεων

Ερχόμαστε τέλος στην θεωρία των πεπλεγμένων συναρτήσεων. Το κεντρικό αποτέλεσμα, το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, αυτής της θεωρίας ασχολείται με το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης $F(x,y)=0$ γιά την μία μεταβλητή ως προς την άλλη. Εδώ

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^\ell \tag{1}$$

και $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Γενικώς, θέτοντας απαιτήσεις διαφορισιμότητας γιά την f, οδηγούμαστε σε τοπικά αποτελέσματα. Μιά ειδική περίπτωση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης είναι το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, το οποίο ασχολείται με την λύση της εξίσωσης $F(x,y)=0$ όταν

$$F(x,y) = f(x) - y, \tag{2}$$

δηλ. ερωτούμε πότε αντιστρέφεται η εξίσωση

$$y = f(x), \tag{3}$$

ή με άλλα λόγια πότε λύνεται γιά το x ως προς y, $x = g(y)$. Αυτή η τελευταία περίπτωση θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο.

Ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης ήδη γνωρίζουμε:

(1) Επίλυση γραμμικών συστημάτων: Αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $F(x,y) = Ax - y$: αφινικός μετασχηματισμός (δηλ. γραμμικός μετ/σμός ακολουθούμενος από μεταφορά). Εδώ $df = Ah$ και η γνωστή απαίτηση να είναι ο πίνακας A

αντιστρέψιμος αντιστοιχεί στο ότι το df να είναι αντιστρέψιμο (δηλ. η ιακωβιανή $\neq 0$).

(2) Το θεώρημα πεπλ. συνάρτησης γιά επιφάνειες:
Εδώ $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ζητούμε την λύση της $F(x,y,z)=0$ ως προς z, $z=f(x,y)$. Η απαίτηση είναι: $D_3 F \neq 0$, και τότε έχουμε τοπική λύση.

Στην ειδική περίπτωση της συνάρτησης (1) με

$$F: \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^n,$$

το πρόβλημα γίνεται: Έστω η εξίσωση

$$F^i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \qquad (4)$$

Να λυθεί γιά τους n-αγνώστους $x_1, \dots, x_n$ ως πρός τα $y_1, \dots, y_m$. Υπάρχουν n εξισώσεις. Τότε αν (a,b) είναι μία λύση της (4), το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης λέει ότι γιά y κοντά στο b, η εξίσωση λύνεται γιά τα x ως πρός y αν η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε μια περιοχή του (a,b), και ο Ιακωβιανός πίνακας της F, $D_j F_i(a,b)$, στο (a,b), έχει αντίστροφο, δηλ. αν η ιακωβιανή της F είναι διάφορη του μηδενός. Όταν $m=n$ αυτό το πρόβλημα ανάγεται στο (2), (3) όταν $F=f(x)-y$ και η απόδειξή του γιά $n=2$ ακολουθεί, γιά γενική $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Η απόδειξη του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης στην "γενική" περίπτωση (1) θα αποδειχθεί στην "Πραγματική Ανάλυση I" ως ειδική περίπτωση ανάλογου θεωρήματος σε γραμμικούς χώρους με νόρμα άπειρης διάστασης. Οι υποθέσεις είναι ανάλογες με την περίπτωση πεπερασμένης διάστασης. Ας δούμε λοιπόν την απόδειξη στην περίπτωση όπου

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι κάτω από κάποιες συνθήκες οι εξισώσεις

$$F(x,y,u,v) = 0 \quad , \quad G(x,y,u,v) = 0 \qquad (5)$$

μπορούν να λυθούν γιά τις δύο μεταβλητές ως προς τις άλλες δύο, έστω $u = f(x,y)$ και $v = g(x,y)$.

Έστω ότι οι $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ είναι $C^1(E)$, E ανοικτό, και ότι στο σημείο $\underset{\sim}{P_0} = (x_0, y_0, u_0, v_0) \in E$ ισχύει

$$F(\underset{\sim}{P_0}) = 0 \, , \, G(\underset{\sim}{P_0}) = 0 \, , \text{ και } \begin{vmatrix} D_3 F(\underset{\sim}{P_0}) & D_4 F(P_0) \\ D_3 G(\underset{\sim}{P_0}) & D_4 G(P_0) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

ή θέτοντας γιά την ιακωβιανή

$$J = \left| \frac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)} \right| = \begin{vmatrix} D_3 F(\underset{\sim}{P_0}) & D_4 F(\underset{\sim}{P_0}) \\ D_3 G(\underset{\sim}{P_0}) & D_4 G(\underset{\sim}{P_0}) \end{vmatrix} ,$$

υποθέτουμε ότι $J(\underset{\sim}{P_0}) \neq 0$ και άρα ότι $D_3 G(\underset{\sim}{P_0})$ και $D_4 F(\underset{\sim}{P_0})$ είναι μη-μηδενικές (ή ομοίως η άλλη διαγώνιος). Από το ανάλογο του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης (που το είχαμε αποδείξει για συναρτήσεις $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) γιά συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχει μια περιοχή $\mathcal{U}$ του (x_0, y_0, u_0) και συνάρτηση $h \in C^1(\mathcal{U})$ έτσι ώστε $v_0 = h(x_0, y_0, u_0)$ και $F\big(x,y,u,h(x,y,u)\big) = 0$, γιά κάθε $(x,y,u) \in \mathcal{U}$. Και επίσης οι παράγωγοι της h δίνονται από τις σχέσεις

$$D_i h(x,y,u) = \frac{D_i F(x,y,u,h(x,y,u))}{D_4 F(x,y,u,h(x,y,u))} , \quad i = 1,2,3. \qquad (6)$$

Θέτουμε τώρα

$$H(x,y,u) = G(x,y,u, h(x,y,u))$$

και υπολογίζουμε τις $D_i H(x,y,u)$ στο $\mathcal{M}$. Έχουμε:

$$D_i H(x,y,u) = D_i G(x,y,u,h(x,y,u)) + D_4 G(x,y,u,h(x,y,u)) D_i h(x,y,u)$$
$$= D_i G(x,y,u,h(x,y,u)) - D_4 G(x,y,u,h(x,y,u)) \frac{D_i F(x,y,u,h(x,y,u))}{D_4 F(x,y,u,h(x,y,u))}$$

και, για συντομία, παραλείποντας τις μεταβλητές

$$D_i H = \frac{D_i G D_4 F - D_4 G D_i F}{D_4 G}, \quad i = 1,2,3. \quad (7)$$

Επειδή όμως $H \in C^1(\mathcal{M})$, $H(x_0,y_0,z_0) = 0$ και $D_3 H(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, έπεται από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης γιά την $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ότι υπάρχει περιοχή $\mathcal{N}$ του (x_0,y_0) και περιοχή (u_0-c, u_0+c) του u_0, και συνάρτηση $f \in C^1(\mathcal{N})$ έτσι ώστε το κυλινδρικό χωρίο

$$\{(x,y,u) : (x,y) \in \mathcal{N}, u \in (u_0-c, u_0+c)\} \subset \mathcal{M}$$
$$u_0 = f(x_0,y_0)$$

και $\forall (x,y) \in \mathcal{N}$

$$f(x,y) \in (u_0-c, u_0+c) \quad \text{και} \quad H(x,y,f(x,y)) = 0.$$

Επιπλέον, $\forall (x,y) \in \mathcal{N}$

$$D_i f(x,y) = -\frac{D_i H(x,y,f(x,y))}{D_3 H(x,y,f(x,y))}, \quad i = 1,2. \quad (8)$$

Έτσι παρατηρούμε ότι θέτοντας $g(x,y) = h(x,y,f(x,y))$ έπεται ότι $\forall (x,y) \in \mathcal{N}$ ισχύει ότι

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0$$
$$G(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0,$$

δηλ., αποδείξαμε ότι οι $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$

είναι λύσεις των Εξ. (5) σε μία περιοχή του (x_0, y_0).
Από τις Εξς. (7)-(8) έχουμε ότι

$$D_i f(x,y) = -\frac{D_i G\, D_4 F - D_4 G\, D_i F}{D_3 G\, D_4 F - D_4 G\, D_3 F}, \quad i=1,2. \tag{9}$$

όπου οι συναρτήσεις στο δεξί μέλος υπολογίζονται στο $(x, y, f(x,y), g(x,y))$, ενώ από τις Εξς. (6), (9) παίρνουμε τις $D_i g(x,y)$. Κατ' αρχάς,

$$D_i g(x,y) = D_i h(x,y, f(x,y)) + D_3 h(x,y,f(x,y))\, D_i f(x,y),$$

και άρα, $\quad i=1,2,$

$$D_i g(x,y) = -\frac{D_i F}{D_4 F} + \frac{D_3 F}{D_4 F} \cdot \frac{D_i G D_4 F - D_4 G D_i F}{D_3 G\, D_4 F - D_4 G\, D_3 F}$$

$$= -\frac{D_i F\, D_3 G - D_3 F\, D_i G}{D_3 G\, D_4 F - D_4 G\, D_3 F}, \quad i=1,2$$

υπολογισμένες στο $(x, y, f(x,y), g(x,y))$.

Έτσι αποδείξαμε το εξής.

<u>Θεώρημα 1</u>

Αν $F, G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ και $F, G \in C^1(E)$, E ανοιχτό, και αν η Ιακωβιανή $J \neq 0$ στο E, τότε σε μία κατάλληλη περιοχή κάθε σημείου του E οι εξισώσεις

$$F(x,y,u,v) = 0 \qquad G(x,y,u,v) = 0$$

λύνονται γιά τα u, v ως προς τα x, y και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{J_{x,v}}{J}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{J_{y,v}}{J}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{J_{u,x}}{J}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{J_{u,y}}{J}. \qquad \boxtimes$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω; Αυτό συζητούμε στην επόμενη παράγραφο.

Τελειώνουμε αυτήν την παράγραφο δίνοντας ένα παράδειγμα που δείχνει πώς λύνουμε m εξισώσεις n αγνώστων $(n > m)$ για m από τους αγνώστους, καθώς και πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους.

Παράδειγμα

Έστω ότι οι εξισώσεις

$$x^2 + yu + 2z - v^2 = 0$$
$$xv + y^2 + 3zu^2 - 5 = 0$$

μπορούν να λυθούν για τις συναρτήσεις $u(x,y,z)$ και $v(x,y,z)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$.

Λύση

Παραγωγίζοντας και τις δύο εξισώσεις ως προς x,

$$2x + y\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$v + x\frac{\partial v}{\partial x} + 6zu\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις ως προς $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, παίρνουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -2v \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & -2v \\ 6zu & x \end{vmatrix}} = -2\frac{x^2+v^2}{xy+12zuv},$$

ενώ για την $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ βρίσκουμε παρομοίως,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} y & -2x \\ 6zu & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & -2v \\ 6zu & x \end{vmatrix}} = \frac{12xzu - yv}{xy + 12zuv}. \qquad \boxtimes$$

20

Επιφάνειες και υποπολλαπλότητες

στον $\mathbb{R}^n$.

20

Επιφάνειες και κλασυλλαπλότητες

στον $\mathbb{R}^n$.

Επιφάνειες και υποπολλαπλότητες στον Ευκλείδιο χώρο

Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

Στην παράγραφο αυτή μελετούμε 2-διάστατες πολλαπλότητες - τις επιφάνειες του συνήθους η-χώρου, καθώς και γενικότερα υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$

Ορισμός 1

Μία <u>επιφάνεια</u> στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία συνεχής συνάρτηση από ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^n$. Πολλές φορές ονομάζεται και <u>τοπολογική</u> επιφάνεια.

Έτσι μιά επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια <u>συνεχής</u> $\underset{\sim}{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Πολλές φορές θεωρούμε ως την επιφάνεια $\mathcal{S}$ που καθορίζεται από την $\underset{\sim}{f}$, το πεδίο τιμών της $\underset{\sim}{f}$. Τότε η $\mathcal{S}$ περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής

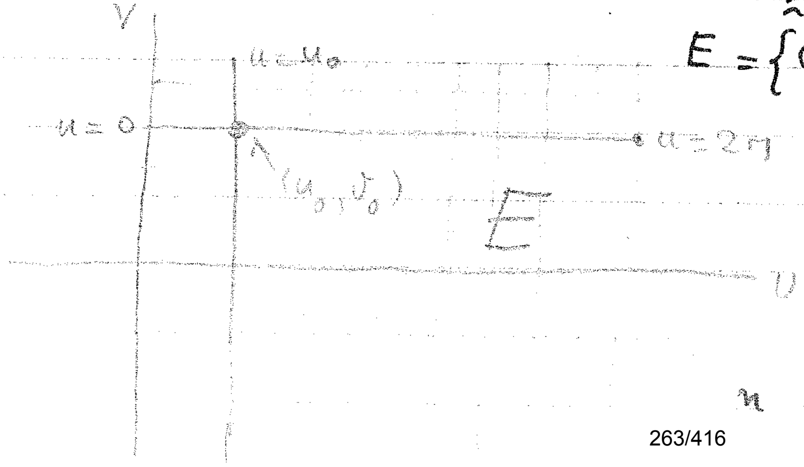
$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(u, v) . \qquad (1)$$

Η (1) ονομάζεται η <u>Παραμετρική αναπαράσταση</u> της $\mathcal{S}$ και αποτελεί το πιό συνηθισμένο τρόπο περιγραφής μίας επιφάνειας. (Μία καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ έχει παραμετρική αναπαράσταση $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(u)$.)

Παράδειγμα 1 (κύλινδρος)

Έστω ότι το Π.Ο. της $\underset{\sim}{f}$ είναι το σύνολο

$$E = \{(u,v) : u \in [0, 2\pi],\ v \in (-\infty, \infty)\}$$



και η $\underset{\sim}{f}$ δίνεται από τον τύπο:

$\underset{\sim}{f}(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$,

όπου $a > 0$. Τότε η επιφάνεια που περιγράφεται από την $\underset{\sim}{f}$ είναι σε παραμετρική αναπαράσταση:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= a\cos u \\ y &= a\sin u \qquad , \quad u\in[0,2\pi],\ v\in(-\infty,\infty) \\ z &= v \ . \end{aligned}$$

(Παρατηρείστε ότι θέτοντας $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ και $u^1=u$, $u^2=v$, η εξ. (2) γράφεται

$$x^r = f^r(u^1,u^2) \quad , \quad r=1,2,3$$

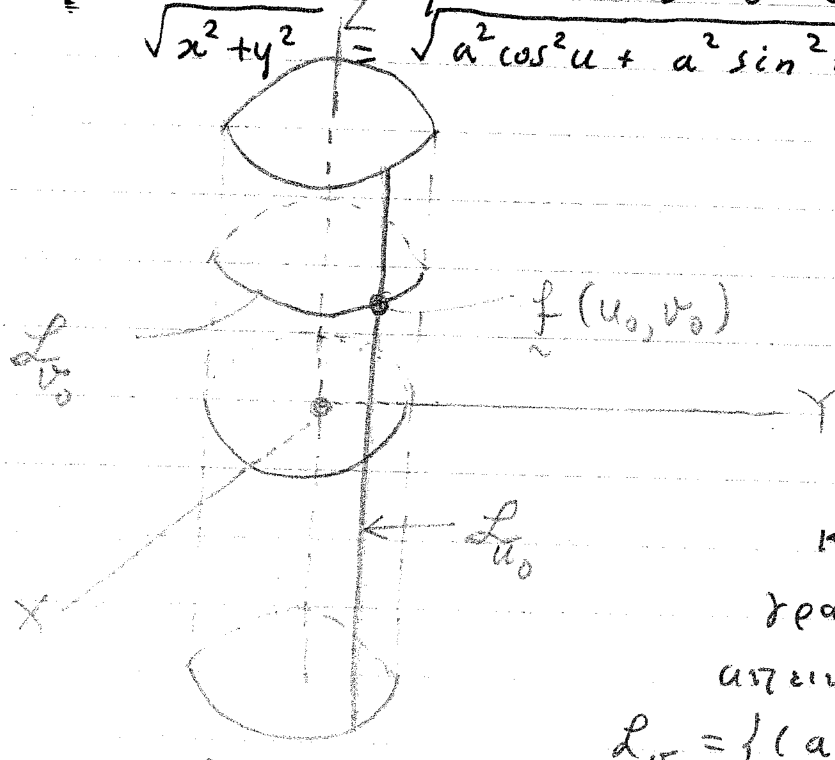
και $f^1 = a\cos$, $f^2 = a\sin$, $f^3 = I_2$. Στον N-χώρο, ο 2-διάστατος κύλινδρος θα είχε παραμετρική αναπαράσταση της μορφής

$$x^r = f^n(u^1,u^2), \quad r=1,\dots,N$$

με $f^n = I_2$, $r\ge 3$.)

Βλέπουμε ότι οι (2) περιγράφουν πράγματι έναν κύλινδρο ακτίνας a και άξονα τον z-άξονα, αφού η απόσταση από τον z-άξονα σε κάθε σημείο της $\mathcal{S}$ είναι

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2\cos^2u + a^2\sin^2v} = a, \qquad (3)$$



ενώ, μέσω της $\underset{\sim}{f}$, κάθε ευθεία $u=u_0$ του E απεικονίζεται στην κάθετη ευθεία

$$\mathcal{L}_{u_0} = \{(a\cos u_0, a\sin u_0, v): v\in(-\infty,\infty)\}, \quad (4)$$

και κάθε οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα του E απεικονίζεται στον κύκλο

$$\mathcal{L}_{v_0} = \{(a\cos u, b\sin u, v_0): u\in[0,2\pi]\}, \quad (5)$$

του $\mathbb{R}^3$. Οι ευθείες της μορφής (4) ονομάζονται οι γεννήτορες του κυλίνδρου και παρατηρούμε πως δημιουργείται ο κύλινδρος $\mathcal{S}$ στο $\mathbb{R}^3$ από την απεικόνιση $\underset{\sim}{f}$ της "ταινίας" E: Η ταινία (ή χωρίο) E "επιμηκύνεται" σε πλάτος $2\pi a$ και τυλίγεται γιά να σχηματιστεί ο κύλινδρος. Οι άκρες $u=0$ και $u=2\pi$ της ταινίας E ενώνονται.

$\boxtimes$

Μέσω της εξ. (1), μπορούμε να συνδέσουμε την έννοια της παραμετρικής αναπαράστασης μιάς επιφάνειας με τους ορισμούς που δώσαμε σε προηγούμενο μάθημα (Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ): Δηλ., ορίσαμε ως επιφάνεια τα σύνολα

$$\{(x,y,z):\ z=g(x,y)\} \text{ και } \{(x,y,z):\ F(x,y,z)=0\}. \quad (6)$$

Θέτοντας στην (1), $\underset{\sim}{f}=(I_1, I_2, g)$, το πρώτο σύνολο περιγράφεται σε παραμετρική μορφή:

$$x=u,\ y=v,\ z=g(u,v),\ (u,v)\in \mathcal{D}_g. \quad (7)$$

Επίσης το δεύτερο σύνολο περιγράφεται παραμετρικά μέσω της (7), αφού σε μια περιοχή κάθε σημείου στο οποίο η παράγωγος της F είναι μη-μηδενική, από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης το δεύτερο σύνολο γράφεται στην μορφή του πρώτου δηλ., η $F(x,y,z)=0$ λύνεται ως προς z γιά τα x, y δηλ., $z=g(x,y)$.

Ας δούμε τώρα πως ορίζουμε το εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας που περιγράφεται από μία C^1 συνάρτηση $\underset{\sim}{f}$. Στην ειδική περίπτωση που η επιφάνεια $\mathcal{S}$ περιγράφεται από ένα σύνολο σημείων της πρώτης μορφής στην Εξ. (6), γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathcal{S}$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι το επίπεδο που περνά από το (x_0, y_0, z_0) και έχει κάθετο το διάνυσμα $(D_1 g(x_0,y_0), D_2 g(x_0,y_0), -1)$. Θέτοντας $\underset{\sim}{f} = (I_1, I_2, g)$, έχουμε ότι το διάνυσμα

$$\begin{aligned} D_1 \underset{\sim}{f}(x_0,y_0) \times D_2 \underset{\sim}{f}(x_0,y_0) &= (1, 0, D_1 g(x_0,y_0)) \times (0, 1, D_2 g(x_0,y_0)) \\ &= -(D_1 g(x_0,y_0), D_2 g(x_0,y_0), -1), \end{aligned}$$

και άρα είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

Αν η $\underset{\sim}{f}$ <u>δεν</u> είναι της παραπάνω ειδικής μορφής αλλά γενικά ισχύει ότι $\underset{\sim}{f} \in C^1(E)$, τότε οδηγούμαστε στην έννοια του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο της $\mathcal{S}$ ως εξής: Θεωρούμε τις <u>συν/νες καμπύλες</u>

C_{u_0} : παραμετρική εξίσωση:

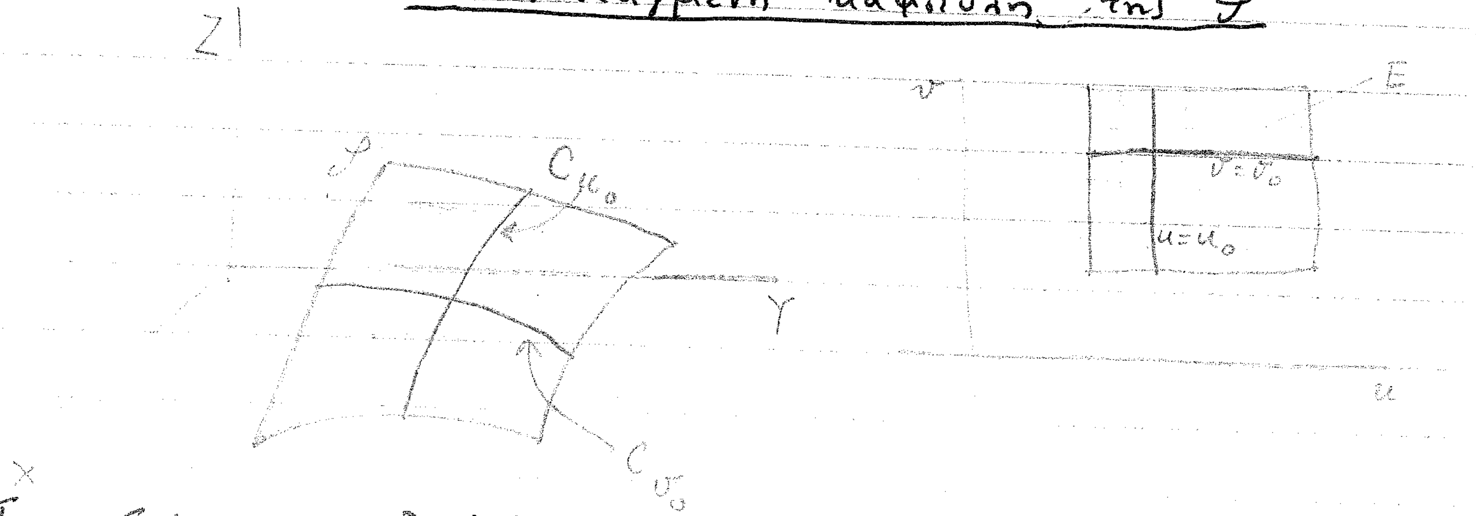
$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(u_0, v)$, $(u_0, v) \in E$

– <u>u - συντεταγμένη καμπύλη της $\mathcal{S}$</u>

και C_{v_0} : παραμετρική εξίσωση

$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(u, v_0)$, $(u, v_0) \in E$

– <u>v - συντεταγμένη καμπύλη της $\mathcal{S}$</u>

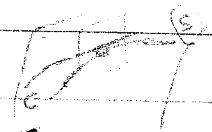


Το διάνυσμα $D_1 \underset{\sim}{f}(u_0, v_0)$ είναι εφαπτόμενο στην C_{v_0}

στο σημείο $\underset{\sim}{f}(u_0,v_0)$ και το $D_2\underset{\sim}{f}(u_0,v_0)$ είναι εφαπτόμενο στην C_{u_0} στο $\underset{\sim}{f}(u_0,v_0)$. Αν

$$\underset{\sim}{A} \equiv D_1\underset{\sim}{f}(u_0,v_0) \times D_2\underset{\sim}{f}(u_0,v_0) \neq 0,$$

τα δύο διανύσματα δεν είναι παράλληλα και άρα ορίζουν ένα επίπεδο που περνά από το $\underset{\sim}{f}(x_0,y_0)$. Το επίπεδο που περνά από το $\underset{\sim}{f}(x_0,y_0)$ και είναι κάθετο στο $\underset{\sim}{A}$ ονομάζεται το <u>εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathcal{S}$</u> στο $\underset{\sim}{f}(x_0,y_0)$. Αν η $\mathcal{S}$ έχει $\underset{\sim}{A} \neq 0$ στο E, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο υπάρχει σε κάθε σημείο της $\mathcal{S}$ και η $\mathcal{S}$ ονομάζεται <u>λεία επιφάνεια</u>, (ή <u>διαφορίσιμη</u> επιφάνεια).



<u>Θεώρημα 1</u>

Εστω C: καμπύλη της επιφάνειας $\mathcal{S}$ και έστω ότι η C περιγράφεται από την $g: I \subset \mathbb{R} \to E \subset \mathbb{R}^2$ και η $\mathcal{S}$ περιγράφεται από τη $f: E \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. Αν η C περνά από το σημείο $\underset{\sim}{x}_0 \in \mathcal{S}$, τότε η εφαπτομένη της C': $f \circ g: I \to \mathcal{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0$ κείνται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $\mathcal{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0$.

<u>Απόδειξη</u>

Αν η C περνά από το $\underset{\sim}{x}_0$ τότε

$$\underset{\sim}{g}(t_0) = (u_0, v_0),$$

και τότε η καμπύλη C' που περιγράφεται από την $\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}: I \to \mathcal{S}$ κείνται στην $\mathcal{S}$ και περνά από το $\underset{\sim}{x}_0$: $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(t_0)) = x_0$. Από τον κανόνα αλυσίδας

$$D[\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}](t_0) = D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{g}(t_0))\, D\underset{\sim}{g}(t_0) = D\underset{\sim}{f}(u_0,v_0)\, Dg(t_0),$$

δηλαδή, παραλείπονται τα σημεία υπολογισμού των παραγώγων έχουμε

$$D[\underset{\sim}{f}\circ \underset{\sim}{g}] = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \\ D_1 f_3 & D_3 f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dg_1 \\ Dg_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 Dg_1 + D_2 f_1 Dg_2 \\ D_1 f_2 Dg_1 + D_2 f_2 Dg_2 \\ D_1 f_3 Dg_1 \quad D_3 f_3 Dg_2 \end{pmatrix}$$

$$= Dg_1 \begin{pmatrix} D_1 f_1 \\ D_1 f_2 \\ D_1 f_3 \end{pmatrix} + Dg_2 \begin{pmatrix} D_2 f_1 \\ D_2 f_2 \\ D_2 f_3 \end{pmatrix},$$

δηλ.,

$$D[\underset{\sim}{f}\circ \underset{\sim}{g}](t_0) = Dg_1(t_0)\, D_1 \underset{\sim}{f}(u_0, v_0) + Dg_2(t_0)\, D_2 \underset{\sim}{f}(u_0, v_0).$$

Αυτό δείχνει ότι το $D(\underset{\sim}{f}\circ \underset{\sim}{g})(t_0)$ που είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη C' στο $\underset{\sim}{x}_0$ καθορίζεται ως γραμμικός συνδιασμός των $D_1\underset{\sim}{f}$, $D_2\underset{\sim}{f}$ στο (u_0, v_0) που φτιάχνουν το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathcal{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0$. Άρα η εφαπτομένη της C' στο $\underset{\sim}{x}_0$ κείνται στο εφ. επίπεδο της $\mathcal{S}$ στο $\underset{\sim}{x}_0$. $\boxtimes$

Παράδειγμα 2

Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο του κυλίνδρου ακτίνας 1 και με άξονα τον z-άξονα στο σημείο $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 10)$.

Λύση

Η παραμετρική αναπαράσταση του κυλίνδρου είναι

$$\underset{\sim}{f}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

και το δοθέν σημείο αντιστοιχεί στα $u = \frac{5\pi}{2}$, $v = 10$.

Επειδή $D_1\underset{\sim}{f}(u,v) = (-\sin u, \cos u, 0)$, $D_2\underset{\sim}{f}(u,v) = (0,0,1)$, έχουμε

$$D_1\underset{\sim}{f}\left(\frac{5\pi}{4}, 10\right) \times D_2\underset{\sim}{f}\left(\frac{5\pi}{4}, 10\right) = \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0\right) \times (0,0,1) = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1,1,0),$$

και έτσι το ζητούμενο εφαπτόμενο επίπεδο είναι το επίπεδο που περνά από το $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 10)$ και έχει κάθετο το $(1,1,0)$. Η εξίσωσή του είναι:

$$(1,1,0)\cdot\left[(x,y,z)-(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,10)\right]=0$$

ή

$$x+y+\sqrt{2}=0.$$

Η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου είναι

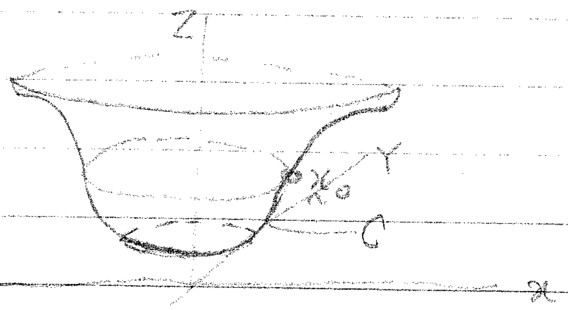
$$\underset{\sim}{x}=(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,10)+s(1,-1,0)+t(0,0,1)$$

και η αντίστοιχη παραμετρική αναπαράσταση,

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}+s,\quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-s,\quad z=10+t. \quad \boxtimes$$

Πολλά χρήσιμα παραδείγματα επιφανειών εμφανίζονται ως <u>επιφάνειες εκ περιστροφής</u>. Έστω C μία καμπύλη στο xz-επίπεδο με παραμετρική αναπαράσταση

$$x=g(v),\quad y=0\quad z=h(v),\quad v\in I\subset\mathbb{R}. \qquad (8)$$



Τότε γιά σταθερό v_0, περιστρέφουμε το σημείο $\underset{\sim}{x}_0=(g(v_0),0,h(v_0))$ γύρω από τον z-άξονα και παίρνουμε τον κύκλο με εξίσωση

$$x=g(v_0)\cos u,\quad y=g(v_0)\sin u,\quad z=h(v_0),\quad u\in[0,2\pi],$$

με u η γωνία περιστροφής μετρούμενη από το σημείο $\underset{\sim}{x}_0$ (που αντιστοιχεί στο $u=0$). Περιστρέφοντας με αυτόν τον τρόπο όλα τα σημεία της C γύρω από τον z-άξονα παίρνουμε την επιφάνεια εκ περιστροφής $\mathcal{S}$ με γεννήτορα την καμπύλη C. Η $\mathcal{S}$

έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$(9)\quad \begin{cases} x = g(v)\cos u \\ y = g(v)\sin u \\ z = h(v) \quad , u \in [0, 2\pi] \, , v \in I \subset \mathbb{R} . \end{cases}$$

<u>Παραδείγματα 3</u> (παρ. αναπαραστάσεις)

(i) <u>Ορθός κυκλικός κύλινδρος</u>

γεννήτορας : Κάθετη ευθεία

$$x = a \, , y = 0 \, , z = v \, , v \in (-\infty, \infty)$$

Παρ. εξ :

$$x = a\cos u$$
$$y = a\sin u$$
$$z = v \quad , u \in [0, 2\pi] \, , v \in (-\infty, \infty)$$

(ii) <u>Κώνος</u>

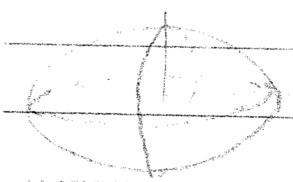
γεννήτορας : Ευθεία που περνά από την αρχή

$$x = av \, , y = 0 \, , z = v \, , v \in (-\infty, \infty)$$

Παρ. εξ :

$$x = av\cos u$$
$$y = av\sin u$$
$$z = v \quad , u \in [0, 2\pi] \, , v \in (-\infty, \infty)$$

(iii) <u>Ελλειψοειδές</u>



$$x = a\cos v\cos u \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$$
$$y = b\cos v\sin u$$
$$z = c\sin v \quad , u \in [0, 2\pi] \, , v \in [-\pi/2, \pi/2]$$

(iv) <u>Μονόφυλλο υπερβολοειδές</u>

$$x = a\cosh v\cos u$$
$$y = b\cosh v\sin u$$
$$z = c\sinh v \quad , u \in [0, 2\pi] \, , v \in (-\infty, \infty)$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$$

v) <u>Δίφυλλο υπερβολοειδές</u>

$$x = a\sinh v \cos u$$
$$y = b \sinh v \sin u$$
$$z = c\cosh v \quad , u \in [0, 2\pi] \quad , v \in (-\infty, \infty)$$
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} = -1 \right)$$

(vi) <u>Ελλειπτικό παραβολοειδές</u>

$$x = av \cos u \qquad \left(z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$
$$y = bv \sin u$$
$$z = v^2 \quad , u \in [0, 2\pi] \quad , v \in [0, \infty)$$

$a = b$: <u>κυκλικό παραβολοειδές</u>

(vii) <u>Υπερβολικό παραβολοειδές</u>

$$x = av \cos u \qquad \left(z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$
$$y = bv \sin u$$
$$z = v^2 \cos 2u \quad , \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \infty)$$

(viii) <u>Ορθός ελλειπτικός κύλινδρος</u>

$$x = a \cos u \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$$
$$y = b \sin u$$
$$z = v \quad , \quad u \in [0, 2\pi], \ v \in (-\infty, \infty)$$

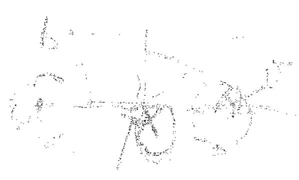
$a = b$: <u>ορθός κυκλικός κύλινδρος</u>

(ix) <u>Ορθός ελλειπτικός κώνος</u>

$$x = av \cos u \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \right)$$
$$y = bv \sin u$$
$$z = v, \quad u \in [0, 2\pi], \ v \in (-\infty, \infty)$$

$a = b$: <u>ορθός κυκλικός κώνος</u>

(x) <u>Τόρος (σαμπρέλα)</u>



$$x = (b + a\cos v) \cos u \quad , \quad a < b$$
$$y = (b + a\cos v) \sin u$$
$$z = a\sin v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$$

Υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^N$

Ας μελετήσουμε τώρα γεωμετρικά αντικείμενα μεγαλύτερης διάστασης από 2 μέσω της παραμετρικής αναπαράστασης. Το βασικό αποτέλεσμα που χρησιμοποιούμε είναι το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. Όπως και με τις επιφάνειες έτσι και με τις υποπολλαπλότητες υψηλότερης διάστασης, υπάρχουν ουσιωδώς τρεις τρόποι ορισμού τους:

(A) Μέσω συντεταγμένων:

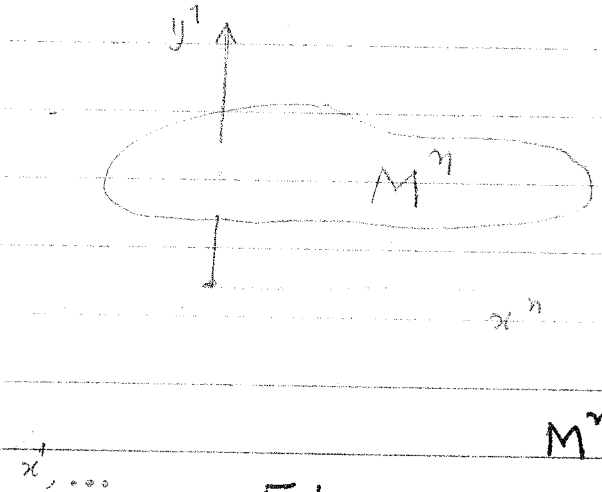
Μία η-διάστατη υποπολ/τα $M^n \subset \mathbb{R}^{N=n+r}$ του $\mathbb{R}^{n+r}$ είναι το σύνολο

$$M^n = \{(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^r) : y^\alpha = f^\alpha(x^1,\dots,x^n),\ \alpha=1,\dots,r\} \quad (1)$$

όπου οι f^α είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$f^\alpha : M^n \to \mathbb{R}.$$

Π.χ.,



Γιά $r=1$, η

$$y^1 = f(x^1,\dots,x^n) \quad (2)$$

είναι μία η-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Εδώ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

και το $graph(f) = M^n$ δηλ.

$$M^n = \{(\underset{\sim}{x}, y^1) : y^1 = f(\underset{\sim}{x})\}. \quad (3)$$

Γιά $n=1$, M^1 είναι μία καμπύλη του $\mathbb{R}^2$, ενώ γιά $n=2$, $M^2 =$ επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ $(y^1 = z)$.

(B) Ως ισόπεδο σύνολο: Αν $\underset{\sim}{F} : \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$:

$(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \mapsto F^\alpha(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$, $\alpha = 1,\dots,r$, τότε το σύνολο

$$M^n = \{(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) : F^\alpha(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = c^\alpha,\ \alpha=1,\dots,r,\ c^\alpha : \text{σταθ.}\}, \quad (4)$$

ονομάζεται μία <u>n- διάστατη υποπ/τα</u> του $\mathbb{R}^{n+r}$ αν η τάξη του πίνακα $dF(x_0) : T_{x_0}\mathbb{R}^{n+r} \to T_{o}\mathbb{R}^{r}$ είναι r.

<u>Παρατήρηση 1</u>

Κάθε σύνολο M^n της μορφής (1) γράφεται πάντα στην μορφή (4), θέτοντας $F^\alpha = f^\alpha - y^\alpha$. Το αντίστροφο ισχύει μόνο μέσω των προϋποθέσεων του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης: Έστω η εξίσωση

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{c}.$$

Τότε αυτή λύνεται γιά τα $\underset{\sim}{y}$ ως προς $\underset{\sim}{x}$ αν η F είναι C^1 σε μια περιοχή ενός σημείου $(\underset{\sim}{x}_0, y_0)$ και η $|J_{\underset{\sim}{F}}| \neq 0$.

(Γ) <u>Μέσω μίας απεικόνισης</u> : $\underset{\sim}{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$

$$M^n = \{ \underset{\sim}{u} : \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}) \}. \qquad (5)$$

: Παραμετρική αναπαράσταση.

<u>Παρατήρηση 2</u>

Θέτοντας

$$\underset{\sim}{f} = (I_1, \dots, I_n, f^1, \dots, f^r)$$

η υποπολ/τα (1) περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$x^i = u^i, \quad y^\alpha = f^\alpha(u^i), \quad u^i \in \mathcal{D}_{f^\alpha}. \qquad (6)$$

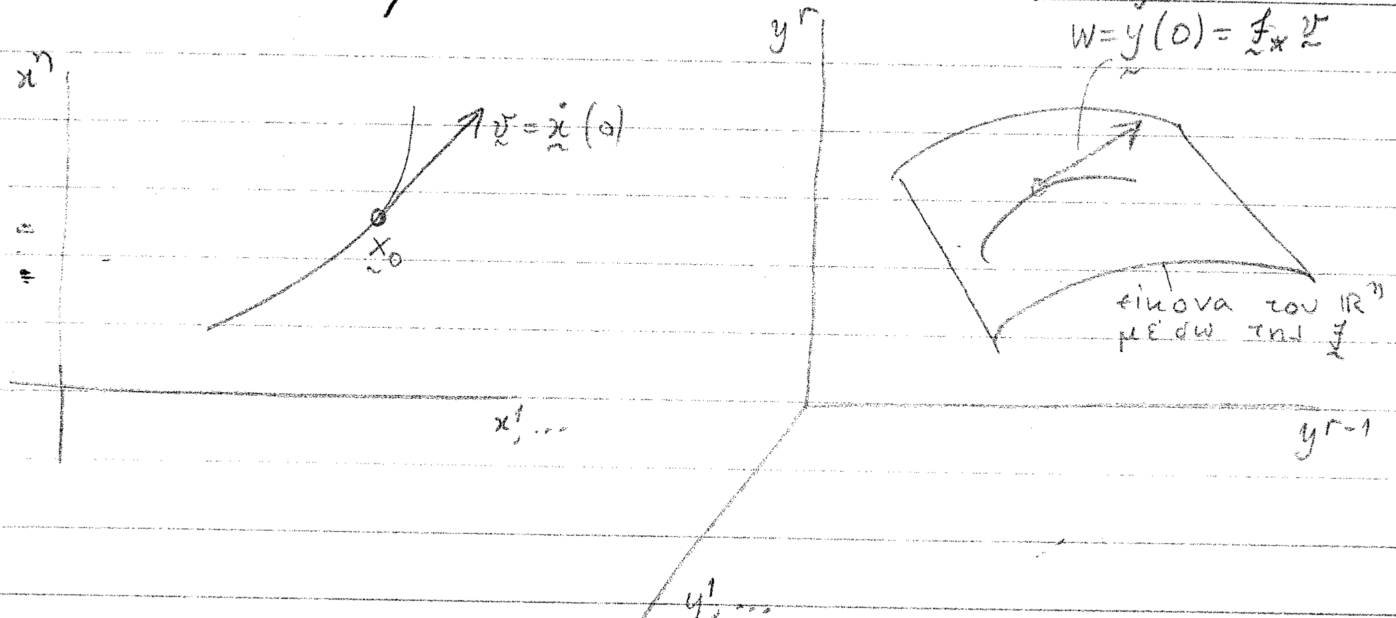
Ομοίως το σύνολο (4) περιγράφεται παραμετρικά μέσω της Εξ. (6) αφού μέσω του Θ.Π.Σ. το σύνολο (4) γράφεται στην μορφή (1) (κάτω από τις υποθέσεις του θεωρήματος).

<u>Ορισμός 1</u>

Μια υποπ/τα διάστασης N-1 στον $\mathbb{R}^N$ ονομάζεται <u>υπερεπιφάνεια</u>

και λέμε ότι έχει <u>συνδιάσταση</u> 1. Η <u>συνδιάσταση</u> μιάς υποπ/τας M^n στον $\mathbb{R}^N$ είναι ο αριθμός $N-n$. $(N>n)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απεικόνισης $\underset{\sim}{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ η οποία δίνει μία υποπολλαπλότητα $M^n \subset \mathbb{R}^r$ $(r>n)$ οδηγεί στην ερμηνεία του διαφορικού $d\underset{\sim}{f}$ της $\underset{\sim}{f}$.
Θυμίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\underset{\sim}{x}}\mathbb{R}^n$ του $\mathbb{R}^n$ στο σημείο $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι εξ' ορισμού ο γραμμικός χώρος των διανυσμάτων του $\mathbb{V}_n$ με αρχή το $\underset{\sim}{x}$, δηλ., είναι ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}^n$ (ακριβέστερα είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$). Έστω $y_0 = f(x_0)$ (χωρίς "~" συμβολισμός σε ότι ακολουθεί) και έστω ότι η $f \in C^1$.



Έστω $\underset{\sim}{v} \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ και $x(t)$ λεία καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = (dx/dt)(0) = \underset{\sim}{v}$ (π.χ., η ευθεία $x(t) = x_0 + t\underset{\sim}{v}$). Η εικόνα της $x(t)$ μέσω της f είναι

$$y(t) = f(x(t))$$

και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα $\underset{\sim}{w}$ στο y_0 το οποίο, από τον κανόνα αλυσίδας είναι

$$w^{\alpha} = \dot{y}^{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}(x_0)\,\dot{x}^{i}(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\right)_{x_0} v^{i}. \quad (7)$$

Έτσι το $df \equiv f_*$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός,

$$f_* : T_{x_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{y_0}\mathbb{R}^r : v \longmapsto f_*(v) \equiv W, \quad (8)$$

ο οποίος στέλνει εφαπτόμενα διανύσματα καμπυλών σε εφαπτόμενα διανύσματα των εικόνων των καμπυλών.

Περαιτέρω, η γεωμετρική ερμηνεία της περιγραφής υποπολλαπλοτήτων μέσω της απεικόνισης (Β) (ισόπεδα σύνολα) είναι ως εξής. Παρατηρείστε ότι η συνθήκη ότι η τάξη του πίνακα

$$dF : T_{x_0}\mathbb{R}^N \to T_{y_0}\mathbb{R}^r$$

είναι r είναι ισοδύναμη με το ότι η dF είναι επί, δηλ., $\forall$ διάνυσμα $w \in T_{y_0}\mathbb{R}^n$ $\exists$ $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^N : dF(v) = w$.

Έτσι έχουμε τον βασικό χαρακτηρισμό υποπολλαπλοτήτων μέσω της (Β):

<u>Θεώρημα 2</u>

Έστω ότι το σύνολο

$$M^n = F^{-1}(y_0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+r} : F(x) = y_0\}$$

είναι μη-κενό, όπου $F : \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$, και ότι $\forall x_0 \in F^{-1}(y_0)$ το διαφορικό

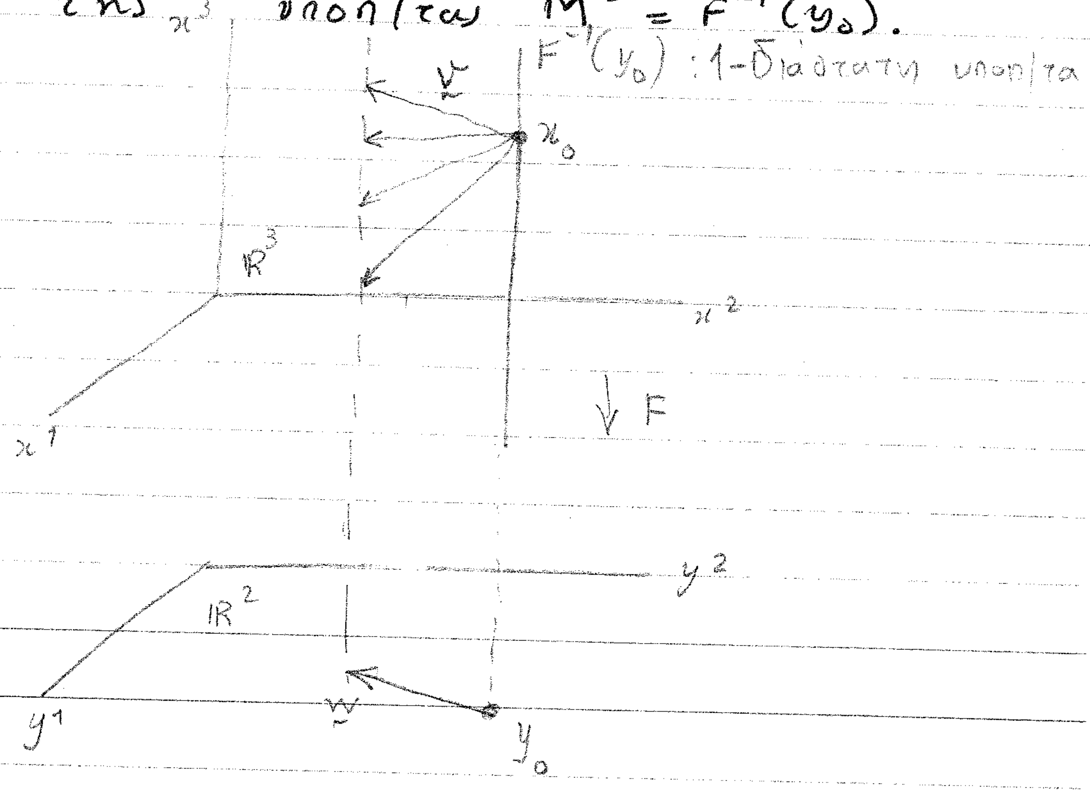
$$dF : T_{x_0}\mathbb{R}^{n+r} \longrightarrow T_{y_0}\mathbb{R}^r$$

είναι επί. Τότε η M^n είναι μία n-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+r}$. $\boxtimes$

Για παράδειγμα, θεωρούμε την προβολή

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x^1, x^2, x^3) \mapsto F(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2),$$

δηλ. $y^1 = x^1$ και $y^2 = x^2$ (βλ. Σχήμα). Η x^3 είναι η 'ολική' συν/νη της υποπ/τας $M^1 = F^{-1}(y_0)$.



Πότε εμφανίζονται υποπ/τες $M^n \subset IR^N$ $(N > n)$; Ας δούμε ένα παράδειγμα από την Μηχανική.

Παράδειγμα 4 (στερεό σώμα)

Να βρεθεί ο χώρος καταστάσεων του στερεού σώματος στον IR^3 το οποίο έχει ένα σημείο σταθερό.

Λύση

Η γενική μετατόπιση ενός στερεού σώματος στον IR^3 με ένα σημείο ακίνητο είναι μία περιστροφή (Θεώρημα Euler). Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο ορθογώνιος πίνακας x που περιγράφει αυτήν την κίνηση του στερεού σώματος έχει πάντοτε την ιδιοτιμή $+1$ δηλ. $\det x > 0$ (βλ. Goldstein § 4.6). Έτσι ο χώρος καταστάσεων του στερεού σώματος με ένα σημείο ακίνητο στον IR^3 είναι η ομάδα περιστροφών $SO(3)$ δηλ., το σύνολο όλων των 3x3 πινάκων $x = (x_{ij})$ ε/ω

$$x^T = x^{-1}, \quad \det x > 0$$

T: ανάστροφος (χωρίς την συνθήκη $\det x > 0$, το σύνολο είναι η ομάδα $O(3)$). Αντιστοιχώντας τα 9 στοιχεία του (πραγματικού) πίνακα x με τον x βλέπουμε ότι υπάρχει η ισομορφία

$$\mathcal{M}(3\times 3) \sim \mathbb{R}^9$$

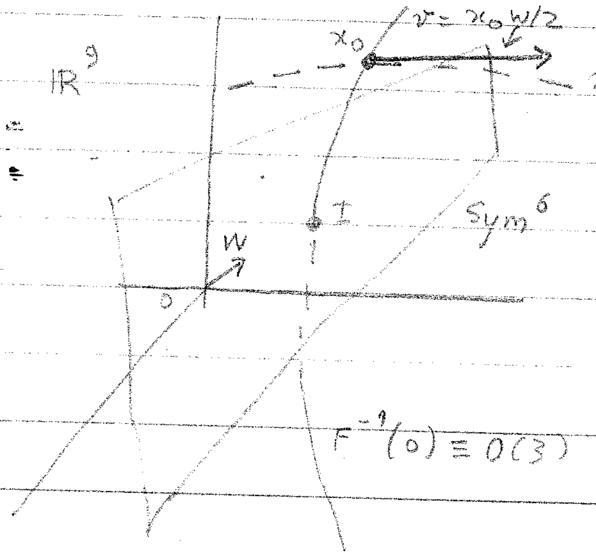
και άρα το σύνολο όλων των ορθογώνιων, 3x3 πινάκων $O(3)$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του $\mathbb{R}^9$, x, ε/ω

$$x^T x = I \qquad (9)$$

ή, ε/ω να έχουμε τις εξής εννέα εξισώσεις

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ji}\, x_{jk} = \delta_{ik}, \qquad (i,k)$$

δηλαδή



$$O(3) \subset \mathbb{R}^9. \qquad (10)$$

Θα δείξουμε ότι η $O(3)$ είναι μία 3-διάστατη υποπ/τα του $\mathbb{R}^9$. (Η κατάσταση του στερεού σώματος την χρονική στιγμή t περιγράφεται από τό διάνυσμα

$$x(t) \in \mathbb{R}^9$$

και η καμπύλη (το t αλλάζει) $x(t)$ αντιστοιχεί στην $O(3)$.) Επειδή ο $x^T x$ είναι συμμετρικός πίνακας η (9) είναι μόνο 6 ανεξάρτητες εξισώσεις αφού το σύνολο

$$Sym^6 = \{ x \in \mathcal{M}(3\times 3) : x^T = x \}$$

όλων των συμμετρικών πινάκων περιγράφεται από τις τρείς γραμμικές εξισώσεις

$$x_{ik} - x_{ki} = 0 \qquad i \neq k$$

και άρα είναι ένας 6-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^9$. Έστω τώρα η απεικόνιση

$$F : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^6 = Sym^6 : x \mapsto F(x) = x^T x - I. \qquad (11)$$

Τότε

$$O(3) = F^{-1}(0).$$

Έστω $x_0 \in F^{-1}(0) = O(3)$. Τότε έχουμε

<u>Θεώρημα 3</u>

Γιά την F όπως στην (11) έχουμε ότι το

$$dF : T_{x_0}\mathbb{R}^9 \to T_{y_0} Sym^6 \cong Sym^6$$

είναι επί.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $w \in T_0 Sym^6$. Πρέπει να βρούμε ένα $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^9$ ε/ω $dF(v) = w$. Θεωρούμε μία γενική καμπύλη πινάκων $x(t)$ που να διέρχεται από το x_0 με εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{x}(0)$ εκεί. Η εικόνα της x μέσω της F είναι

$$F(x(t)) = x(t)^T x(t) - I \qquad (12)$$

και άρα η εφαπτομένη στο 0 είναι

$$\frac{d}{dt}\Big[F(x(t))\Big]_{x=0} = \dot{x}(0)^T x_0 + x_0^T \dot{x}(0) = 2 x_0^T \dot{x}(0). \qquad (13)$$

Άρα, αρκεί να βρούμε ένα v που να ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{d}{dt} F(v) = \frac{x_0 w}{2}$, αφού από την (13) γνωρίζουμε ότι

$$x_0^T \dot{x}(0) = \frac{w}{2}.$$

Αφού $x_0 \in O(3)$, $x_0^T = x_0^{-1}$ και άρα επιλέγουμε

$$v = \dot{x} = x_0 \frac{w}{2}.$$

Έτσι η dF είναι επί και άρα από το θεώρημα 2 έπεται άμεσα ότι η $O(3) = F^{-1}(0)$ είναι μία $(9-6)=3$-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^9$. ☒.

Ερχόμαστε τέλος στον χώρο καταστάσεων $SO(3)$ του στερεού σώματος με ένα σημείο ακίνητο στον $\mathbb{R}^3$. Θυμόμαστε ότι κάθε στοιχείο $x \in O(3)$ έχει $\det x = \pm 1$ και ότι αν $x \in SO(3)$, τότε $\det x = +1$. Επειδή η

$$\det : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$$

είναι συνεχής, από την ιδιότητα της διατήρησης προσήμου των συνεχών συναρτήσεων (βλ. 'Μαθηματική Ανάλυση Ι') έπεται ότι τα δύο υποσύνολα του του $O(3)$ με $+1$ ορίζουσες και -1 ορίζουσες έχουν την ίδια διάσταση με το $O(3)$ δηλ. 3. Άρα αποδείξαμε το εξής

<u>Πόρισμα 1</u>

Ο χώρος καταστάσεων του στερεού σώματος με ένα σημείο ακίνητο στον $\mathbb{R}^3$ είναι το $SO(3)$. Αυτή η ομάδα είναι μία 3-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^9$. ☒

Στην Μηχανική, οι συντεταγμένες ενός σημείου στον $SO(3)$ ονομάζονται γωνίες Euler.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

1. Κεντρικές κινήσεις

Ένα πεδίο δυνάμεων $\underset{\sim}{F}$ ονομάζεται κεντρικό αν,

$$\boxed{\underset{\sim}{F} = f(r) \cdot \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}}} \qquad (1)$$

όπου $\underset{\sim}{r} = x \cdot \underset{\sim}{i} + y \cdot \underset{\sim}{j} + z\,\underset{\sim}{k}$ και $\underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} = \dfrac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|}$.

Δηλαδή αν $\underset{\sim}{F}$ είναι κεντρικό, τότε εξαρτάται μόνο από την <u>απόσταση</u> $|\underset{\sim}{r}|$, δηλαδή,

$$\boxed{\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(r)} \qquad (2).$$

<u>Θεώρημα 1</u>

Κάθε κεντρικό πεδίο είναι συντηρητικό.

<u>Απόδειξη</u>

Αν υπάρχει δυναμική ενέργεια U, τότε,

$$\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = -dU,$$

όπου $\underset{\sim}{F} = f(\underset{\sim}{r}) \cdot \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}}$.

Άρα $\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = f(r) \cdot \underset{\sim}{e}_{\underset{\sim}{r}} \cdot d\underset{\sim}{r} = f(r)\dfrac{\underset{\sim}{r}}{|\underset{\sim}{r}|} \cdot d\underset{\sim}{r} = f(r)dr.$

Συνεπώς $-dU = f(r)dr$ και ολοκληρώνοντας,

$$U = -\int f(r)\,dr,$$

δηλαδή το $\underset{\sim}{F}$ είναι συντηρητικό.

<u>Θεώρημα 2</u>

Η τροχιά ενός υλικού σημείου, το οποίο κινεται σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων είναι μία επίπεδη καμπύλη.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\underset{\sim}{F}$ κεντρικό, δηλαδή $\underset{\sim}{F} = f(r)\,\underset{\sim}{e}_r$, τότε,

$$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = f(r)\,\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{e}_r = \underset{\sim}{0}.$$

Επειδή $\underset{\sim}{F} = m\dfrac{d\underset{\sim}{v}}{dt}$, η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$\underset{\sim}{r} \times \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} \times \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{r} \times \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{0},$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{h} = \text{σταθερό διάνυσμα.}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη εσωτερικά με το $\underset{\sim}{r}$ και λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα : $\underset{\sim}{r} \cdot (\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{r}) \cdot \underset{\sim}{v}$,

έχουμε,

$$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{h} = 0 \quad \text{για κάθε χρόνο } t.$$

Συνεπώς $\underset{\sim}{r} \perp \underset{\sim}{h}$ που είναι σταθερό διάνυσμα και άρα η κίνηση είναι επίπεδη. ■

Έτσι, στη μελέτη των κεντρικών κινήσεων, μπορούμε να χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες (r, θ).

Άρα το $\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\cdot\underset{\sim}{k}$ θα το εκφράσουμε μέσω της πολικής βάσης $(\underset{\sim}{e}_r, \underset{\sim}{e}_\theta)$.

Γνωρίζουμε ότι τα $\dot{\underset{\sim}{r}}$, $\ddot{\underset{\sim}{r}}$ και $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p}$ αναλύονται ως προς την πολική βάση ως εξής:

$$\underset{\sim}{v} = \dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{r}\,\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta,$$

$$\underset{\sim}{a} = \ddot{\underset{\sim}{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\underset{\sim}{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\underset{\sim}{e}_\theta,$$

$$\underset{\sim}{L} = r^2\dot{\theta}\left(\underset{\sim}{e}_r \times \underset{\sim}{e}_\theta\right), \quad \text{δηλαδή}, \quad L = r^2\dot{\theta}.$$

Ο νόμος του Νεύτωνα για την κεντρική κίνηση γράφεται,

$$\boxed{\ddot{\underset{\sim}{r}} = -\underset{\sim}{\nabla} U} \qquad (3),$$

όπου $U = U(r)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πρόβλημα αυτό, ανάγεται σ' ένα ισοδύναμο μονοδιάστατο πρόβλημα. Δηλαδή:

Θεώρημα 3

Η απόσταση $r(t)$ από το κέντρο της κίνησης μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο, όπως στο πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας με δυναμική ενέργεια:

$$\boxed{V = U(r) + \frac{L^2}{2r^2}} \qquad (4),$$

η οποία ονομάζεται ενεργός δυναμική ενέργεια, και εξίσωση κίνησης:

$$\boxed{\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}} \qquad (5).$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού το πεδίο είναι κεντρικό, προκύπτει ότι

$$\nabla U = \frac{dU}{dr}\, e_r ,$$

και άρα ο νόμος του Νεύτωνος γράφεται, σε πολικές συν/νες:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{dU}{dr}, \quad \text{και} \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \qquad (*).$$

Από το νόμο διατήρησης της στροφορμής,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{r^2} ,$$

και άρα αντικαθιστώντας στις (*), παίρνουμε:

$$\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} + \frac{L^2}{r^3} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{dV}{dr}, \text{ όπου } V = U + \frac{L^2}{2r^2}. \blacksquare$$

Κάθε πρόβλημα εξισώσεως της μορφής $\ddot{\underset{\sim}{r}} = -\nabla U(r)$ ανάγεται στο $\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}$, με $V = U + \frac{L^2}{2r^2}$, δηλαδή η ολική ενέργεια του μονοδιάστατου,

$$\boxed{E_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = \frac{\dot{r}^2}{2} + U(r) + \frac{L^2}{2r^2}} \qquad (6).$$

Αφού η E_1 διατηρείται, δηλαδή $E_1 = E =$ σταθερό, έχουμε ότι: $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{2(E-V)} = \sqrt{2(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}$,

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε ότι:

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(E-V)}} .$$

Επειδή και το L είναι σταθερό $(=\dot{\theta} r^2)$ έπεται ότι,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{r^2} > 0,$$

και άρα η γωνία θ αυξάνει με το χρόνο,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2(E-V)}}.$$

Άρα ολοκληρώνοντας βρίσκουμε για την γωνία:

$$\boxed{\theta = \int \frac{\frac{L}{r^2}\,dr}{\sqrt{2(E-V)}}.} \qquad (7)$$

Μπορεί να δοθεί η παρακάτω φυσική ερμηνεία του όρου $\frac{L^2}{2r^2}$:

Επειδή $L = \dot{\theta} r^2$ έχουμε:

$$\frac{L^2}{2r^2} = \frac{r^4\dot{\theta}^2}{2r^2} = \boxed{\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 : \text{κεντρομόλος ενέργεια} = \mathcal{V}_{κεντρ}} \quad (8)$$

Έτσι, καταλήγουμε στον ορισμό της κεντρομόλου δυνάμης στην κεντρική κίνηση:

$$\boxed{F_{κεντρ} = -\nabla \mathcal{V}_{κεντρ} = -\frac{\partial \mathcal{V}_{κεντρ}}{\partial r} = r\cdot\dot{\theta}^2} \qquad (9)$$

Άρα ισχύει:

Ενεργός δυναμική ενέργεια = πραγματική δυναμική ενέργεια + + κεντρομόλος δυναμική ενέργεια.

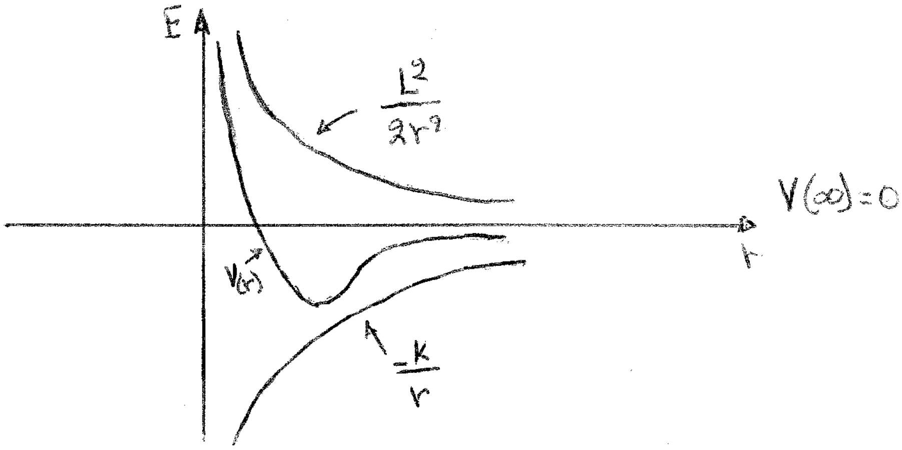
<u>Παράδειγμα</u>

Κίνηση σε βαρυτικό πεδίο.

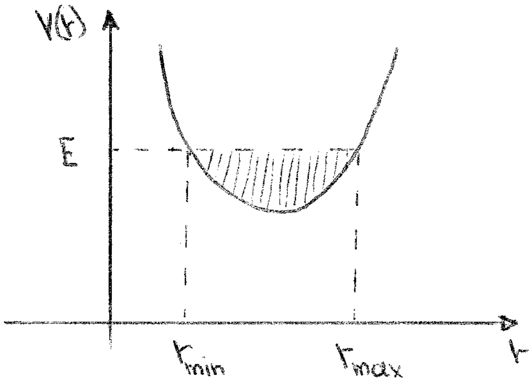
Εδώ $F = -\frac{k}{r^2}$, όπου k μια σταθερά.

Άρα, $U(r) = -\int F(r)\,dr = -\frac{k}{r}$.

Συνεπώς $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$ (σχήμα).



Η κίνηση είναι δυνατή <u>μόνον</u> στην περιοχή $E \geq V$ (βλέπε επόμενο σχήμα), δηλαδή όλες οι τροχιές κείνται



στην περιοχή $V(r) < E$ (γραμμοσκιασμένη περιοχή) (δηλαδή μεταξύ των σημείων του διανύσματος θέσης r_{min} και r_{max}). Το σύνορο αυτής της (επιτρεπτής) περιοχής είναι το $E = V$, δηλαδή όταν $\dot{r} = 0$.

Όταν $\dot{r} = 0$, και επειδή $\dot{r} = \sqrt{2(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}$, έπεται ότι τα r_{min} και r_{max} (που ονομάζονται <u>αψίδες</u>) είναι οι ρίζες του τριωνύμου (ως προς r):

$$E - U(r) - \frac{L^2}{2r^2} = 0 .$$

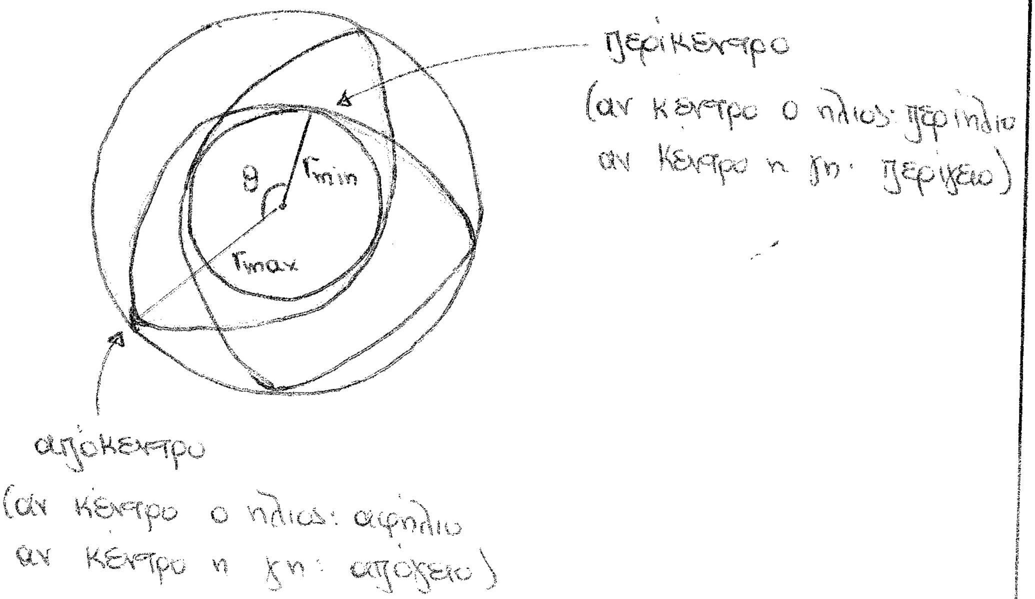
Εαν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, τότε $r_{min} = r_{max}$ και έχουμε κυκλική κίνηση.

Συνεπώς, η κίνηση γίνεται μέσα σε ένα δακτύλιο τιμών του r, ο οποίος καθορίζεται από τις ανισότητες

$$\boxed{0 \le r_{min} \le r \le r_{max} \le +\infty} \qquad (10).$$

Η κίνηση γίνεται ανάμεσα στους δύο κύκλους.

Στο παράδειγμα του παρακάτω σχήματος το r ταλαντώνεται περιοδικά μεταξύ περίκεντρου και απόκεντρου και το θ μεταβάλλεται μονότονα.



Τα απόκεντρα και τα περίκεντρα είναι εδώ οι αψίδες.

Οι τροχιές είναι κλειστές (όπως π.χ. στο σχήμα) μόνον όταν ισχύει η συνθήκη: $\theta = 2\pi \frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbb{Z}$.

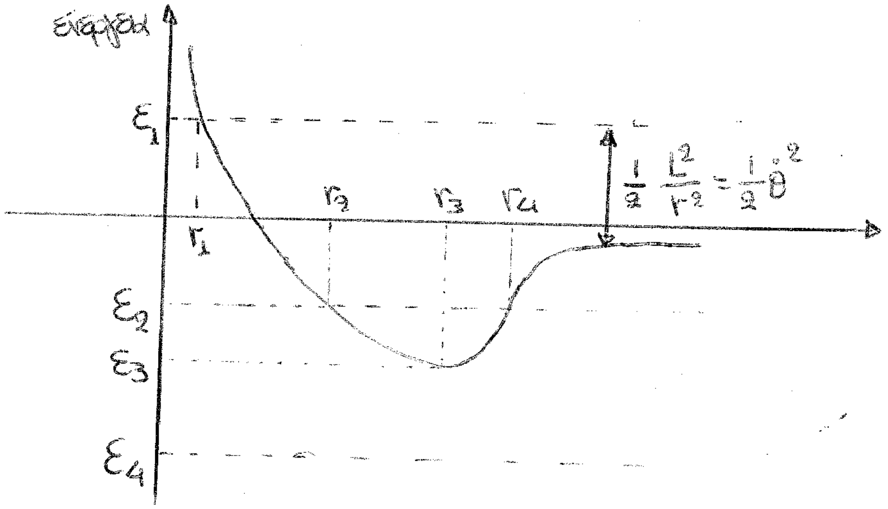
Σε κάθε άλλη περίπτωση (δηλαδή αν το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π) η τροχιά είναι πυκνή στο δακτύλιο.

Η συνθήκη της κλειστότητας της τροχιάς ισχύει μόνο σε δύο περιπτώσεις κίνησης:

(i) όταν $U(r) = Kr^2$, $K>0$ (απλός αρμονικός ταλαντωτής)

(ii) όταν $U(r) = -\frac{K}{r}$ (βαρύτητα ή ηλεκτρομαγνητισμός)

Γενικά η κίνηση μπορεί να περιγραφεί και μέσω του ακόλουθου διαγράμματος ενέργειας:



Για $E = E_1 > 0$ η κίνηση είναι μη φραγμένη. Αν θεωρήσουμε ότι έρχεται από το ∞ με πολύ μικρή δυναμική ενέργεια, ανακλάται στο r_1 και επιστρέφει στο ∞. Εδώ $r_{max} = \infty$ και $r_{min} = r_1$.

Για $E = E_2 < 0$ η κίνηση είναι φραγμένη μεταξύ των αψίδων r_2 και r_4.

Για $E=E_3$ έχουμε κυκλική κίνηση με $r_{min}=r_{max}=r_3$.

Για $E=E_4$ η κίνηση είναι αδύνατη, αφού προκύπτει $\dot{r}^2<0$.

.2 Νόμοι του Kepler

Θεώρημα.1 (Kepler, 1609)

Η ταχύτητα διαστολής ή εμβαδική ταχύτητα, $c=\frac{ds}{dt}$, όπου S είναι το εμβαδόν της περιοχής που σαρώνει το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου που κινείται σε κεντρικό πεδίο, είναι σταθερή.

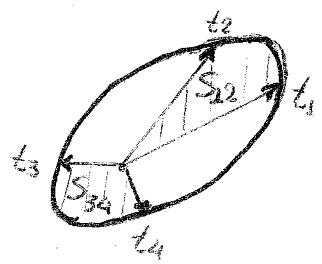
Αλλιώς,

Το διάνυσμα θέσης σε ίσους χρόνους σαρώνει ίσα εμβαδά.

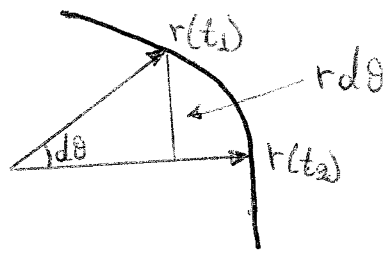
(Αυτός είναι ο δεύτερος νόμος του Kepler)

Απόδειξη.

Το θεώρημα λέει ότι αν στο παρακάτω σχήμα, ισχύει ότι $t_2-t_1=t_4-t_3$, τότε έπεται η αντίστοιχη ισότητα εμβαδών, $S_{12}=S_{34}$.



Στο παρακάτω σχήμα, που είναι ένα τμήμα της τροχιάς, ισχύει:



$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, και διαιρώντας με dt, έχουμε ότι:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} L = \text{σταθερό}.$$

Στη γλώσσα των απειροστών, η απόδειξη μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έχουμε ότι,

$$\left\{\begin{array}{l} \theta \to \theta + \delta\theta \\ s \to s + \delta s \end{array}\right\} \quad \text{οπότε} \quad \left\{\begin{array}{l} \delta\theta = \dfrac{d\theta}{dt}\delta t \\ \delta s = \dfrac{ds}{dt}\delta t \end{array}\right. ,$$

και από τη γεωμετρία του τριγώνου του Σχήματος,

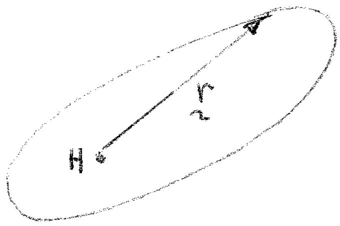
$$\delta s = \frac{1}{2} r^2 \delta\theta \Rightarrow \dot{s}\,\delta t = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}\,\delta t \Rightarrow \dot{s} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{s} = \frac{1}{2} L = \text{σταθερό}.$$

Εφαρμογή

Ο χρόνος που περνά ένας δορυφόρος του ήλιου με πολύ επιμήκη τροχιά στις απομακρυσμένες περιοχές της τροχιάς του είναι μεγαλύτερος από αυτόν που περνά κοντά στον ήλιο.

<u>Απόδειξη</u>



Επειδή, C = σταθερό $\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ = σταθερό, έπεται ότι όταν το r είναι μεγάλο (απομακρυσμένη περιοχή) το $\dot{\theta}$ (η γωνιακή του ταχύτητα) είναι μικρό. ⊠

Στη συνέχεια θα διατυπωθεί <u>το πρόβλημα του Kepler:</u> Να μελετηθεί η κεντρική κίνηση ενός υλικού σημείου σε πεδίο ανάλογο του $\frac{1}{r^2}$, δηλαδή $F \propto \frac{1}{r^2}$, δηλαδή όταν η δυναμική ενέργεια είναι ίση με

$$U(r) = -\frac{K}{r}, \quad K = \text{σταθ.}$$

Το ενεργό δυναμικό είναι

$$V = -\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2r^2},$$

και από τη γενική σχέση για το θ,

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{L}{r^2}\, dr}{\sqrt{2\left(E + \frac{K}{r} - \frac{L^2}{2r^2}\right)}}, \quad \text{θέτοντας } u = \frac{1}{r},$$

έχουμε

$$\theta\left(\frac{1}{u}\right) = \int \frac{-L\, du}{\sqrt{2\left(E + Ku - \frac{L^2}{2} u^2\right)}},$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\cos\theta = \frac{\frac{L^2}{K}\cdot\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{K^2}}}.$$

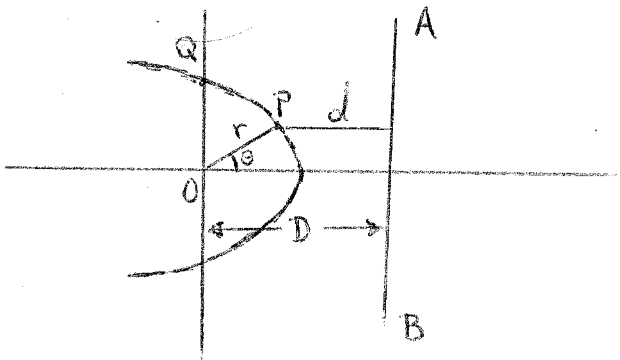
Θέτοντας $\boxed{p = \frac{L^2}{K}}$ (1) και $\boxed{e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{K^2}}}$ (2),

έχουμε: $\boxed{p = r\left(1+e\cdot\cos\theta\right)}$ (3)

Σε αυτό το σημείο και για να εξηγήσουμε την εξίσωση (3), θα περιγράψουμε τις κωνικές τομές σε πολικές συντεταγμένες.

<u>Κωνικές τομές</u>

Έστω σταθερό σημείο O στο επίπεδο και μια σταθερή ευθεία AB σε απόσταση D από το O. Ένα σημείο



Κινείται στο επίπεδο έτσι, ώστε αν e δοθείσα θετική σταθερά τότε $\frac{r}{d} = e$.

Έτσι $r = d\cdot e$ και για το σημείο Q του σχήματος,

$$\frac{p}{D} = e \Rightarrow p = e\cdot D.$$

Άλλα, $D = d + r\cdot\cos\theta = \frac{r}{e} + r\cdot\cos\theta = \frac{r}{e}(1 + e\cdot\cos\theta)$.

Απαλείφοντας το D έχουμε,

$$p = r(1 + e\cdot\cos\theta).$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει κωνική τομή.

Αν $e=0$ ⇝ κύκλος κέντρου O και ακτίνας p.

Αν $0<e<1$ ⇝ έλλειψη.

Αν $e=1$ ⇝ παραβολή.

Αν $e>1$ ⇝ υπερβολή.

Στα παραπάνω χρησιμοποιούμε την εξής ορολογία:

Το O το λέμε <u>εστία</u>.

Την ευθεία AB τη λέμε <u>διευθετούσα</u>.

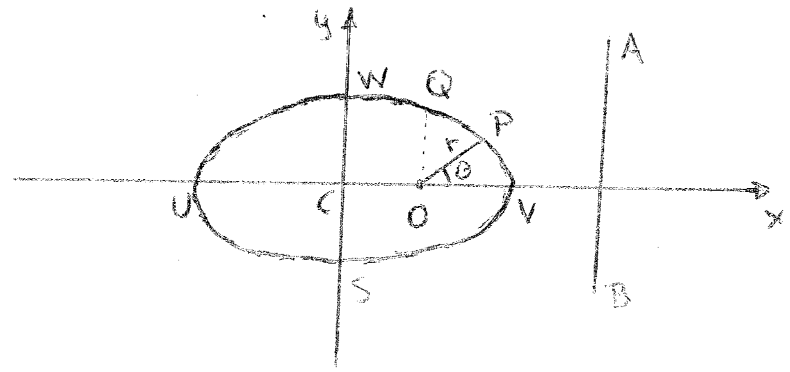
Τη σταθερά e τη λέμε <u>εκκεντρότητα</u>.

(2) <u>Έλλειψη</u>.

Αν C το κέντρο της έλλειψης και θέσουμε,

$CV = CU = a$: μήκος μεγάλου ημιάξονα,

$CW = CS = b$: μήκος μικρού ημιάξονα,



Τότε αν $\theta=0 \Rightarrow r=OV$ και αν $\theta=\pi \Rightarrow r=OU$, άρα από την εξίσωση κωνικής τομής θα έχουμε,

$$OV=\frac{p}{1+e} \quad , \quad OU=\frac{p}{1-e}.$$

Αλλά το μήκος του μεγάλου άξονα είναι, $2\alpha=OU+OV$.

Άρα, $2\alpha=\dfrac{p}{1+e}+\dfrac{p}{1-e} \Rightarrow p=\alpha(1-e^2)$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση των κωνικών τομών προκύπτει,

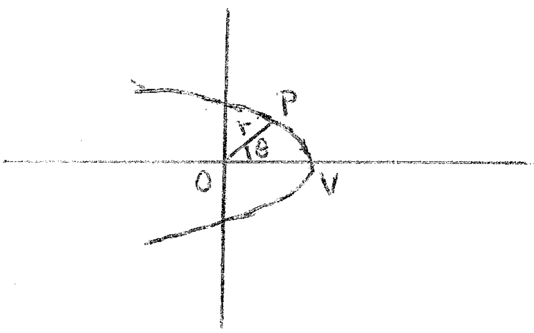
$$\boxed{r=\frac{\alpha(1-e^2)}{1+e\cdot\cos\theta}} \qquad (4) \quad ,$$

που είναι η εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες.

(ιι) Παραβολή

Η εξίσωση της παραβολής, σε πολικές συντεταγμένες είναι,

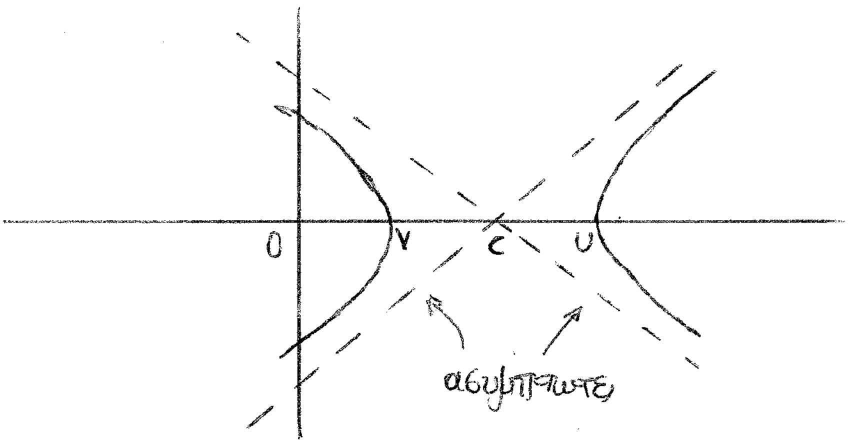
$$\boxed{r=\frac{p}{1+\cos\theta}} \qquad (5) \quad .$$



Η παραβολή είναι ειδική περίπτωση της έλλειψης όταν $\alpha\to\infty$, όπου $e\to 1$ (δηλαδή όταν ο μεγάλος ημιάξονας τείνει στο άπειρο).

(iii) Υπερβολή

Μόνον ένας κλάδος αρκεί για να περιγράψει την τροχιά του σωματιου.



Το C (τομή των ασυμπτώτων) λέγεται κέντρο της υπερβολής. Ο UV είναι ο μεγάλος άξονας και CV=CU ο μεγάλος ημιάξονας.

Η εξίσωση της υπερβολής σε πολικές συντεταγμένες (αποδεικνύεται όπως και στην έλλειψη) είναι,

$$\boxed{r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cdot\cos\theta}} \qquad (6)$$

Εδώ ολοκληρώνεται η παρένθεση των κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες. Επανερχόμενοι στην εξίσωση (3) παρατηρούμε ότι είναι εξίσωση κωνικής τομής. Άρα:

Θεώρημα 2 (Bernoulli, 1710)

Όλες οι τροχιές στο πρόβλημα του Kepler (δηλαδή σε κεντρικό δυναμικό: $V \propto \frac{1}{r}$) είναι κωνικές τομές.

Άρα, αφού $2\alpha = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}$, δηλαδή $r_{min} = \frac{p}{1+e}$ και $r_{max} = \frac{p}{1-e}$,

έπεται ότι $\alpha = \frac{p}{1-e^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

Αντικαθιστώντας τα p και e από τις (1) και (2),

$$\boxed{\alpha = \frac{K}{2|E|}} \quad (7), \qquad \boxed{b = \frac{L}{\sqrt{2|E|}}} \quad (8),$$

και το e σχετίζεται (μέσω της εξ. (2)) με το **E** ως εξής:

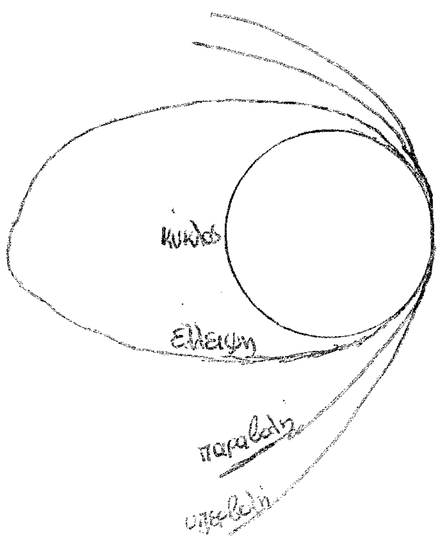
Αν $E>0 \rightsquigarrow e>1$ και έχουμε υπερβολή.

Αν $E=0 \rightsquigarrow e=1$ και έχουμε παραβολή.

Αν $V_{min}<E<0 \rightsquigarrow 0<e<1$ και έχουμε έλλειψη.

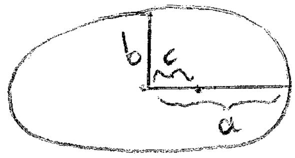
Αν $E=V_{min} \rightsquigarrow e=0$ και έχουμε κύκλο.

Αν $E<V_{min} \rightsquigarrow e<0$ και είναι αδύνατη η κίνηση.



Παρατήρηση

Μια έλλειψη μικρής εκκεντρότητας e μοιάζει σαν κύκλος.



Αν το c είναι μικρό, τότε η διαφορά των δύο ημιαξόνων είναι $\left[\text{αφού } b=a\sqrt{1-e^2} \simeq a\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\right]$,

$a-b \simeq \frac{1}{2}e^2$.

Έτσι, για παράδειγμα αν $a=10cm$ και $e=0{,}1$ τότε $a-b \simeq 0{,}5mm$ και $c=1cm$, δηλαδή το e είναι μικρό και η έλλειψη μοιάζει πολύ με κύκλο.

Οι πλανήτες κινούνται σε ελλείψεις με πολύ μικρές εκκεντρότητες. Γι' αυτό ο Kepler "ξεγελασμένος" διατύπωσε τον 1ο νόμο του ως εξής:

Πρώτος νόμος του Kepler:

"Οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον Ήλιο σε κύκλους αλλά ο Ήλιος δεν είναι στο κέντρο".

Η σύγχρονη διατύπωση βέβαια, του 1ου νόμου είναι η εξής:

"Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο, με τον Ήλιο σε μια εστία".

Παρατήρηση

Από την (7) στην μορφή $|E| = \frac{k}{2a}$, έπεται ότι όλες οι τροχιές του ίδιου a έχουν την ίδια ολική ενέργεια (από κύκλο ακτίνας a μέχρι ευθύγραμμο τμήμα μήκους $2a$).

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την περίοδο T της ελλειπτικής κίνησης.

Επειδή η εμβαδική ταχύτητα c είναι,

$$c = \frac{L}{2} = \frac{S}{T},$$

όπου S το εμβαδόν που σαρώνεται από το διάνυσμα θέσης σε χρόνο T και $S = \pi \cdot a b$ το εμβαδόν της έλλειψης, έπεται ότι,

$$2S = L \cdot T \Rightarrow T = 2\pi \frac{ab}{L}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των δύο ημιαξόνων a και b, έχουμε,

$$T = \frac{2\pi}{L} \frac{k}{2|E|} \cdot \frac{L}{\sqrt{2|E|}} = \pi k \sqrt{\frac{1}{2}} \, |E|^{-3/2}.$$

Αντικαθιστώντας όπου $|E| = \frac{k}{2a}$ έχουμε,

$$T = \pi k \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, k^{-3/2} \cdot \alpha^{3/2} (\sqrt{2})^3 = 2\pi k^{-1/2} \alpha^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 \propto \alpha^3} \qquad (9).$$

Η εξίσωση (9) είναι ο <u>τρίτος νόμος του Kepler</u>.

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο αυτό

με ένα <u>θεώρημα ύπαρξης και ευστάθειας κυκλικών τροχιών.</u>

<u>Θεώρημα.3.</u>

Οι κυκλικές τροχιές υπάρχουν και είναι ευσταθείς μόνον όταν η δύναμη $f(r) = -\frac{k}{r^n}$ ικανοποιεί την $n<3$ $(n \in \mathbb{Z})$.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι,

$$U(r) = -\frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}},$$ και άρα η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι,

$$V(r) = -\frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}} + \frac{L^2}{2r^2}.$$

Οι συνθήκες για ύπαρξη ευσταθούς κυκλικής τροχιάς ακτίνας ρ είναι,

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=\rho} = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=\rho} > 0.$$

Δηλαδή,

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=\rho} = \frac{k}{\rho^n} - \frac{L^2}{\rho^3} = 0 \Rightarrow \rho^{n-3} = \frac{k}{L^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=\rho} = -\frac{nk}{\rho^{n+1}} + \frac{3L^2}{\rho^4} > 0 \Rightarrow -\frac{nk}{\rho^{n-3}} + 3L^2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow (3-n)L^2 > 0 \Rightarrow n < 3 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

... <u>Θέματα</u>

Θέμα 1ο//

Δείξτε ότι με την αντικατάσταση $r = \frac{1}{u}$, η διαφορική εξίσωση της τροχιάς σε κεντρικό πεδίο, γίνεται,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{-f\left(\frac{1}{u}\right)}{m \cdot L^2 u^2}.$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση κίνησης είναι,

μάζα × επιτάχυνση = δύναμη $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underset{\sim}{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\underset{\sim}{e}_\theta\right] = f(\underset{\sim}{r})\underset{\sim}{e}_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) & (*) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 & (**) \end{cases}$$

Θέτοντας $r=\frac{1}{u}$ έχουμε ότι η στροφορμή είναι,

$$L=r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{L}{r^2}=L\cdot u^2,$$

και αντικαθιστώντας το $\dot{\theta}$ στην (*) παίρνουμε,

$$m\left(\ddot{r}-\frac{L^2}{r^3}\right)=f(r) \qquad (***) .$$

Επίσης,

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-L\frac{du}{d\theta} ,$$

και

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(-L\cdot\frac{du}{d\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-L\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-L^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Αντικαθιστώντας το $\ddot{r}$ στην (***) έχουμε ότι,

$$m\left(-L^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-L^2u^3\right)=f\left(\frac{1}{u}\right) \xrightarrow{\text{διαιρώντας με } (-mL^2u^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{-f\left(\frac{1}{u}\right)}{mL^2u^2}.$$

Θέμα 2ο//

Γράψτε το νόμο διατήρησης της ενέργειας για ένα υλικό σημείο μάζας m σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων.

Λύση

1ος τρόπος

Χρησιμοποιούμε το ότι:

$\frac{1}{2}mv^2+V=E \quad , \; v=\dot{r}$

$\underset{\sim}{v}=\dot{r}\,\underset{\sim}{e}_r+r\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta$ με $v^2=\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$,

και άρα έχουμε,

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\int f(r)\,dr=E=\text{σταθερό}.$$

2ος τρόπος

Από τις εξισώσεις κίνησης, δηλαδή τις (*) και (**) του θέματος 1, έχουμε ότι,

$$(*)\times\dot{r}+(**)\times r\dot{\theta}=m\left(\dot{r}\ddot{r}+r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+r\dot{r}\dot{\theta}^2\right)=f(r)\cdot\dot{r}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{d}{dt}\int f(r)\,dr,$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\int f(r)\,dr=E=\text{σταθερό}.$$

Θέμα 3ο

(α) Αν $u=\frac{1}{r}$, τότε δείξτε ότι,

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=L^2\cdot\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right].$$

(b) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας γράφεται,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\frac{2(E-V)}{mL^2}.$$

Λύση

(α) Από το θέμα 1 έχουμε ότι,

$$\dot{\theta} = L \cdot u^2 \quad , \quad \dot{r} = -L \frac{du}{d\theta} ,$$

και άρα,

$$u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = L^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}(Lu^2)^2 = L^2 \cdot \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] .$$

(β) Έχουμε ότι,

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = E - V \quad \text{[από το θέμα 2 - 2ος τρόπος]} .$$

Συνεπώς,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E-V)}{mL^2} .$$

Θέμα 4ο//

Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις της κεντρικής κίνησης γράφονται :

$$\frac{mL^2}{2r^4} \cdot \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\,dr = E .$$

Λύση

Από το θέμα 2 - 2ος τρόπος και το ότι $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$, η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας γράφεται,

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\dot{\theta}^2 - \int f(r)dr = E \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\dot{\theta} = \frac{L}{r^2}} \frac{mL^2}{2r^4} \cdot \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)dr = E .$$

Θέμα 5ο//

Δείξτε ότι αν η κεντρική δύναμη είναι,

$$f(r) = -\frac{K}{r^2} \quad , \; K>0 \; ,$$

ώστε η τροχιά του υλικού σημείου είναι κωνική τομή, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $r = \frac{1}{u}$.

Λύση

Έχουμε ότι $f(u) = -Ku^2$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του θέματος 1, δηλαδή στην $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-f(\frac{1}{u})}{mL^2u^2}$ έπεται ότι,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mL^2} \quad (*) \; .$$

Η γενική λύση (με άγνωστη συνάρτηση $u = u(\theta)$) είναι,

$$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{K}{mL^2} \quad (**) \qquad [\text{όπου } A, B \text{ σταθερές}].$$

Ισχυριζόμαστε ότι η (**) γράφεται,

$$u = \frac{K}{mL^2} + c\cdot\cos(\theta - \varphi) \quad , \; \varphi \in [0, \pi] \, , \text{ σταθ.} \; (***) .$$

Αυτό ισχύει διότι,

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta\right) =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\varphi\cdot\cos\theta + \sin\varphi\,\sin\theta) = c\cdot\cos(\theta-\varphi) ,$$

όπου $\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Άρα η (***) γράφεται,

$$r = \frac{1}{\frac{k}{mL^2} + \cos(\theta - \varphi)} .$$

Θεωρώντας $\varphi = 0$, έπεται ότι,

$$r = \frac{1}{\frac{k}{mL^2} + C \cdot \cos\theta} ,$$

που είναι εξίσωση κωνικής τομής, αφού προκύπτει από την εξίσωση,

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cdot \cos\theta} ,$$

αν θέσουμε,

$$\frac{1}{p} = \frac{k}{mL^2} \quad \text{και} \quad \frac{e}{p} = c .$$

Θέμα 6ο//

(a) Βρείτε τη σταθερά C του θέματος (5), ως συνάρτηση της ενέργειας E.

(b) Δείξτε ότι η κωνική τομή είναι έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, αν $E < 0, = 0, > 0$ αντίστοιχως.

<u>Λύση</u>

(a) Από το θέμα 3. γνωρίζουμε ότι,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E - V)}{mL^2} \quad (*) ,$$

και αρα ξητουμε εκφρασεις ολων των παραμετρων (εκτος της E) συναρτησει του C.

$$U = -\int f(r)\,dr = \int \frac{k}{r^2}\,dr = -\frac{k}{r} = -ku \quad .$$

[Χρησιμοποιουμε τη Νευτώνεια υποθεση οτι $\lim U(r) = 0$ και εκλεγουμε τη σταθερα ολοκληρωσης ιση με μηδεν οταν $r \to \infty$]

Απο το θεμα 5 εχουμε οτι,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{k}{mL^2} + C\cdot\cos\theta,$$

και αρα η (*) γραφεται,

$$(C\sin\theta)^2 + \left(\frac{k}{mL^2} + C\cdot\cos\theta\right)^2 = \frac{2E}{mL^2} + \frac{2k}{mL^2}\left(\frac{k}{mL^2} + C\cdot\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{k^2}{m^2L^4} + \frac{2E}{mL^2} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{k^2}{m^2L^4} + \frac{2E}{mL^2}}\ ,\ C>0 \quad (**)$$

(b) Αντικαθιστωντας το C απο την (**) στην εξισωση κωνικης τομης προκυπτει οτι,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{k}{mL^2}\cdot\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EmL^2}{k^2}}\cdot\cos\theta\right];$$

και συγκρινοντας βρισκουμε οτι,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EmL^2}{k^2}} \qquad (***) .$$

Αρα, επεται αμεσως απο την (***) οτι:

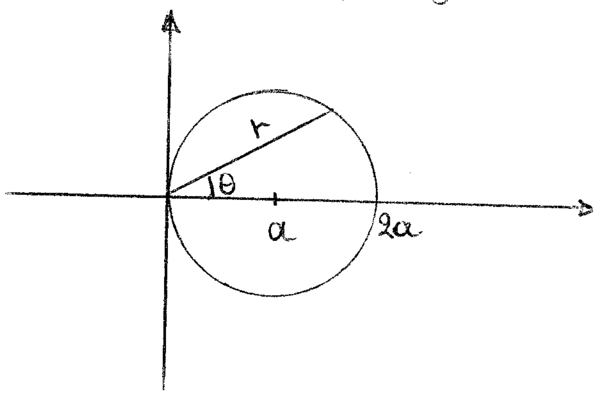
αν $E<0$ ~> ελλειψη,
αν $E=0$ ~> παραβολη,
αν $E>0$ ~> υπερβολη.

Θέμα 7ο

Αν η τροχιά ενός υλικού σημείου σ' ένα κεντρικό πεδίο με κέντρο O, είναι κύκλος που διέρχεται από το O, βρείτε το πεδίο.

Λύση

Σε πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση της τροχιάς είναι:



$$r=2a\cdot\cos\theta.$$

Επειδή $u=\frac{1}{r}=\frac{\sec\theta}{2a}$, έχουμε,

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{\sec\theta\cdot\tan\theta}{2a}\Rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{\sec\theta\cdot\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta\tan\theta}{2a}=$$

$$=\frac{\sec^3\theta+\sec\theta\cdot\tan^2\theta}{2a}.$$

Άρα, από τη σχέση του θέματος 1 έχουμε,

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=-mL^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u^2\right)=$$

$$=-mL^2u^2\,\frac{\sec^3\theta+\sec\theta\tan^2\theta+\sec\theta}{2a}=$$

$$= -\frac{mL^2u^2}{2a}\left(\sec^3\theta + \sec\theta(\tan^2\theta+1)\right) = -\frac{mL^2u^2}{2a}\cdot 2\sec^3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u) = -8mL^3a^2u^5 \Rightarrow f(r) = -\frac{8mL^3a^2}{r^5}.$$

Θέμα 8ο//

Δείξτε ότι αν ένας πλανήτης κινείται ελλειπτικά γύρω από τον Ήλιο, που βρίσκεται σε μια εστία, τότε η κεντρική δύναμη μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης r.

Λύση

Επειδή $r = \frac{p}{1+e\cdot\cos\theta}$ $(e<1)$, έπεται ότι,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cdot\cos\theta.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση του θεώρηματος 1 έχουμε,

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -mL^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u^2\right) = -\frac{mL^2u^2}{p} \text{ και άρα,}$$

$$f(r) = -\frac{mL^2}{pr^2} = -\frac{K}{r^2}, \text{ όπου } K = \frac{mL^2}{p} > 0.$$

Θέμα 9ο//

Ποια είναι η σχέση του νόμου της παγκόσμιας έλξης με το θέμα 8.

Λύση

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης είναι:

$$\underset{\sim}{f} = -\frac{GMm}{r^2}\cdot \underset{\sim}{e}_r ,$$

και άρα η σταθερά K του θέματος 8 είναι GMm.

Θέμα 10ο//

Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, η τροχιά ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο είναι έλλειψη, με τον Ήλιο σε μια εστία.

Λύση

Η δύναμη μεταξύ πλανήτη - Ηλίου είναι,

$$\underset{\sim}{F} = m\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\underset{\sim}{e}_r ,$$

και άρα

$$\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\underset{\sim}{e}_r \quad (*).$$

Επειδή,

$$\underset{\sim}{r}\times\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{h} = \text{σταθερό},$$

(δηλαδή η κίνηση είναι επίπεδη).

Επειδή $\underset{\sim}{r} = r\cdot\underset{\sim}{e}_r$ έπεται ότι (παραγωγίζοντας),

$$\underset{\sim}{v} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = r\frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} + \underset{\sim}{e}_r\frac{dr}{dt} ,\ \text{δηλαδή},$$

$$\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v} = r \cdot \underset{\sim}{e}_r \times \left(r \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} + \underset{\sim}{e}_r \frac{dr}{dt} \right) = r^2 \underset{\sim}{e}_r \times \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} .$$

Απο την (*) έπεται ότι,

$$\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} \times \underset{\sim}{h} = -\frac{GM}{r^2} \underset{\sim}{e}_r \times \underset{\sim}{h} = -GM \underset{\sim}{e}_r \times \left(\underset{\sim}{e}_r \times \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} \right) =$$

$$= -GM \left\{ \left(\underset{\sim}{e}_r \cdot \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} \right) \underset{\sim}{e}_r - \left(\underset{\sim}{e}_r \cdot \underset{\sim}{e}_r \right) \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} \right\} =$$

$$= GM \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt} .$$

Αλλά $\underset{\sim}{h}$ = σταθερό, άρα $\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} \times \underset{\sim}{h} = \frac{d}{dt} (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{h})$,

και έτσι,

$\frac{d}{dt} (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{h}) = GM \frac{d\underset{\sim}{e}_r}{dt}$ και ολοκληρώνοντας,

$$\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{h} = GM \underset{\sim}{e}_r + \underset{\sim}{c} .$$

Συνεπώς

$$\underset{\sim}{r} \cdot (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{h}) = (\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v}) \cdot \underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{h} = h^2 ,$$

δηλαδή

$$h^2 = GMr + rc\cos\theta \qquad (**) ,$$

γιατί

$$\underset{\sim}{r} \cdot (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{h}) = GM \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}_r + rc\cos\theta .$$

Τώρα, λύνουμε την (**) ως προς r και έχουμε ότι,

$$r = \frac{h^2}{GM + c\cos\theta} = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{c}{GM}\cos\theta},$$

που είναι εξίσωση κωνικής τομής με

$$p = \frac{h^2}{GM} \quad \text{και} \quad e = \frac{c}{GM}.$$

Θέμα 11ο//

Έστω υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε πεδίο

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad k>0$$

σε ελλειπτική τροχιά.

Αποδείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητάς του δίνεται από τη σχέση,

$$v^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

όπου a ο μεγάλος ημιάξονας.

Λύση

Έχουμε $p = \frac{mL^2}{k} = a(1-e^2) = a\left(-\frac{2EmL^2}{k^2}\right)$. Άρα,

$$E = -\frac{k}{2a}.$$

Η δυναμική ενέργεια είναι $U = -\frac{k}{r}$ και άρα η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, δηλ. η $E = T + U$, δίνει,

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - U = -\frac{k}{2a} + \frac{k}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Ομοίως, είναι εύκολο να δειχθεί ότι για μια υπερβολή, $v^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$, ενώ για μια παραβολή,

$$v^2 = \frac{2k}{mr} \quad (a \to +\infty).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται συντηρητικά με κινητική ενέργεια (σε καρτεσιανές συντεταγμένες), $T=\frac{1}{2}m\cdot\dot{x}^2$, $x=x(t)$ και δυναμική ενέργεια $U=U(x)$.
Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα:

$$m\cdot\ddot{x}=-\frac{dU}{dx} \iff \frac{d}{dt}(m\dot{x})+\frac{dU}{dx}=0,$$

και αφού $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$ έπεται ότι,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{d(-U)}{dx}=0,$$

ή θέτοντας $L=T-U$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0} \qquad (1)$$

Η συνάρτηση L ονομάζεται η Λαγκραντζιανή συνάρτηση του υλικού σημείου και η εξίσωση (1) ονομάζεται η εξίσωση Euler-Lagrange του υλικού σημείου.

Η L προφανώς γράφεται αναλυτικά $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x)$.

Η παραπάνω ισοδυναμία επεκτείνεται και σε συντηρητικά συστήματα n υλικών σημείων.

Αν $\underset{\sim}{x}_i$ το διάνυσμα θέσης του i-οστού σημείου, αυτό γίνεται ως εξής:

Αν $\underset{\sim}{x}_i = (x^1, \dots, x^n)$ έχουμε,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad , \quad U = U(\underset{\sim}{x}),$$

όπου $\underset{\sim}{x}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος. Ο νόμος του Νεύτωνα στην περίπτωση αυτή γράφεται:

$$m \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{\nabla} \cdot U(\underset{\sim}{x}) = 0 \iff$$

$$\iff m \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad \iff$$

$$\iff \frac{d}{dt}(m \dot{x}_i) + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial(-U)}{\partial x_i} = 0 .$$

Εισάγοντας τη λαγκρανζιανή του συστήματος,

$$L = T - U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(\underset{\sim}{x}),$$

έπεται ότι,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n} \qquad (2) \quad .$$

Οι εξισώσεις (2) είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης για τις άγνωστες συναρτήσεις $x_i = x_i(t)$, καθορίζουν το σύστημα και ονομάζονται <u>εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος</u>.

Για ένα υλικό σημείο, που κινείται περιορισμένο, όχι σε όλο το χώρο $\mathbb{R}^3$, αλλά μόνο στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$, οι ανεξάρτητες συντεταγμένες που καθορίζουν τη θέση του δεν είναι τρεις, δηλαδή οι x, y, z, αλλά μόνο δύο από αυτές, έστω οι q_1, q_2.

Θεωρούμε τώρα ότι έχουμε ένα σύστημα, που περιγράφεται από n ανεξάρτητες συντεταγμένες $q_1, \dots, q_n$. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας, όπου οι,

$$\boxed{q_i = q_i(t)} \qquad (3)$$

ονομάζονται <u>γενικευμένες συντεταγμένες</u> του συστήματος.

Για ένα υλικό σημείο 1.Β.Ε. έχουμε μία γενικευμένη συντεταγμένη, την $q = q(t)$. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε τη <u>γενικευμένη ταχύτητα</u>, ως,

$$\boxed{\dot{q} = \frac{dq}{dt}} \qquad (4) \quad ,$$

την <u>κινητική ενέργεια</u> ως

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2} \qquad (5) \quad ,$$

και τη <u>δυναμική ενέργεια</u> ως

$$\boxed{V = V(q)} \qquad (6) \quad .$$

Η λαγκρανζιανη συνάρτηση του υλικου σημείου σε γενικευμενες συντεταγμενες ειναι,

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)} \qquad (7),$$

ενώ ορίζουμε τη γενικευμένη ορμη του σημειου ως

$$\boxed{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \left(= m\dot{q}\right)} \qquad (8).$$

Η εξίσωση κίνησης (νόμος του Νεύτωνα) σε γενικευμενες συντεταγμενες ειναι,

$$\boxed{m \cdot \ddot{q} = F(q) = -\frac{dV}{dq}} \qquad (9),$$

και αυτή ειναι ισοδύναμη με την εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 ,$$

όπου η γενικευμένη δύναμη ορίζεται ως,

$$\boxed{\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \left(= -\frac{dV}{dq}\right)} \qquad (10),$$

αφού η εξίσωση Euler-Lagrange δηλωνει οτι

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} .$$

Ομοίως, για ενα σύστημα n βαθμων ελευθεριας, ορίζουμε γενικευμενες συντεταγμενες q_i, γενικευμενες ταχύτητες $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, γενικευμένες ορμές $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ και γενικευμένες δυνάμεις $\frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Ένα τέτοιο σύστημα ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n} \qquad (11) \; ,$$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος σε γενικευμένες συντεταγμένες.

Η περιγραφή της εξέλιξης των μηχανικών συστημάτων μέσω των εξισώσεων (11) ονομάζεται λαγκρανζιανή περιγραφή και η μηχανική, μελετημένη με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται λαγκρανζιανή δυναμική.

Παρατήρηση

Ισχύει η σχέση:

$$\begin{matrix}\text{Νευτώνεια} \\ \text{Μηχανική}\end{matrix} \subsetneq \begin{matrix}\text{Λαγκρανζιανή} \\ \text{Μηχανική}\end{matrix} \; ,$$

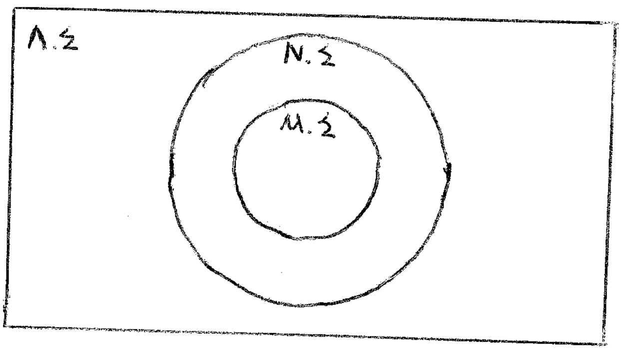
με την εξής έννοια:

Κάθε νευτώνειο σύστημα $T, \mathcal{V}$ είναι λαγκρανζιανό, αρκεί να θέσουμε $L = T - \mathcal{V}$. Εν γένει όμως, τα λαγκρανζιανά συστήματα δεν είναι πάντα νευτώνεια, αφού η εξίσωση Euler-Lagrange ανάγεται στο νόμο του

Νευτωνα μόνο αν $L=T-U$.

Στη γενική τους μορφή, τα νευτώνεια συστήματα είναι της μορφής $U=U(q,\dot{q})$. Η ειδική περίπτωση νευτώνειων συστημάτων όπου $U=U(q)$ ονομάζονται μηχανικά συστήματα. Έτσι π.χ στο πρόβλημα των δύο σωμάτων $U=U(q)$ και έχουμε ένα μηχανικό, άρα νευτώνειο σύστημα. Αντίθετα τα συστήματα στον ηλεκτρομαγνητισμό, όπου $U=U(q,\dot{q})$ είναι νευτώνεια, αλλά δεν είναι μηχανικά.

Το παρακάτω σχήμα συνοψίζει τη σχέση λαγκρανζιανών συστημάτων (Λ.Σ), νευτώνειων συστημάτων (Ν.Σ) και μηχανικών συστημάτων (Μ.Σ).



Παράδειγμα 1

Για ένα ελεύθερο υλικό σημείο, που κινείται στον $\mathbb{R}^3$ να βρεθούν η λαγκρανζιανή L, οι εξισώσεις Euler-Lagrange και οι τροχιές της κίνησης.

Λύση

Ελεύθερο σημείο $\sim U=0$ και επιπλέον,

$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$. Άρα $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$.

Επειδή $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$, η εξίσωση Euler-Lagrange, θέτοντας

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, γράφεται: $\dot{p} = 0$, όπου $p = m\dot{q}$.

Άρα $m\dot{q} = c$, δηλαδή $q = c_1 t + c_2$, που σημαίνει ότι οι τροχιές είναι ευθείες.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Κεντρική κίνηση.

<u>Λύση</u>

Η κινητική ενέργεια είναι, $T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$,
και επειδή $V = V(r)$, θέτοντας $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ έχουμε,

$$L = T(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}) - V(\underset{\sim}{q}), \quad \text{όπου } \underset{\sim}{q} = (q_1, q_2).$$

Οι γενικευμένες ορμές $\underset{\sim}{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{q}}}$ είναι:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = m\dot{q}_1 \qquad \text{και}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}.$$

Άρα η πρώτη εξίσωση Euler-Lagrange είναι,

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial L}{\partial r},$$

και επειδή η $q_2 = \theta$ δεν υπάρχει στην L, έπεται ότι,

$$\dot{P}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

δηλαδή $P_2 = mr^2\dot{\theta} = L = $ σταθερό.

Η τελευταία σχέση είναι ο νόμος διατήρησης της στροφορμής.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Μελετήσατε μέσω της λαγκρανζιανής διατύπωσης το πρόβλημα των βολών, όπου,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{και} \quad V = -mgy.$$

<u>Λύση</u>

Η λαγκρανζιανή είναι,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + mgy.$$

Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = g \cdot m \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

και επιπλέον,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\cdot\dot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\cdot\ddot{x}.$$

Έτσι οι εξισώσεις Euler - Lagrange γράφονται,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \quad ,$$

και άρα,

$$m\ddot{x} - gm = 0\,,\quad m\ddot{y} = 0\,,\quad \text{ή}$$

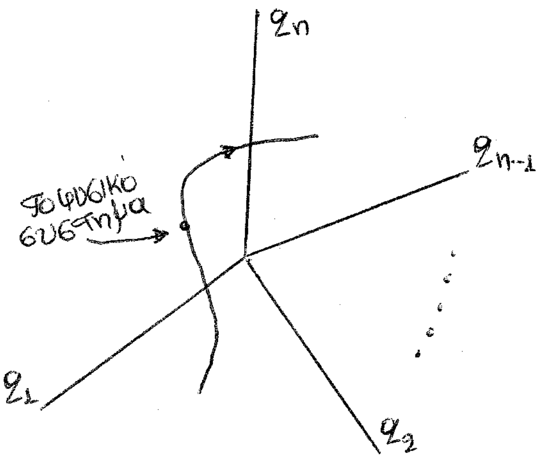
$$\ddot{x} - g = 0\,,\quad \ddot{y} = 0,$$

οι οποίες, όπως αναμένονταν, συμφωνούν με τις εξισώσεις του Νεύτωνος του εν λόγω προβλήματος.

~·~

Ο χώρος των σημείων με γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \dots, q_n$ είναι ένας n-διάστατος χώρος και ονομάζεται χώρος καταστάσεων του L-συστήματος. Συμβολίζεται με V_N.

Το πρόβλημα της L-μηχανικής, έγκειται στην εύρεση των κινήσεων του συστήματος ενός τυχόντος L-συστήματος, το οποίο απεικονίζεται ως ένα σημείο, που κινείται



στο χώρο καταστάσεων του συστήματος. Μια γενική τροχιά στο χώρο καταστάσεων είναι η καμπύλη,

$$q_1 = q_1(t)\,,\ q_2 = q_2(t)\,, \dots,\ q_n = q_n(t)\,.$$

Εν γενει, ενα L-συστημα δεν κινειται ελευθερα στο χωρο καταστασεων του, αλλα μονο σε καποιο υποσυνολο του. Τοτε λεμε οτι το συστημα υποκειται σε ή εχει <u>δεσμους</u> ή περιορισμους. Σε αυτην την περιπτωση δεν ειναι ολες οι $q_1, \dots, q_n$ ανεξαρτητες μεταβλητες.

Ενας δεσμος ονομαζεται <u>ολονομος δεσμος</u> αν περιγραφεται απο μια σχεση της μορφης,

$$\boxed{F_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N} \qquad (12),$$

οπου F_i ειναι διαφορισιμες συναρτησεις των q_i, t. Εδω, ο δεσμος ειναι ισοδυναμος με μια "επιφανεια" διαστασης $(n-N)$, η οποια ονομαζεται διαφορισιμη πολλαπλοτητα.

Π.χ υποθετοντας οτι $n=3$, υπαρχουν q_1, q_2, q_3 και το συστημα παρουσιαζει εναν ολονομο δεσμο της μορφης, $F(q_1, q_2, q_3) = 0$, οπως $F = q_1 + q_2 + q_3$.

Ετσι $N=1$ και η κινηση γινεται σ' ενα $(3-1)=2$-διαστατο υποσυνολο του V_3.

Υπαρχουν δυο ειδη ολονομων δεσμων:

(i) <u>Σκληρονομος δεσμος</u>, οπου η (12) δεν περιεχει τη μεταβλητη t, δηλαδη ειναι της μορφης,

$$F(q_1, \dots, q_n) = 0 .$$

(ii) <u>Ρεονομοι δεσμοι</u>, οπου ισχυει η (12).

Ένα σύστημα που έχει έναν ολόνομο δεσμό, θα το ονομάζουμε ολόνομο σύστημα (αντιστοίχως σκληρόνομο και ρεόνομο σύστημα.

Π.χ ένα σκληρόνομο σύστημα 1.Β.Ε σε έναν V_3 περιγράφεται από τις εξισώσεις δεσμού,

$$F_1(q_1, q_2, q_3) = 0 \quad \text{και} \quad F_2(q_1, q_2, q_3) = 0 \,.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση,

$$\boxed{E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L} \qquad (13)$$

Θα δειχθεί ότι $E = T + V$. Άρα θα ονομάζεται η E <u>ολική ενέργεια του L-συστήματος</u>.

Επειδή $L = T - V$ με $V = V(q)$, έχουμε,

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}\dot{q} = m\dot{q}^2 = 2T \,,$$

και άρα,

$$E = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V \,.$$

Θα δειχθεί στη συνέχεια ότι αν ο χρόνος είναι <u>κυκλική ή αγνοήσιμη μεταβλητή</u>, δηλαδή αν $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, τότε η E διατηρείται ή αλλιώς $\dot{E} = 0$.

Πράγματι,

$$\dot{E} = \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$= \dot{q}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0,$$

στις πραγματικές τροχιές του συστήματος.

<u>Παρατήρηση</u>

Αν ο χρόνος t είναι κυκλική μεταβλητή, το φυσικό σύστημα δεν αλλάζει αν μετασχηματίσουμε,

$$t \to t' = f(t),$$

δηλαδή το σύστημα παρουσιάζει <u>χρονική συμμετρία</u>.

Έτσι, αν το L-σύστημα παρουσιάζει χρονική συμμετρία, τότε η ολική ενέργεια διατηρείται.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το παράδειγμα 2 που μελετήσαμε (για την κεντρική κίνηση) όπου $q_2 = \theta$ με $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. Τότε δείξαμε ότι $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = mr^2\dot{\theta} =$ σταθερή.

Γενικό συμπέρασμα: Ύπαρξη συμμετριών $\Longrightarrow$ Νόμοι διατήρησης.

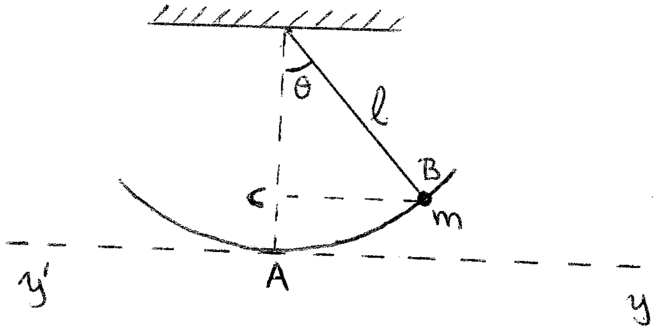
<u>Παράδειγμα. 4</u>

Βρείτε τη λαγκρανζιανή του απλού εκκρεμούς, καθώς και τις εξισώσεις κίνησης.

<u>Λύση</u>

Εδώ έχουμε ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με γενικευμένη συντεταγμένη $q = \theta$.

Όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί



Το μήκος του τόξου $BA = x = \ell \cdot \theta$.

Άρα,

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2.$$

Η δυναμική ενέργεια (επίπεδο αναφοράς $y'y$) είναι,

$$U = mg(\ell - \ell\cos\theta) = mg\ell(1-\cos\theta).$$

Συνεπώς,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta).$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

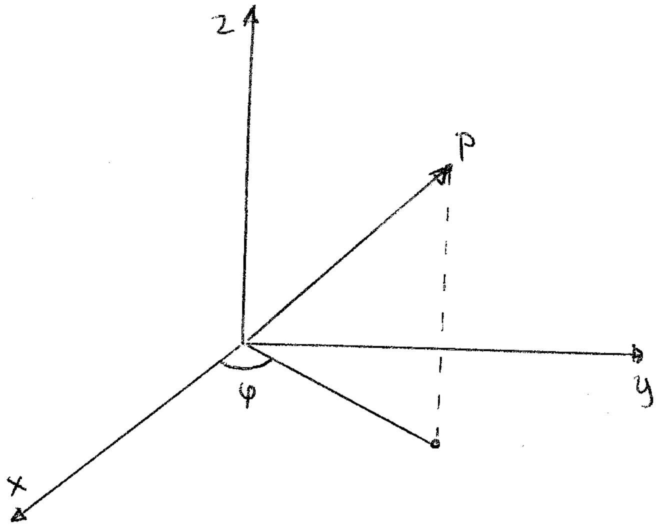
Είναι $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta$ και $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$. Άρα,

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

Παράδειγμα 5

Ένα υλικό σημείο μάζας m, κινείται σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων. Βρείτε τη λαγκραντζιανή και τις εξισώσεις Euler-Lagrange σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Λύση



Ισχύει,

$$\underset{\sim}{r} = \rho\cos\varphi\,\underset{\sim}{i} + \rho\sin\varphi\,\underset{\sim}{j} + z\,\underset{\sim}{k},$$

και άρα

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{v} = \dot{\rho}\,\underset{\sim}{e}_{\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\underset{\sim}{e}_{\varphi} + \dot{z}\,\underset{\sim}{k},$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\underset{\sim}{e}_{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\underset{\sim}{e}_{\varphi} + \ddot{z}\,\underset{\sim}{k}.$$

Συνεπώς,

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right),$$

ενώ η δυναμική ενεργεια είναι $V = V(\rho,\varphi,z)$. Άρα,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho\varphi z).$$

Έτσι οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το σύστημα είναι η παρακάτω τριάδα:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\right)-\frac{\partial L}{\partial \rho}=0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt}(m\dot\rho)-\left(m\rho\dot\varphi^2-\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\left(\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2\right)=-\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\varphi\right)+\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi\right)=-\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt}(m\dot z)+\frac{\partial V}{\partial z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\ddot z=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

<u>Παράδειγμα 6</u>

Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange σε κυλινδρικές συντεταγμένες για ένα υλικό σημείο που κινείται στο επίπεδο xy όταν το δυναμικό εξαρτάται μόνο από την ρ συντεταγμένη.

<u>Λύση</u>

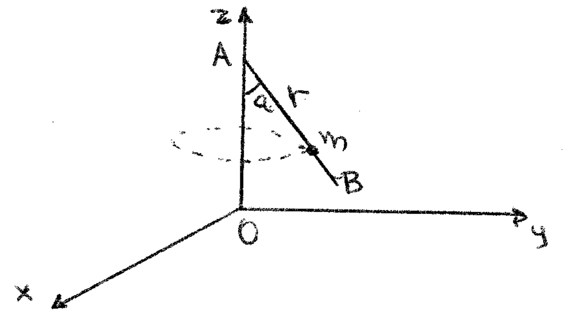
Έχουμε εξ υποθέσεως: $z=0$, $\upsilon=\upsilon(\rho)$ και άρα οι εξισώσεις Euler-Lagrange του παραδείγματος 5 γράφονται,

$$m\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2=-\frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}, \quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi\right)=0$$

<u>Παράδειγμα 7</u>

Το AB είναι στερεό σύρμα, τοποθετημένο στο σημείο A, το οποίο περιστρέφεται υπό σταθερή γωνία α, ως προς τον Oz και με γωνιακή ταχύτητα ω. Μια χαν

Ένα μάζας m κινείται πάνω στο σύρμα.



OA=h

(α) Βρείτε τη λαγκραντζιανή.

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης.

(γ) Προσδιορίστε τις επιτρεπτές κινήσεις του συστήματος.

<u>Λύση</u>

Έστω r(t) η απόσταση της χάντρας από το σημείο A τη χρονική στιγμή t. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η χάντρα βρίσκεται στη θέση,

$$x = r \cdot \sin a \cdot \cos \omega t,$$
$$y = r \cdot \sin a \cdot \sin \omega t,$$
$$z = h - r \cdot \cos a,$$

όπου υποθέτουμε ότι για $t=0$ το σύρμα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xz $(y=0)$.

(α) Η κινητική ενέργεια της χάντρας είναι,

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}m \cdot \left\{(\dot{r} \cdot \sin a \cdot \cos \omega t - \omega r \sin a \cdot \sin \omega t)^2 + (\dot{r} \sin a \cos \omega t + \omega r \sin a \cos \omega t)^2 + (-\dot{r}\cos a)^2\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 a\right).$$

Η δυναμική ενέργεια της χάντρας ($V=0$ στο επίπεδο xy) είναι,

$$V = mgz = mg(h - r\cos a).$$

Συνεπώς,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 a\right) - mg(h - r\cos a).$$

(b) Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0.$$

Έχουμε,

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r \sin^2 a + mg\cos a, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση Euler-Lagrange,

$$m\ddot{r} - \left(m\omega^2 r\sin^2 a + mg\cos a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - (\omega^2 \sin^2 a) r = g\cos a \quad (*).$$

(c) Η γενική λύση της ομογενούς είναι,

$$C_1 \cdot e^{(\omega \cdot \sin a)t} + C_2 \cdot e^{-(\omega\cos a)t},$$

και μια ειδική λύση της (*) είναι,

$$\frac{-g\cos a}{\omega^2 \sin^2 a},$$

και άρα η γενική λύση της (*) είναι,

$$r(t) = C_1 \cdot e^{\omega t \sin a} + C_2 e^{-\omega t \sin a} - \frac{g\cos a}{\omega^2 \sin^2 a} \quad (**).$$

<u>Παράδειγμα 8</u>

Υποθέτουμε ότι η χάντρα του προηγούμενου παραδείγματος, ξεκινά από την ηρεμία, από το σημείο A. Αν το σύρμα έχει γνωστό μήκος l, βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί η χάντρα για να φτάσει στο σημείο B

Λύση

Για $t=0$ έχουμε, $\dot{r}=0$ και $r=0$.

Άρα αντικαθιστώντας στην (**) προκύπτει ότι,

$$C_1+C_2=\frac{g\cos a}{\omega^2\sin^2 a} \quad \text{και} \quad C_1-C_2=0.$$

Έτσι,

$$C_1=C_2=\frac{g\cos a}{2\omega^2\sin^2 a},$$

και άρα η (**) γίνεται,

$$r(t)=\frac{g\cos a}{2\omega^2\sin^2 a}\cdot\left\{e^{(\omega\sin a)t}+e^{-(\omega\sin a)t}\right\}-\frac{g\cos a}{\omega^2\sin^2 a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t)=\frac{g\cos a}{\omega^2\sin^2 a}\left\{\cosh(\omega\sin a)t-1\right\} \quad (***).$$

Άρα όταν $r(t)=l$, η σχέση γράφεται ως εξής,

$$\cosh(\omega\sin a)t=1+\frac{l\omega^2\sin^2 a}{g\cos a}.$$

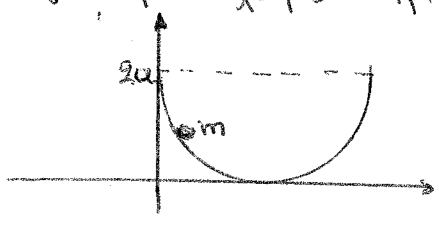
Επομένως,

$$t=\frac{1}{\omega\sin a}\cosh^{-1}\left(1+\frac{l\omega^2\sin^2 a}{g\cos^2 a}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{\omega\sin a}\ln\left\{\left(1+\frac{l\omega^2\sin^2 a}{g\cos^2 a}\right)+\sqrt{\left(1+\frac{l\omega^2\sin^2 a}{g\cos^2 a}\right)^2-1}\right\}.$$

Παράδειγμα 9

Μια χάντρα γλυστρά χωρίς τριβές πάνω σε σύρμα, το



οποίο έχει σχήμα κυκλοειδούς, δηλαδή,

$$x = a(\theta - \sin\theta) \quad , \quad y = a(1+\cos\theta),$$

όπου $\theta \in [0, 2\pi]$.

(a) Βρείτε τη Λαγκρανζιανή.

(b) Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

Λύση.

(a) Η γενικευμένη συντεταγμένη είναι η θ. Άρα η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m a^2 \left\{ \left[(1-\cos\theta)\,\dot{\theta}\right]^2 + \left[-\sin\theta\,\dot{\theta}\right]^2 \right\} =$$

$$= m a^2 (1-\cos\theta)\,\dot{\theta}^2,$$

και η δυναμική ενέργεια είναι (επίπεδο $U=0$ το $y=0$)

$$U = mgy = mga(1+\cos\theta).$$

Συνεπώς,

$$L = T - U = m a^2 (1-\cos\theta)\,\dot{\theta}^2 - mga(1+\cos\theta),$$

δηλαδή,

$$L = L(\theta, \dot{\theta}).$$

(b) Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[2ma^2(1-\cos\theta)\,\dot{\theta}\right] - \left[ma\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + mga\sin\theta\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(1-\cos\theta)\,\dot{\theta}\right] - \frac{1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\cos\theta)\,\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0$$

Παράδειγμα 10

Δείξτε ότι μέσω του μετασχηματισμού,

$$u=\cos(\theta/2) \quad , \quad \text{με } \frac{du}{d\theta}\neq 0,\infty ,$$

η εξίσωση κίνησης του παραδείγματος 9, γραμμικοποιείται ως εξής,

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{4a}u=0,$$

και αποδείξτε ότι η χάντρα του ίδιου παραδείγματος ταλαντώνεται με περίοδο $T=2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$.

Λύση

Αν $u=\cos\frac{\theta}{2}$ τότε $\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}$, και

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ddot{\theta}-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}^2.$$

Τώρα, η εξίσωση, $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{4a}u=0$ είναι ίδια με την,

$$-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ddot{\theta}-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}^2+\frac{g}{4a}\cos\frac{\theta}{2}=0,$$

και διαιρώντας με $\sin\frac{\theta}{2}$, η εξίσωση αυτή γράφεται,

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}^2-\frac{g}{2a}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)=0.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης με το u είναι,

$$u=\cos\frac{\theta}{2}=C_1\cos\sqrt{\frac{4a}{g}}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{4a}{g}}\,t.$$

Άρα το $\cos\frac{\theta}{2}$ ξαναγίνεται $\cos\frac{\theta}{2}$, μετά από χρόνο $2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Η Αρχή Ελάχιστης Δράσης

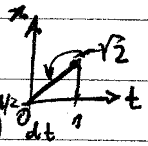
1. Λογισμός μεταβολών

Θα εργαστούμε στον $\mathbb{R}^n$. Θέτω $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ και $(a,b) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Ο λογισμός μεταβολών ασχολείται με ακρότατα συναρτήσεων που έχουν πεδίο ορισμού έναν χώρο άπειρης διάστασης. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται συναρτησοειδή. Π.χ. για την καμπύλη $\gamma = \{(t,x) : x(t) = x, \ t_0 \le t \le t_1\}$ έστω το μήκος της γ, $\Phi(\gamma)$,

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$$

Π.χ. $x(t) = t$

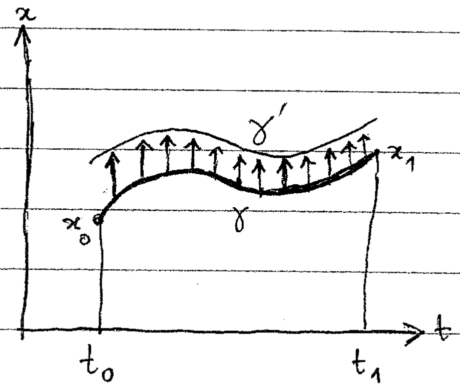


$$\Phi(\gamma) = \int_0^1 (1+\dot{x}^2)^{1/2} dt$$

όπου $\Phi : X \to \mathbb{R}$, X: ο χώρος όλων των καμπυλών γ. Λέμε την καμπύλη γ' όπου

$$\gamma' = \{(t,x) : x = x(t) + h(t)\} \equiv \gamma + h$$

μια προσέγγιση της γ (βλ. σχήμα) και θεωρούμε την αύξηση της Φ



$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$$

Α. Μεταβολές

Κατ' αναλογία με την περίπτωση των διαφορίσιμων συναρτήσεων, δίνω τον εξής ορισμό.

Ορισμός

Ένα συναρτησοειδές Φ ονομάζεται διαφορίσιμο αν

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$$

όπου F γραμμική στην h $\left[F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2), \ F(ch) = cF(h)\right]$ για δοθείσα γ και

$$R(h,\gamma) = O(h^2)$$

δηλ.,

για $|h| < \varepsilon$ και $\left|\frac{dh}{dt}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |R| < C\varepsilon^2$.

Ονομάζουμε την F (κατ' αναλογία με την περίπτωση των συναρτήσεων) το <u>διαφορικό του Φ</u> (ή παράγωγος Frechét), ή την <u>μεταβολή του Φ</u> και h την <u>μεταβολή της καμπύλης</u>.

Έστω τώρα μια διαφορίσιμη συνάρτηση τριών μεταβλητών:

$$L = L(a,b,c).$$

Θα ασχοληθούμε με συναρτησοειδή της μορφής

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$

όπου $\gamma = \{(t,x) : x = x(t),\ t_0 \le t \le t_1\}$ μια καμπύλη στο επίπεδο (t,x), $\dot{x} = dx/dt$. (Στη περίπτωση π.χ. όπου $L = \sqrt{1+b^2}$, το $\Phi(\gamma)$ είναι το μήκος της γ.)

<u>Θεώρημα</u>

Το συναρτησοειδές $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x},t)dt$ είναι διαφορίσιμο και η παράγωγός του (δηλ. το διαφορικό του) δίνεται από τον τύπο

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] h\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\underbrace{L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x,\dot{x},t)}\right] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}}_{DL(x,\dot{x})\cdot(h,\dot{h})}\right] dt + O(h^2) = F(h) + R$$

όπου $F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt$, $R = O(h^2)$

Επειδή,
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\, dt = \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) dt$$

έπεται το αποτέλεσμα. ☒

Β. Ακρότατα

Ορισμός

Ένα ακρότατο του διαφορίσιμου συναρτησοειδούς $\Phi(\gamma)$ είναι μιά καμπύλη γ έτσι ώστε $F(h) = 0$ $\forall h$.

(Όπως ακριβώς το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι ένα ακρότατο της $f(x)$ αν $hf'(x_0) = 0$ δηλ. $df = 0$)

Θεώρημα

Η καμπύλη $\gamma: x = x(t)$ είναι ένα ακρότατο του συναρτησοειδούς $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt$ στο χώρο των καμπυλών που περνούν απο τα σημεία $x(t_0) = x_0$ και $x(t_1) = x_1$ αν και μόνο αν:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{κατά μήκος της } , x(t).$$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Από το προηγούμενο θεώρημα
$$F(h) = -\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h\, dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

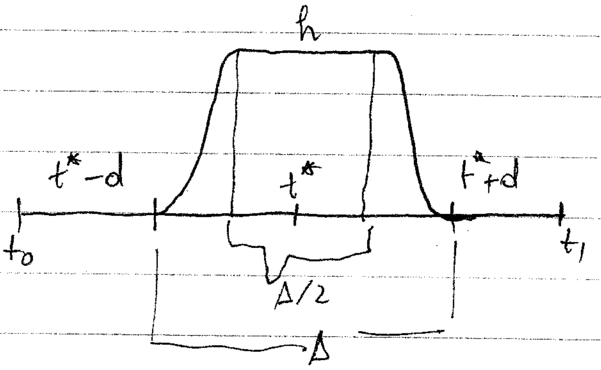
Επειδή και η γ και η $\gamma + h$ περνούν απο τα σημεία x_0, x_1 έπεται ότι $h(t_0) = h(t_1) = 0$ και άρα ο τελευταίος όρος είναι μηδέν. Άρα αν γ είναι ένα ακρότατο του Φ τότε, $F(h) = 0$ $\forall h$ με $h(t_0) = h(t_1) = 0$ δηλ.
$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t)\, dt = 0$$

όπου $f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}$ $\forall h$.

Αρκεί ν.δ.ο. $f(t)=0$. Έστω ότι $f(t^*)>0$ για κάποιο $t_0<t^*<t_1$. Αφού η f είναι C^∞ (και άρα συνεχής), $f(t)>c$ σε μιά περιοχή Δ του t^*:

$$t_0<t_0-d<t<t^*+d<t_1 .$$

Έστω $h(t)$: $h(t)=0$ στο $\sim\Delta$, $h(t)>0$ στο Δ και $h(t)=1$ στο $\frac{\Delta}{2}$ δηλ. στο $t_0-d/2<t<t_0+d/2$.



Τότε έχουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,h(t)\,dt \geq cd>0$$

– άτοπο. Άρα $f(t^*)=0$ $\forall\, t^*$, $t_0<t^*<t_1$. ■

Αντιστρόφως αν $f(t)=0$ τότε προφανώς $F(h)=0$. ⊠

<u>Παράδειγμα</u>: "Τα ακρότατα του μήκους είναι ευθείες".

$$L=\sqrt{1+\dot{x}^2},\quad \partial L/\partial x=0,\quad \partial L/\partial\dot{x}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=c \Rightarrow \dot{x}=c_1 \Rightarrow x=c_1t+c_2 .$$

C. Η εξίσωση Euler-Lagrange

<u>Ορισμός</u>

Η εξίσωση

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

ονομάζεται η <u>εξίσωση Euler-Lagrange</u> του συναρτησοειδούς

$$\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x},t)\,dt .$$

Εστω τώρα ένα διάνυσμα ~~χ~~ στον $\mathbb{R}^n$ και $\gamma = \{(t,x) : x = x(t) : t_0 \le t \le t_1\}$ μια καμπύλη $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

μια συνάρτηση $(2n+1)$-μεταβλητών. Τότε όπως πριν δείχνουμε

Θεώρημα

Η καμπύλη γ είναι ένα ακρότατο του συναρτησοειδούς $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x},t)\,dt$ (που ορίζεται στο χώρο των καμπυλών απο το (t_0,x_0) στο (t_1,x_1)), αν και μόνο αν, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange κατα μήκος της γ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 .$$

Αυτό είναι ενα σύστημα n-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης (η λύση του οποίου) που εξαρτάται από $2n$ σταθερές.

Παρατήρηση : Η συνθήκη (εξ. E-L) γιά να είναι μία καμπύλη γ ένα ακρότατο ενός συναρτησοειδούς, δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συν/νων. Π.χ., Οι (εξισώσεις) ευθείες στο επίπεδο είναι τα ακρότατα των συναρτησοειδών του μήκους σε καρτεσιανές x_1, x_2 ή πολικές r, ϕ συν/νες :

$$\Phi_{καρτ} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,dt \;,\quad \Phi_{πολ} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\,dt,$$

όπου οι ευθείες είναι : $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ και $r = r(t)$, $\phi = \phi(t)$ και ικανοποιούν τις εξ. E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

όπου $x = (x_1, x_2)$ ή $x = (r, \phi)$. (Άσκηση).

1.2. Εξισώσεις Lagrange

Θα συγκρίνουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνος για ενα σύστημα με δυναμικό

$i=1,\dots,n$ $$\frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_i)+\frac{\partial U}{\partial x_i}=0 \qquad (1) \qquad \ddot{x}+\nabla x=0$$

με την εξίσωση E-L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n, x=(x_1,\dots,x_n))$$

A. Αρχή του Hamilton (Αρχή της (ελάχιστης) δράσης)

Θεώρημα (Αρχή της ελάχιστης δράσης)

Οι κινήσεις του μηχανικού συστήματος (1) συμπίπτουν με τα ακρότατα του συναρτησοειδούς,

$$\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L\,dt \quad , \text{ όπου } \quad L=T-U.$$

Απόδειξη

Αφού $U=U(\mathbf{x})$ και $T=\sum m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2/2$ έπεται:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}=m_i\dot{\mathbf{x}}_i$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}. \qquad \boxtimes$$

Θυμίζω ότι ο χώρος καταστάσεων ενός μηχανικού συστήματος n σημείων στο $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\mathbb{R}^{3n}$.

Πόρισμα

Αν $(q_1,\dots,q_{3n})$ είναι τυχαίες συν/νες του $\mathbb{R}^{3n}$, τότε η χρονική εξέλιξη του $q=q(t)$, $q=(q_1,\dots,q_{3n})$ ικανοποιεί

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \quad , \quad L=T-U.$$

Απόδειξη

Απο το θεώρημα, οι κινήσεις του συστήματος στον $\mathbb{R}^{3n}$, $q = q(t)$, είναι ακρότατα του $\int L dt$. Άρα σε τυχόν σύστημα συν/νων, οι εξισ. E-L γραμμένες σε εκείνο το σ.σ. θα ικανοποιούνται. ☒

<u>Ορισμοί</u>: Στη Μηχανική χρησιμοποιούμε την εξής ορολογία

1) Λαγκραντζιανή : $L(q, \dot{q}, t) = T - U$
2) Γενικευμένες συν/νες : q_i
3) —〃— ταχύτητες : $\dot{q}_i$
4) —〃— ορμές : $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$
5) —〃— δυνάμεις : $\partial L / \partial q_i$
6) Δράση : $\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt$
7) Εξισώσεις E-L : $d(\partial L / \partial \dot{q}_i)/dt - \partial L / \partial q_i = 0$

NN

$\dot{p} = F$

<u>Παράδειγμα</u>

Για ενα <u>ελεύθερο σωμάτιο στον $\mathbb{E}^3$</u>:

$$L = T = \frac{m\dot{r}^2}{2}$$

και θέτοντας τις καρτεσιανές συν/νες $q_i = r_i$,

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right)$$

Άρα

$$p_i = m\dot{q}_i \qquad \text{(ορμή)}$$

και οι Εξ. E-L συμπίπτουν με τις εξισώσεις Νεύτωνος

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

Με ακρότατα ευθείες! Δηλ. οι ευθείες δεν είναι μόνο οι πιό σύντομες διαδρομές (ακρότατα του μήκους $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}\, dt$) αλλά και ακρότατα της δράσης $\int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\, dt$ του προβλήματος.

Παράδειγμα: Κεντρική κίνηση στο επίπεδο.

Επίπεδη κίνηση σε κεντρικό πεδίο σε πολικές συν/νες : $q_1 = r$, $q_2 = \phi$.

Απο την γνωστή σχέση

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\phi}\underline{e}_\phi$$

βρίσκουμε την κινητική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right)$$

και την λαγκραντζιανή

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q) \quad , \quad V = V(q_1) \ (\equiv V(r))$$

Τότε οι γενικευμένες ορμές είναι

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad \text{δηλαδή}$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_2 = m r^2 \dot{\phi} .$$

Η πρώτη εξίσωση E-L είναι $\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1}$ δηλ.,

$$m\ddot{r} = m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

ως γνωστόν!

Αφού η $q_2 = \phi$ δεν υπάρχει στην L $\Rightarrow$ $\partial L / \partial q_2 = 0$. Και άρα η δεύτερη εξ. E-L θα είναι $\dot{p}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{p_2 = \text{σταθ.}}$ Αυτός είναι ο νόμος διατήρησης στροφορμής.

Αυτό το παράδειγμα υποδεικνύει την ακόλουθη γενίκευση του ΝΔΣ:

Ορισμός

Μια συν/νη q_i ονομάζεται <u>κυκλική</u> αν δεν υπεισέρχεται στην λαγκραντζιανή: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Θεώρημα (Νόμος διατήρησης της ορμής)

Η γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί σε μιά κυκλική συν/νη διατηρείται: $p_i =$ σταθ.

Απόδειξη

Απο την εξ. E-L

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \qquad \boxtimes$$

Στο εξής, θα ονομάζουμε ένα μηχανικό (ή δυναμικό) φυσικό σύστημα λαγκρανζιανό (ή σύστημα Lagrange) αν υπάρχει συνάρτηση Lagrange $L(q, \dot{q}, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η χρονική εξέλιξη του συστήματος να περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 ,$$

ή ισοδύναμα αν οι κινήσεις του είναι ακρότατα της δράσης

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt ,$$

Αν επιπλέον $L = T - V$ τότε το λαγκρανζιανό σύστημα ονομάζεται φυσιολογικό.

Ετσι τα λαγκρανζιανά συστήματα περιγράφονται από τις εξισώσεις E-L ή ισοδύναμα αν γνωρίζουμε την λαγκρανζιανή συνάρτηση για αυτά (που οδηγεί, μέσω της αρχή ελάχιστης δράσης) στις εξισώσεις E-L.

Ορίζουμε την "ενέργεια" ενός L-συστήματος ως

$$E = \dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L .$$

Η ολική χρονική παράγωγος είναι

$$\dot{E} = \ddot{q}\,\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}} + \dot{q}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}\,\ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\dot{E} = \dot{q}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right] - \frac{\partial L}{\partial t} .$$

Και άρα αν η t είναι κυκλική, δηλ., $L = L(q,\dot{q})$ έχουμε τον νόμο διατήρησης της ενέργειας

$$\dot{E} = 0$$

για L-συστήματα.

Θα δείξω ότι:

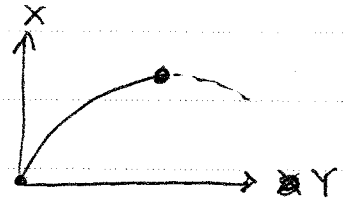
$$E = T + V .$$

Η V δεν εξαρτάται απο τις γεν. ταχύτητες, $V = V(q)$ και επειδή $T = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$ έπεται ότι

$$\dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^2 = 2T .$$ Ενώ $L = T - V$, Άρα

$$E = \dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = 2T - (T - V) = T + V .$$

Παράδειγμα - Βολές



Ισχύει,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2), \quad V = -mgx .$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2gx)$, και η δράση γράφεται,

$$I = \int_0^{t_1} \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2gx)\,dt .$$

Τότε,

$$\delta I = \delta \int_0^{t_1} \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2gx)\,dt = 0,$$

ή

$$\int_0^{t_1} \delta(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2gx)\,dt = 0,$$

$$\int_0^{t_1} (2\dot{x}\,\delta\dot{x} + 2\dot{y}\,\delta\dot{y} + 2g\,\delta x)\,dt = 0,$$

ή

$$\int_0^{t_1} (\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + g\,\delta x)\,dt = 0,$$

ή $$\int_0^{t_1} \left(\dot{x}\frac{d}{dt}\delta x + \dot{y}\frac{d}{dt}\delta y + g\,\delta x\right)dt = 0 .$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει,

$$(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1}\Big((\ddot{x}-g)\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y\Big)dt = 0,$$

ή $$\int_0^{t_1}\Big((\ddot{x}-g)\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y\Big)dt = 0,$$

δηλ. $\boxed{\ddot{x}-g=0, \quad \ddot{y}=0}$.

Ή από τις εξ. Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = gm, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

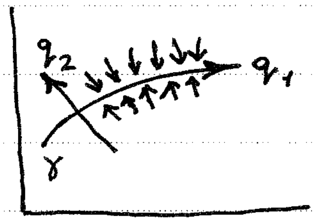
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$ και άρα: $\cancel{m}\ddot{x} - g\cancel{m} = 0$, $m\ddot{y} = 0$ ή

$$\ddot{x} - g = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

Λαγκρατζιανά συστήματα δεσμών

Πρώτος Ορισμός ολόνομου συστήματος

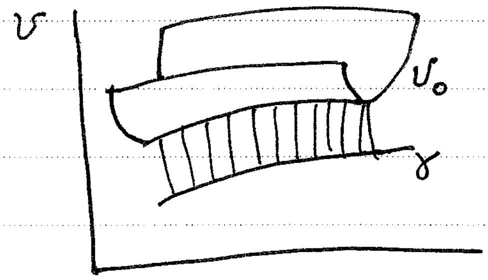
Ένα μηχανικό σύστημα με δεσμούς περιγράφεται ως εξής: Εστω γ μια καμπύλη στο επίπεδο (σχήμα 1)



Αν υπάρχει ένα πολύ ισχυρό πεδίο δυνάμεων σε μιά γειτονιά της γ το οποίο κατευθύνεται προς την γ, τότε το κινούμενο σημείο θα παραμείνει πάντα κοντά στην γ. Στο όριο του άπειρα δυνατού πεδίου δυνάμεων το σωμάτιο θα παραμείνει επάνω στην γ. Τότε λέμε ότι ένας δεσμός επιβάλλεται πάνω στο σύστημα. Αν εισάγουμε καμπυλόγραμμες συν/νες q_1, q_2 όπως στο σχήμα, και την δυναμική ενέργεια U_N που εξαρτάται απο μία παράμετρο N

$$U_N = N q_2^2 + U_0(q_1, q_2)$$

Τότε τα παραπάνω γίνονται ακριβή ως εξής: Θεωρούμε αρχικές συνθήκες επάνω στην γ:



$$q_1(0) = q_1^0 \quad , \dot{q}_1(0) = \dot{q}_1^0$$

$$q_2(0) = 0 \quad , \dot{q}_2(0) = 0$$

και μας ενδιαφέρει η εξέλιξη της συν/νης

$$q_1 = \phi(t, N)$$

κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες στο δυναμικό U_N

Θεώρημα

(1) Καθώς $N \to \infty$ το $\lim_{N\to\infty} \phi(t,N)$ υπάρχει και $= \psi(t)$

(2) Το όριο $\psi(t)$ ικανοποιεί τις εξ. E-L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L_*}{\partial q_1} = 0$$

όπου

$$L_*(q_1, \dot{q}_1) = T\Big|_{q_2=\dot{q}_2=0} - \mathcal{V}_0\Big|_{q_2=0}$$

δηλ. T είναι η κινητική ενέργεια κατά μήκος της γ. $\varnothing$

Δηλ. καθώς $N \to \infty$ το σύστημα των εξ. E-L για τις q_1, q_2 επάγει εξ. E-L για την $q_1 = \psi(t)$. (Η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται μέσω του νόμου διατήρησης της ενέργειας: $q_2 \leq c N^{-1/2}$ και άρα $\to 0$, $N \to \infty$.)

Στα παραπάνω ορίσαμε την έννοια του συστήματος με δεσμό για ένα μηχ. συστ. ενός σωματίου στο επίπεδο. Τα ίδια ισχύουν αν αντί για ένα σωμάτιο στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε n σωμάτια στον $\mathbb{R}^3$ δηλ. αντικαταστήσουμε το $\mathbb{R}^2$ με τον χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}^{3n}$, την γ με μία υποπολλαπλότητα του $3n$-διάστατου χώρου καταστάσεων την q_1 με τις συν/νες $\mathbf{q}_1$ πάνω στην γ την q_2 με κάποιες $\mathbf{q}_2$ σε κατευθύνσεις κάθετες στην γ και την U_N με την

$$\mathcal{V} = N\mathbf{q}_2^2 + \mathcal{V}_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2).$$

Τότε καθώς $N \to \infty$, η κίνηση στην γ ορίζεται μέσω των εξ. E-L για την λαγκρατζιανή

$$L_* = T\Big|_{\mathbf{q}_2=\dot{\mathbf{q}}_2=0} - \mathcal{V}_0\Big|_{\mathbf{q}_2=0}.$$

<u>Ορισμός</u>

Έστω γ μία m-διάστατη επιφάνεια στον $3n$-διάστατο χώρο καταστάσεων των σημείων $r_1, \ldots, r_n$ με μάζες $m_1, \ldots, m_n$ και έστω $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ συν/νες στην γ: $r_i = r_i(\mathbf{q})$. Το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad , \quad L = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{r}_i^2 + \mathcal{V}(\mathbf{q})$$

ονομάζεται <u>ένα σύστημα</u> n σημείων <u>με $3n-m$ ιδεώδεις ολόνομους δεσμούς</u>, και η γ: ο χώρος καταστάσεων του συστήματος με δεσμούς.

Δηλ. έχουμε ενα σύστημα που περιγράφεται απο m εξισώσεις στον $\mathbb{R}^N$, $N=3n$, και "ζει" στο χώρο καταστάσεων διάστασης m. Τέτοια συστήματα τα ονομάζουμε <u>ολόνομα συστήματα</u>.

Παραδείγματα συστημάτων με ολόνομους δεσμούς αποτελούν μηχανικά συστήματα που περιορίζονται να κινούνται πάνω σε επιφάνειες αν και υπάρχουν συστήματα με υπακοή σε μη-ολονομους δεσμούς με τα οποία δεν θα ασχοληθούμε.

<u>Δεύτερος ορισμός ολόνομου συστήματος</u>

Ένα ολόνομο σύστημα είναι το ζεύγος (M, L) όπου ο χώρος καταστάσεών του είναι μια επιφάνεια $M \subset \mathbb{R}^3$ και

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x), \quad x \in M.$$

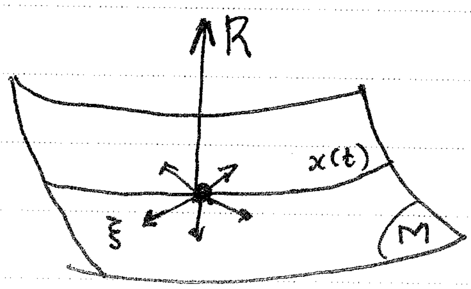
Θεωρούμε την κίνηση του σημείου, $x(t)$. Αν οι εξ. Νεύτωνος ικανοποιούνται, $m\ddot{x} + \partial U/\partial x = 0$, τότε όταν οι εξωτερικές δυνάμεις είναι μηδέν $(V=0)$, η τροχιά είναι ευθεία και δεν μπορεί να κείται στην M. Έτσι έχουμε μια νέα δύναμη η οποία "επιβάλλει στο σύστημα να κινείται επάνω στην επιφάνεια".

<u>Ορισμός</u>

Η ποσότητα

$$R = m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

ονομάζεται η <u>δύναμη δεσμού</u>.



Τότε οι εξισώσεις του Νεύτωνος γίνονται

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + R$$

<u>Τρίτος ορισμός ολόνομου συστήματος</u>

Θεωρούμε τώρα εφαπτόμενα διανύσματα ξ της M. Τέτοια διανύσματα ονομάζονται <u>δυνάμει-μεταβολές</u>. Τότε έχουμε ένα εναλλακτικό ορισμό ολόνομων συστημάτων μέσω της λεγόμενης <u>αρχής D'Alembert-Lagrange</u>: Για κάθε δυνάμει-μεταβολή, ξ, το έργο της δύναμης δεσμού είναι μηδέν:

$$(R, \xi) = \left(m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}, \xi \right) = 0 .$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ορισμοί που δώσαμε παραπάνω για τα ολόνομα συστήματα είναι ισοδύναμοι. Έτσι, ιδιαίτερα, η αρχή ~~D'Alembert-Lagrange~~ είναι ισοδύναμη με την αρχή ελάχιστης δράσης για υποπολλαπλότητες $M \subset \mathbb{R}^N$.

<u>Ορισμός</u>. Μια καμπύλη x ονομάζεται <u>κατά συνθήκη ακρότατο</u> της δράσης

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - U(x) \right) dt$$

αν το διαφορικό δI είναι μηδέν <u>υπό τη συνθήκη</u> ότι οι μεταβολές παίρνονται <u>μόνο για γειτονικές</u> καμπύλες μεταξύ των σημείων x_0, x_1 στην M: Γράφουμε $\delta_M I = 0$. (1)

Βεβαίως η (1) είναι ισοδύναμη με τις εξ. E-L σε κάποιο τοπικό σύστημα συν/νων q της M,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad , \quad L = \frac{\dot{x}^2}{2} - U(x), \quad x \in M \ , \ x = x(q).$$

Έτσι έχουμε το εξής θεώρημα.

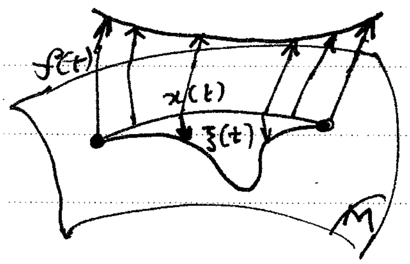
Θεώρημα

Η καμπύλη $x: \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^N$ είναι ένα κατά σύνδεση ακρότατο της I (δηλ. ικανοποιεί την εξ. (1)) αν και μόνον ικανοποιεί την εξίσωση D'Alembert

$$\left(\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} , \xi \right) = 0 \quad , \quad \forall \xi \in T_x M .$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε δύο κοντινές καμπύλες $x(t)$ και $x(t) + \underset{\delta x}{\xi(t)}$ όπου $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη βρίσκουμε ($\delta x = \xi$)



$$0 = \delta_M I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{x} \dot{\xi} - \frac{\partial U}{\partial x} \xi \right) dt =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \xi \, dt = 0 \text{ για κάθε}$$

εφαπτόμενο διάνυσμα $\xi(t)$ με $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$. Άρα η εξίσωση $\delta_M I = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\left(\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} , \xi \right) = 0$$

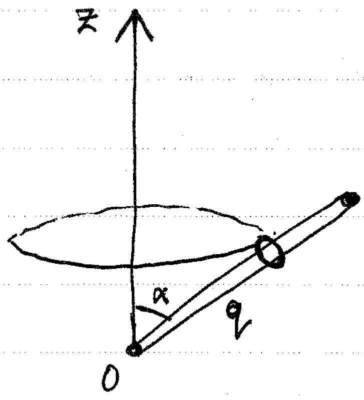
όπως αυτό συνεπάγεται από το ακόλουθο λήμμα του οποίου η απόδειξη είναι προφανής (ανάλογη με εκείνη προηγούμενης παραγράφου).

Λήμμα. Έστω $\underline{f} : \{ t : t_0 \le t \le t_1 \} \to \mathbb{R}^n$ ένα συνεχές διαν. πεδίο. Αν για κάθε συνεχές διαν. πεδίο $\underline{\xi}$ εφαπτόμενο στην M κατά μήκος της x (δηλ., $\xi(t) \in T_{x(t)} M$, $\xi(t) = 0$ για $t = t_0, t_1$) έχουμε:

$$\int_{t_0}^{t_1} \underline{f}(t) \underline{\xi}(t) \, dt = 0 ,$$

τότε το πεδίο $\underline{f}(t)$ είναι κάθετο στην M σε κάθε σημείο $x(t)$ (δηλ., $(\underline{f}(t), \underline{h}) = 0 \quad \forall \, h \in T_{x(t)} M$). ⊠

Παράδειγμα



Χάντρα προσαρτημένη σε ράβδο η οποία περιστρέφεται υπό γωνία κλίσης α γύρω από τον άξονα z και γλυστρά πάνω στην ράβδο. Εστω q η απόσταση της χάντρας από το O. Τότε

$$L = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

$$r = q \sin a$$

και άρα η εξίσωση Lagrange ειναι

$$m\ddot{q} = m\omega^2 q \sin^2 \alpha .$$

Έτσι η δύναμη δεσμού είναι κάθετη σε κάθε χρονική στιγμή στις δυνατές μετατοπίσεις (δηλ. κατά μήκος της ράβδου) άλλα προφανώς δεν είναι κάθετη στην πραγματική τροχιά.

Παρατήρηση: Εναλλακτική διατύπωση της Αρχής D'Alembert

Θεώρημα

Έστω ένα νευτώνιο σύστημα δυναμικού, $\underline{f} = -\partial U / \partial \underline{x}$ ορισμένο σε μία επιφάνεια M. Το σημείο $\underline{x}_0 \in M$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος ανν η δύναμη είναι κάθετη στην M (στο x_0): $(\underline{f}(x_0), \underline{\xi}) = 0$, $\forall \underline{\xi} \in T_{x_0}M$.

Απόδειξη

Αφού ένα σημείο ισορροπίας $\underline{x}_0$ είναι η τροχιά, $\underline{x}(t) = x_0$, η εξίσωση D'Alembert–Lagrange δίνει $\ddot{\underline{x}} = 0$ και το θεώρημα έπεται. ☒

Ορισμός

Ο όρος $-m\ddot{\underline{x}}$ ονομάζεται η δύναμη αδράνειας.

Το θεώρημα της E. Noether

Το θεώρημα της Noether συνδέει συμμετρίες (της λαγκρατζιανής) με νόμους διατήρησης (των εξ. κίνησης). Εστω ότι η λαγκρατζιανή είναι συνάρτηση ανεξάρτητη του χρόνου, $L = L(q, \dot{q})$, αν και ό,τι θα πούμε ισχύει και γιά μη-αυτόνομα συστήματα. Θεωρείστε το εξής παράδειγμα: Έστω το L-σύστημα (M, L) όπου,

$$M = \{(x_1, x_2, x_3)\},$$

και

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_2, x_3).$$

Αυτό το σύστημα έχει την εξής ιδιότητα: Αν θεωρήσω την απεικόνιση

$$h : (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + s, x_2, x_3)$$

δηλ., μεταφορά κατά s στον άξονα x_1, τότε η παράγωγος της h, h_*, μεταφέρει το διάνυσμα $v = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ στον εαυτό του

$$h_* v = v \qquad (1)$$

και άρα βρίσκουμε ότι (αφού η V δεν εξαρτάται από το x_1)

$$L(h_* v) = L(v) \qquad (2)$$

ενώ για παράδειγμα η L δεν έχει την ιδιότητα (2) για την $h : (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2 + s, x_3)$.

Ορισμός

Λέμε ότι η λαγκρατζιανή L (ή το λαγκρατζιανό σύστημα (M, L)) έχει συμμετρία την απεικόνιση h αν για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα v ισχύει ότι

$$L(h_* v) = L(v).$$

Ένα L-σύστημα μπορεί να έχει πολλές συμμετρίες. Τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

→ Χρειάζεται επίσης ο ορισμός του $1^{ου}$ ολοκληρώματος για L-συστήματα ←

Θεώρημα Noether

Αν το σύστημα $(\mathbb{R}^n, L)$ έχει μια 1-παραμετρική ομάδα συμμετριών τους διαφορομορφισμούς $h^s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$, τότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange που απορρέουν απο την L έχουν ένα πρώτο ολοκλήρωμα I της μορφής

$$I(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left. \frac{d\, h^s(q)}{ds} \right|_{s=0} . \qquad (3)$$

Παράδειγμα

Θεωρείστε ένα σύστημα σημειακών μαζών m_i στον $\mathbb{R}^3$:

$$L = \sum m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} - U(\underline{x}), \quad \underline{x}_i = x_{i1}\underline{e}_1 + x_{i2}\underline{e}_2 + x_{i3}\underline{e}_3$$

με δεσμούς $f_j(\underline{x}) = 0$ και υποθέσατε ότι το σύστημα έχει συμμετρίες τις μεταφορές κατά μήκος του άξονα $\underline{e}_1$:

$$h^s : \underline{x}_i \longmapsto \underline{x}_i + s\, e_1 \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Οι δεσμοί, με άλλα λόγια, έχουν την ιδιότητα ότι επιτρέπουν κινήσεις του συστήματος σαν ολότητα κατά μήκος του άξονα $\underline{e}_1$ και η δυναμική ενέργεια δεν αλλάζει κατά μήκος τέτοιων κινήσεων.

Απο το θεώρημα Noether έχουμε: Το κέντρο μάζας του συστήματος έχει προβολή στον $\underline{e}_1$ η οποία κινείται ευθύγραμμα και ομαλά: Κατ' αρχήν

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h^s(\underline{x}_i) = \underline{e}_1$$

και άρα η συνάρτηση

$I = \sum m_i \dot{x}_{i1} : P_1$: πρώτη συνιστώσα του διανύσματος της ορμής.

διατηρείται (=πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης). ☒

<u>Απόδειξη του θεωρήματος Noether.</u>

Θέτουμε $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $q = \phi(t)$, για μια λύση των εξισώσεων E-L. Αφού η h^s_* "διατηρεί την L", η <u>μεταφορά</u> της λύσης ϕ,

$$h^s \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

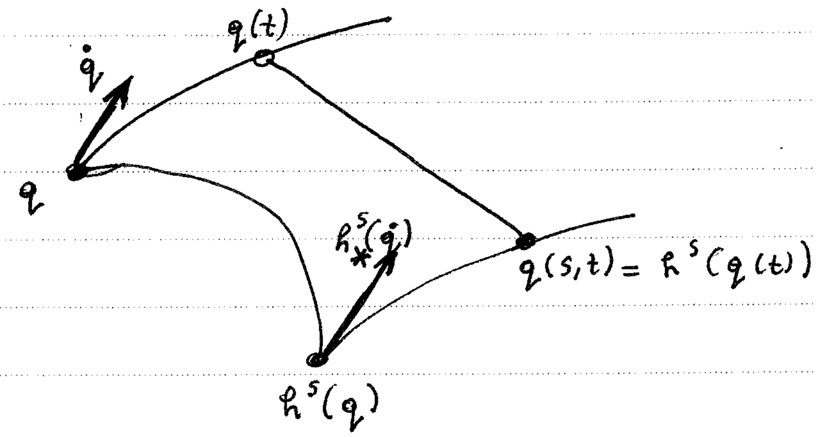
ικανοποιεί και αυτή τις εξισώσεις E-L για κάθε s.

Εστω η απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : (s,t) \mapsto \Phi(s,t)$$

όπου

$$q = \Phi(s,t) = h^s(\phi(t))$$



Θέτοντας

$$(\cdot) \equiv \frac{d}{dt} \quad , \quad (\,'\,) \equiv \frac{d}{ds}$$

έχουμε, εξ' υποθέσεως, ότι

$$0 = \frac{\partial L}{\partial s}\left(\Phi, \dot{\Phi}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\Phi}' \qquad (4)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι της L παίρνονται στο σημείο

$$q = \Phi(s,t) \; , \; \dot{q} = \dot{\Phi}(s,t) \, .$$

Η $\Phi(s,t)$ για $s = \sigma\tau\alpha\theta$. δηλ. η $\Phi|_{s=\sigma\tau\alpha\theta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(\forall s)$ ικανοποιεί τις εξ. E-L:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\Phi(s,t), \dot{\Phi}(s,t)\right)\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\left(\Phi(s,t), \dot{\Phi}(s,t)\right) . \qquad (5)$$

Απόδειξη του θεωρήματος Noether.

Θέτουμε $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $q = \phi(t)$, για μία λύση των εξισώσεων E-L.
Αφού η h^s_* "διατηρεί την L", η μεταφορά της λύσης ϕ,

$$h^s \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

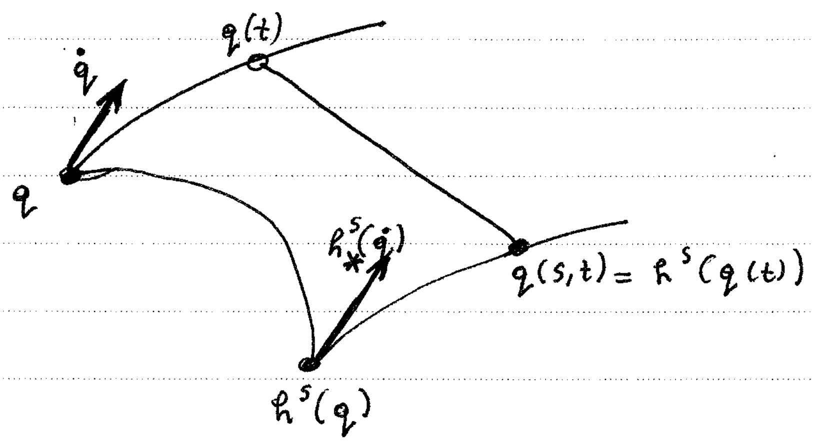
ικανοποιεί και αυτή τις εξισώσεις E-L για κάθε s.

Έστω η απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : (s,t) \mapsto \Phi(s,t)$$

όπου

$$q = \Phi(s,t) = h^s(\phi(t))$$



Θέτοντας

$$(\cdot) \equiv \frac{d}{dt} \quad , \quad (\,'\,) \equiv \frac{d}{ds}$$

έχουμε, εξ' υποθέσεως, ότι

$$0 = \frac{\partial L}{\partial s}(\Phi, \dot\Phi) = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \dot\Phi' \qquad (4)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι της L παίρνονται στο σημείο

$$q = \Phi(s,t) \ , \quad \dot q = \dot\Phi(s,t) .$$

Η $\Phi(s,t)$ για $s=$σταθ. δηλ. η $\Phi|_{s=\text{σταθ}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(\forall s)$
ικανοποιεί τις εξ. E-L:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\left(\Phi(s,t), \dot\Phi(s,t)\right)\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\left(\Phi(s,t), \dot\Phi(s,t)\right) . \qquad (5)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7

ΔΥΝΑΜΙΚΗ HAMILTON

Εξισώσεις Hamilton

Α. Ισοδυναμία E-L και Hamilton

Εστω δοθείσα λαγκρανζιανή $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : (q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t)$ την οποία υποθέτουμε κυρτή ως προς το $\dot{q}$ δηλ.

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} > 0$$

δηλαδή οι σχέσεις $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i(q_i, \dot{q}_i, t)$ επιλύονται ως προς $\dot{q}_i$.

Ορισμός. Ο μετ/σμός Legendre της λαγκρανζιανής $L = L(q, \dot{q}, t)$ ορίζεται ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} H(p) &= p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Η συνάρτηση H $= H(p, q, t)$ ονομάζεται η χαμιλτονιανή του συστήματος.

Θεώρημα

Οι εξ. E-L είναι ισοδύναμες, μέσω του μετ/σμου Legendre (1), με το ακόλουθο σύστημα $2n$ πρώτης τάξεως εξισώσεων (εξισώσεις Hamilton)

$$\left.\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Απόδειξη

Το ολικό διαφορικό της H είναι $\left(H = H(p, q, t)\right)$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

είναι ίσο με το ολικό διαφορικό της $p\dot{q} - L$ για $p = \partial L / \partial \dot{q}$:

$$dH = \dot{q}\, dp + p\, d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$=0$

$$= \dot{q}\, dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

και άρα :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Επειδή ισχύουν οι εξ. E-L : $\dot{p} = \dfrac{\partial L}{\partial q}$, έπεται ότι :

$$\left.\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}\right\} \text{"εξισώσεις Hamilton"}$$

Άρα αν τα $q(t)$ ικανοποιούν τις E-L τότε το $(p(t), q(t))$ ικανοποιούν τις εξισώσεις H. Το αντίστροφο είναι απλό και αφήνεται ως άσκηση. $\boxtimes$

B. Χαμιλτονιανή και ενέργεια

Για ένα μηχανικό σύστημα (δηλ. όπως λέμε, όταν οι εξισώσεις είναι μηχανικές) έχω $L = T - U$, όπου

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad , \quad a_{ij} = a_{ij}(q, t) \quad , \quad U = U(q) ,$$

έχουμε το ~~θα~~ Αναδιατύπωση (ΣAE) για ΣΙΒΕ και μόνο.

Θεώρημα : $H = T + U$: ολική ενέργεια του συστήματος.

Απόδειξη

$H = p\dot{q} - L$, $L = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q)$ και άρα

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^j + \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \delta_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^j + \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^j = a_{ij} \dot{q}^j .$$

Άρα $p^i \dot{q}^i = a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = 2T$ Έτσι,

$$H = p^i \dot{q}^i - L = 2T - (T - U) = T + U = E . \quad \boxtimes$$

Παράδειγμα : 1-διάστατη κίνηση

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} .$$

Εδώ: $T = \frac{1}{2}\dot{q}^2$, $V = V(q)$ και $H = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$
$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$ άρα

Άρα οι εξισώσεις Hamilton είναι

$$\dot{q}\left(=\frac{\partial H}{\partial p}\right) = p$$

$$\dot{p} = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

"Το (−) είναι στο $\dot{p}$."

<u>Πόρισμα</u>

$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Ιδιαίτερα <u>αν</u> $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (δηλ. η H του συστήματος είναι ανεξάρτητη του χρόνου), έχουμε τον νόμο διατήρησης ενέργειας: $H(p(t), q(t)) = \sigma\tau\alpha\vartheta.$

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $H = H(p(t), q(t), t)$ έχουμε

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}\cancel{\frac{dt}{dt}}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad \boxtimes$$

Η διατήρηση της ενέργειας στο προηγούμενο θεώρημα είναι μία ειδική περίπτωση ενός πολύ γενικότερου αποτελέσματος. Δίνουμε κατ' αρχή τον εξής ορισμό.

<u>Ορισμός</u>

Μία συνάρτηση $F = F(p, q)$ στο χώρο φάσεων (p, q) ονομάζεται ένα <u>πρώτο ολοκλήρωμα</u> των εξισώσεων Hamilton αν είναι σταθερή πάνω στις λύσεις των εξισώσεων δηλ.,

$$F\big(p(t), q(t)\big) = \text{σταθ.}$$

Ισοδύναμα, αν η ολική χρονική παράγωγος της F είναι μηδέν:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \dot{F} = 0 .$$

Έτσι η χαμιλτονιανή H με $\partial H/\partial t = 0$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton. Ένας ικανός αριθμός πρώτων ολοκληρωμάτων των εξ. Hamilton αρκεί για να λύσουμε πλήρως ένα χαμιλτονιανό σύστημα. Ένα πρώτο ολοκλήρωμα βοηθά για να μειώσουμε την τάξη του συστήματος κατά ένα. Π.χ., για 2-διάστατα συστήματα η ενέργεια είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα, και γνωρίζουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να "ολοκληρώσουμε" το σύστημα. Στην περίπτωση πολυδιάστατων (n-τάξης έστω) χαμιλτονιανών συστημάτων, η πλούσια δομή τους μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε ένα τέτοιο σύστημα αν γνωρίζουμε λιγότερα από (n-1) πρώτα ολοκληρώματα.

Απαλοιφή των κυκλικών μεταβλητών

Ορισμός

Μια συν/νη q_1 είναι <u>κυκλική</u> αν $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$ όπου $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$.

Μια συν/νη, π.χ. η q_1, είναι κυκλική αν δεν υπεισέρχεται στην L, $\partial L/\partial q_1 = 0$. (Αφού $H = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$)

Πόρισμα (Βασικό: επίλυση εξισώσεων της μηχανικής)

Έστω q_1 μιά κυκλική συν/νη. Τότε η p_1 είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Η μεταβολή των υπολοίπων συν/νων με το χρόνο είναι η ίδια σαν σε ένα σύστημα με συν/νες $q_2, \dots, q_n$ ($n-1$ συν/νες) με χαμιλτονιανή

$$H = H(p_2, \dots, p_n; q_2, \dots, q_n, t, c)$$

που εξαρτάται απο την παράμετρο $c = p_1$.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτοντας $p' = (p_2, \dots, p_n)$, $q' = (q_2, \dots, q_n)$, οι εξισώσεις Hamilton γίνονται

$$\frac{d}{dt} q' = \frac{\partial H}{\partial p'} \quad , \quad \frac{d}{dt} q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{d}{dt} p' = -\frac{\partial H}{\partial q'} \quad , \quad \frac{d}{dt} p_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$$

$\left(\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0\right)$

δηλ. απο τη $\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1 = $ σταθ. και άρα στις εξισώσεις για τα p', q' το p_1 μπορεί να θεωρηθεί μια παράμετρος. Αυτές οι εξισώσεις είναι $2n-2$ μεταβλητών και <u>αφού</u> λυθούν για τις q', p', η $d/dt(q_1) = \partial H/\partial p_1$ γίνεται

$$\frac{d}{dt} q_1 = f(t) \quad , \quad f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1} H\left(p_1, p'(t), q'(t), t\right)$$

και λύνεται άμεσα. ☒

Πόρισμα

Κάθε κλειστό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας ($n=2$) με μια συν/νη κυκλική είναι ολοκληρώσιμο.

<u>Απόδειξη</u>: Ως προς τις p', q' έχουμε ένα σύστημα 1D που ολοκληρώνεται αμέσως με το ολοκλήρωμα $H(p', q') = c$. ☒

Αν $F = F(p,q,t)$ μια συνάρτηση στον επεκτεταμένο χώρο φάσεων, τότε

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial p}dp + \frac{\partial F}{\partial t}dt,$$

και άρα

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dq}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισ. Hamilton, $\dot{q} = \partial H/\partial p$, $\dot{p} = -\partial H/\partial q$,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

ή

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = [H, F] + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

όπου

$$* \quad \boxed{[H, F] = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}} \quad *$$

είναι η αγκύλη Poisson των συναρτήσεων H, F. (Αν $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ τότε

$$[H, F] = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right\}.)$$

Κατά συνέπεια, αν μια συνάρτηση $F = F(p,q)$ δεν εξαρτάται από το t, η F είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του χαμιλτονιανού συστήματος αν:

$$[H, F] = 0.$$

Η αγκύλη Poisson της H με τον εαυτό της είναι προφανώς μηδέν, και άρα η H είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα (αν βεβαίως $\partial H/\partial t = 0$) – μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος διατήρησης ενέργειας που αποδείξαμε πριν.

Θέτοντας διαδοχικά $F = p$ και $F = q$ βρίσκουμε

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = [H, q]$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = [H, p]$$

δηλ. οι εξισώσεις Hamilton γράφονται μέσω της αγκύλης Poisson στην μορφή

$$\boxed{\dot{F} = [H, F]},$$

όπου $F = (q, p)$.

Οι βασικές ιδιότητες της $[\,,\,]$ περιγράφονται από το ακόλουθο

<u>Θεώρημα</u>

$$[F, G] = -[G, F]$$
$$[F+G, H] = [F, H] + [G, H]$$
$$[FG, H] = F[G, H] + G[F, H]$$
(Jacobi) $$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0$$

<u>Απόδειξη</u>

ΑΣΚΗΣΗ!

Επιπλέον από την ιδιότητα Jacobi, έπεται το ακόλουθο θεώρημα

<u>Θεώρημα</u> (Poisson)

Αν F, G είναι δύο πρώτα ολοκληρώματα, τότε η $[F, G]$ είναι και αυτή πρώτο ολοκλήρωμα.

Εν τούτοις, στην πράξη το θεώρημα Poisson δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμο αφού το ολοκλήρωμα $[F, G]$ είναι συνήθως ή σταθερό (π.χ. μηδέν) ή μιά συνάρτηση των αρχικών ολοκληρωμάτων F και G.

Θεωρήματα Liouville και Poincaré

Υποθέτω ότι η συνάρτηση Hamilton είναι ανεξάρτητη του χρόνου:

$$H = H(p, q).$$

Α. Ροή φάσεων των εξισώσεων Hamilton

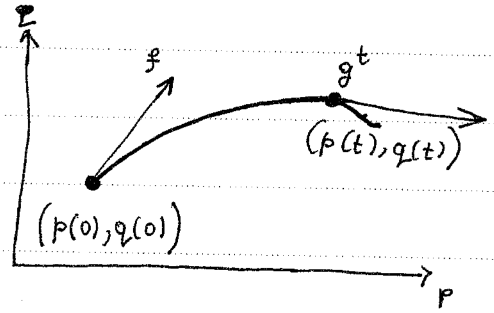
Ορισμός

Ο $2n$-διάστατος χώρος με συν/νες $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ ονομάζεται *χώρος φάσεων.*

Παράδειγμα

Για το 1-διάστατο σύστημα ($n = 1$: 1 βαθμός ελευθερίας : 2 εξισώσεις Hamilton) $\ddot{x} = -\partial U / \partial x$, ο χώρος (p, q), όπου $\underbrace{q = x, \ p = \dot{x}}$, είναι ο γνωστός χώρος φάσεων που έχουμε ήδη εξετάσει. γιατί:

$$\left(L = T - U = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - U(x) \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \right)$$



Στο σημείο (p, q) του χώρου φάσεων <u>το διάνυσμα ταχύτητας</u> δίνεται από τις εξ. Hamilton:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

δηλ., είναι το διάνυσμα,

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right).$$

Ορισμός

Έστω $p(t), q(t)$ λύσεις των εξισ. Hamilton. Τότε ~~η~~ <u>ροή φάσεων</u> είναι η 1-παρ. ομάδα μετ/σμών:

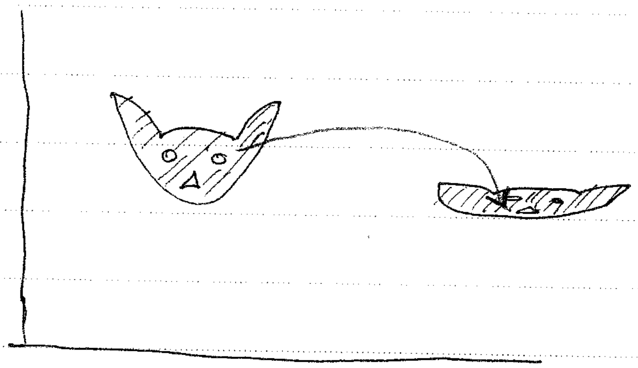
$$g^t : \big(p(0), q(0)\big) \longmapsto \big(p(t), q(t)\big),$$ έτσι ώστε

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g^t x) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)$$

B. Θεώρημα Liouville.

1) Η ροή φάσεων διατηρεί τον όγκο κάθε περιοχής D στο χώρο φάσεων:

$$vlm\left(g^t D\right) = vlm\, D$$



Διατήρηση του όγκου.

Επίσης θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα που είναι πιό γενικό. Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

π.χ.: $x = (p,q)$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ και, $f = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$

και $\{g^t\}$ η ομάδα μετ/σμων:

$$g^t(x) = x + f(x)\,t + O(t^2), \quad t \to 0 \qquad (\star)$$

Έστω $D(0)$ μια περιοχή στο x-χώρο με όγκο $v(0)$. Τότε συμβολίζω με $v(t) := vlm\left(D(t)\right) \equiv vlm\left(g^t D(0)\right)$ και έχω:

Θεώρημα 2.

Αν $\operatorname{div} f \equiv 0$, τοτε η g^t διατηρεί τον όγκο: $v(t) = v(0)$.

C. Απόδειξη

Λήμμα

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} f \, dx, \quad dx = dx_1 \dots dx_n$$

Απόδειξη

$\forall t$ έχουμε, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητών,

$$v(t) = \int_{D(0)} \det \frac{\partial (g^t x)}{\partial x}\, dx .$$

Παραγωγίζοντας την (*) έχουμε

$$\frac{\partial g^t x}{\partial x} = I + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2) \quad , \quad t \to 0$$

και χρησιμοποιώ (*) το γεγονός ότι γιά κάθε πίνακα $A = (a_{ij})$,

$$\det (I + At) = 1 + t \, \mathrm{Tr} A + O(t^2) \quad , \quad t \to 0$$

έτσι ώστε να έχω

$$\det \frac{\partial g^t x}{\partial x} = 1 + t \cdot \mathrm{Tr} \frac{\partial f}{\partial x} + O(t^2) .$$

Αλλά,

$$\mathrm{Tr} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{div} f ,$$

και άρα

$$v(t) = \int_{D(0)} \left[1 + t \, \mathrm{div} f + O(t^2) \right] dx$$

δηλ.

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \int_{D(0)} \mathrm{div} f \, dx . \quad \boxtimes$$

<u>Απόδειξη του (1)</u>

Γράφω

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \mathrm{div} f \, dx$$

και αν

$$\mathrm{div} f = 0$$

τότε

$$\frac{dv}{dt} = 0 .$$

Γιά τις εξισώσεις Hamilton, $f = (-\partial H/\partial q , \partial H / \partial p)$ έχω

$$\mathrm{div} f = \frac{\partial}{\partial p} \left(- \frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) = 0 .$$

Άρα αποδείξαμε το Liouville. $\boxtimes$

---

* βλ. άλλη σελίδα.

(από προηγούμενη σελίδα)

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε πίνακα A ισχύει:

$$\det(I + At) = 1 + t\,\mathrm{tr}A + O(t^2), \quad t \to 0.$$

Κατ' αρχήν, από τον ορισμό του e^{tA} έχουμε

$$e^{tA} = I + tA + O(t^2). \qquad (1)$$

Τώρα ισχύει ότι

Λήμμα

$$\det e^{tA} = e^{t\,\mathrm{tr}A} \qquad (2)$$

ή για κάθε πίνακα,

$$\det e^{A} = e^{\mathrm{tr}A}.$$

Παίρνοντας ορίζουσες στην (1),

$$\det e^{tA} = \det(I + tA) + O(t^2)$$

και άρα από την (2)

$$\det(I + tA) = e^{t\,\mathrm{tr}A} \qquad (3)$$

και αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος της, βρίσκουμε

$$e^{t\,\mathrm{tr}A} = 1 + t\,\mathrm{tr}A + O(t^2) \qquad (4)$$

Άρα, από τις (3),(4) έπεται ότι

$$\det(I + tA) = 1 + t\,\mathrm{tr}A + O(t^2). \quad \text{— ο.ε.δ.}$$

Η (2) έπεται εύκολα αν θυμηθούμε ότι αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $(n\times n)$-πίνακα A τότε

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

και άρα, αφού αν λ: ιδιοτιμή του $A \Rightarrow e^{\lambda t}$: ιδιοτιμή του e^{tA},

$$\det e^{tA} = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \cdots e^{\lambda_n t} = e^{\mathrm{tr}(tA)} = e^{t\,\mathrm{tr}A}$$

Άλλη απόδειξη: $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ και άρα $\det(I + At) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i t)$
$= 1 + t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + O(t^2)$.

D. Θεώρημα επανόδου Poincaré

Θεώρημα Poincaré

Εστω g μια συνεχής, 1-1 και ογκο-διατηρητική (volume-preserving) απεικόνιση

$$g : D \subset \mathbb{R}^n \to D : g(D) = D \quad ; \quad D \text{ φραγμένο χωρίο.}$$

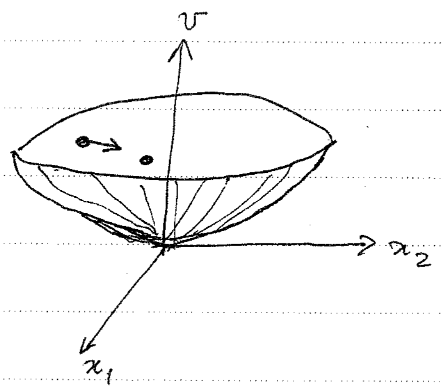
Τότε σε κάθε περιοχή U κάθε σημείου του D υπάρχει $x \in U$ το οποίο επανέρχεται στην U δηλ., $g^n x \in U$ για κάποιο $n > 0$.

$$\Big(g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n\text{- φορές}}\Big)$$

Παράδειγμα

Θεωρώ ένα 2D σύστημα με δυναμικό $V(x_1, x_2)$ ε/ω

$$V(x_1, x_2) \to \infty \quad \text{καθώς} \quad (x_1, x_2) \to \infty.$$



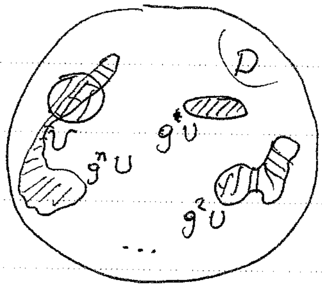
$$\ddot{\underline{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}$$

Οπως έχουμε ήδη δείξει η ροή φάσεων g^t ενός τέτοιου συστήματος είναι ογκο-διατηρητική. Η φραγμένη περιοχή D του θεωρήματος επανόδου Poincaré είναι $(g^t D = D)$

$$D = \{ (p, q) : T + V \leq E \}.$$

Οι κινήσεις του συστήματος είναι γενικώς άγνωστες αλλά το θεωρ. Poincaré μας πληροφορεί ότι (σχεδόν) κάθε σημείο επανέρχεται σε μια περιοχή της αρχικής του θέσης.

Απόδειξη του θεωρήματος Poincaré



Θεωρώ τις εικόνες της U:

$$U, gU, g^2U, \dots, g^nU, \dots$$

Αφού η g είναι ογκο-διατηρητική όλες αυτές έχουν τον ίδιο όγκο και αν δεν τέμνονταν τότε το D θα είχε άπειρο όγκο – άτοπο. Άρα για κάποιους $k \geq 0$, $l \geq 0$, με $k > l$

$$g^k U \cap g^l U \neq \emptyset$$

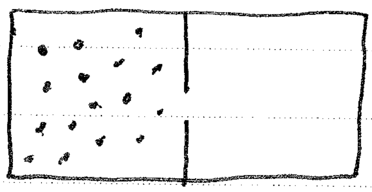
δηλ.,

$$g^{k-l} U \cap U \neq \emptyset.$$

Παίρνω ένα $y \in g^{k-l}U \cap U$. Τότε $\exists\, x \in U$ ε/ω $y = g^n x$ όπου $n = k-l$, δηλαδή αν $x \in U$ τότε για $n = k-l$, $g^n x \in U$. $\boxtimes$

Παράδειγμα

Από τα θεωρήματα Liouville και Poincaré προκύπτει το ακόλουθο παράδοξο: Αν ανοίξουμε την μεμβράνη που διαχωρίζει ένα δοχείο που περιέχει αέριο και ένα δοχείο κενού τότε μετά από ένα χρονικό διάστημα τα μόρια του αερίου συλλέγονται ξανά στο πρώτο δοχείο:

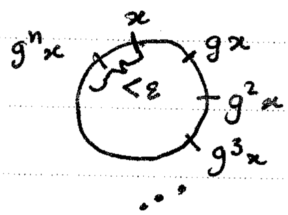


Η διευκρίνιση του παραδόξου αυτού έγκειται στο ότι ο χρόνος που απαιτείται είναι μεγαλύτερος από την ηλικία του Ηλιακού συστήματος.

Παράδειγμα

Αν D: κύκλος και g: περιστροφή με γωνία α τότε:
Αν $\exists\, k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $\alpha = 2\pi k$ τότε η g^n είναι η ταυτοτική απεικόνιση και το θεώρημα Poincaré είναι προφανές.
Αν όμως το α δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π, τότε το θεώρημα Poincare μας λέει ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n : \;\; |g^n x - x| < \varepsilon$$



Ετσι έχουμε:

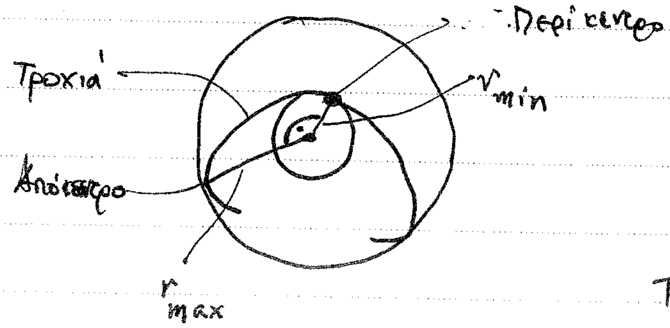
Θεώρημα

Αν $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$, τότε το σύνολο των σημείων $g^k x$ είναι πυκνό στον κύκλο $(k = 1, 2, \dots)$.

(Α πυκνό στο Β αν υπάρχει ένα σημείο του Α σε κάθε περιοχή κάθε σημείου του Β.)

Πρόβλημα

Αποδείξτε ότι κάθε τροχιά της κίνησης σε ένα κεντρικό πεδίο με $U = r^4$ είναι ή κλειστή ή πυκνή στον δακτύλιο μεταξύ δύο κύκλων.



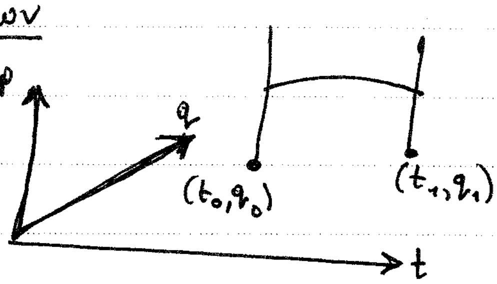
$$\Phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M/r^2 \, dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}$$

Το γνωρίζουμε από την "Δυναμική Ι".

$$\left(V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2} \right)$$

(ενεργός δυν. ενέργεια)

Η Αρχή Ελάχιστης δράσης στο χώρο φάσεων



<u>Θεώρημα</u>

Τα ακρότατα της δράσης:

$$I(\gamma) = \int p\,dq - H\,dt,$$

όπου γ έχει άκρα στους n-διάστατους υπόχωρους $(t=t_0, q=q_0)$ και $(t=t_1, q=q_1)$ του επεκτεταμένου χώρου φάσεων $\Gamma \times \mathbb{R} = \{(p,q,t)\}$, συμπίπτουν με τις ολοκληρωτικές καμπύλες των εξισώσεων Hamilton

$$\dot{p} = -\partial H/\partial q, \quad \dot{q} = \partial H/\partial p.$$

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε την μεταβολή

$$\delta I = \delta \int_\gamma p\,dq - H\,dt = \delta \int_{q_0}^{q_1} p\,dq - \delta \int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

$$= \delta \int_\gamma \left(p\dot{q} - H \right) dt =$$

$$= \int_\gamma \left(\dot{q}\,\delta p + \boxed{p\,\delta\dot{q}} - \frac{\partial H}{\partial p}\,\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\,\delta q \right) dt \qquad (1)$$

Επειδή,

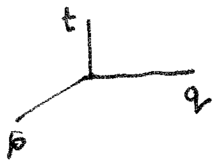
$$p\,\delta\dot{q} = p\,d/dt(\delta q) = \frac{d}{dt}(p\,\delta q) - \dot{p}\,\delta q.$$

και

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(p\,\delta q) = (p\,\delta q)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

για τις μεταβολές δq που εξετάζουμε, το ολοκλήρωμα (1) γίνεται

$$\delta I = \int_\gamma \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt. \quad \boxtimes$$



Παρατηρούμε ότι η Αρχή ελάχιστης δράσης στο χώρο ταχυτήτων που έχουμε ήδη δει, είναι <u>ειδική περίπτωση</u> της ΑΕΔ στο χώρο φάσεων που μόλις αναπτύξαμε. Πράγματι,

παρατηρείστε ότι η ΑΕΔ στο χώρο $(q,\dot q)$ αντιστοιχεί σε μία ΑΕΔ στο χώρο (q,p) όπου $p=\partial L/\partial \dot q$. Κατά μήκος ακροτάτων, έχουμε

$$\int_\gamma p\,dq - H\,dt = \int_{t_0,q_0}^{t_1,q_1} p\,dq - H\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (p\dot q - H)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \qquad (1)$$

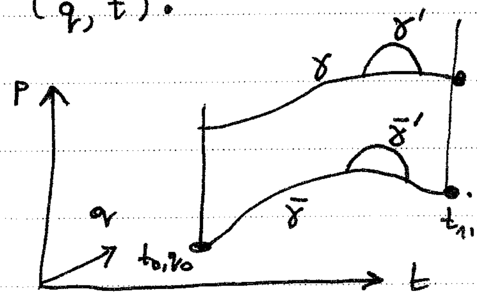
όπου οι H, L συνδέονται μέσω του μετ/σμου Legendre:

$$H = p\dot q - L \qquad (2)$$
$$p = \partial L/\partial \dot q .$$

Έστω λοιπόν ότι η καμπύλη γ είναι ακρότατο της δράσης

$$\int_\gamma H \quad - H dt = , \quad \int p\,dq - H\,dt,$$

με p, H να δίνονται από τις (2), και έστω $\bar\gamma$ η προβολή της γ στο επίπεδο (q,t).



Σε κάθε γειτονική καμπύλη $\bar\gamma'$ από το (t_0,q_0) στο (t_1,q_1) του επιπέδου (q,t) αντιστοιχούμε μία καμπύλη γ' του χώρου φάσεων (p,q,t) θέτοντας $p=\partial L/\partial \dot q$. Τότε κατά μήκος της γ' έχουμε (από την (1))

$$\int_{\gamma'} p\,dq - H\,dt = \int_{\bar\gamma'} L\,dt .$$

Αλλά από το προηγούμενο θεώρημα $\delta\int_\gamma p\,dq - H\,dt = 0$ για κάθε μεταβολή καμπυλών με άκρα (t_0,q_0), (t_1,q_1), και άρα ισχύει και για την ειδική μεταβολή $\gamma \to \gamma'$. Άρα βρίσκουμε ότι

$$\delta \int_{\bar\gamma} L\,dt = 0$$

δηλ. η $\bar\gamma$ είναι ακρότατο της $\int_{\bar\gamma} L\,dt$. ο.ε.δ.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να γράφουμε τις εξισώσεις Hamilton είναι:

Εισάγουμε τις 2n - ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\underline{z} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

και η συνάρτηση Hamilton είναι

$$H(q, p) = H(\underline{z}).$$

Τότε οι εξισώσεις Hamilton

$$\dot{p} = -\partial H / \partial q$$
$$\dot{q} = \partial H / \partial p$$

γράφονται

$$\boxed{\dot{\underline{z}} = \mathbb{J} \cdot \nabla H(\underline{z})}$$

όπου ο $\mathbb{J}$ ονομάζεται ο συμπλεκτικός πίνακας και έχει την μορφή

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

όπου ο I είναι ο $(n \times n)$ ταυτοτικός πίνακας, και

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \right)^{\perp}.$$

Το διανυσματικό πεδίο $\mathbb{J} \cdot \nabla H$ ονομάζεται χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο και η ροή φάσεων δίνει το πεδίο ταχύτητας φάσεων ως

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^t \underset{\sim}{z}) = \mathbb{J} \cdot \nabla H(\underset{\sim}{z})$$

Λυμένα Προβλήματα

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ HAMILTON

12.1. Αν η συνάρτηση του Hamilton $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$, όπου η άθροιση εκτείνεται από $\alpha = 1$ έως n, θεωρηθεί συνάρτηση των συντεταγμένων q_α και των ορμών p_α, δείξτε τις *εξισώσεις του Hamilton*

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

αν η H (*a*) δεν περιέχει ή (*b*) περιέχει τη μεταβλητή του χρόνου t άμεσα.

(*a*) Έστω ότι η H δεν περιέχει το t άμεσα.

Παίρνοντας το διαφορικό της $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$, έχουμε

$$dH = \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ και $\dot{p}_\alpha = \partial L/\partial q_\alpha$, έχουμε από την (1)

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha dq_\alpha \qquad (2)$$

Αλλά επειδή η H είναι συνάρτηση των p_α και q_α, έχουμε και

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \qquad (3)$$

Συγκρίνοντας τις (2) και (3) παίρνουμε

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

(*b*) Έστω ότι η H περιέχει το t άμεσα.

Σ' αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις (1), (2) και (3) του μέρους (*a*) αντικαθίστανται από τις εξισώσεις

$$dH = \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4)$$

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5)$$

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (6)$$

Συγκρίνοντας τις (5) και (6) βρίσκουμε

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

12.2. Αν η συνάρτηση του Hamilton H δεν εξαρτιέται από το t άμεσα, δείξτε ότι αυτή (*a*) είναι σταθερή και (*b*) ισούται με την ολική ενέργεια του συστήματος.

(*a*) Από την εξίσωση (2) του Προβλ. 12.1 έχουμε

$$\frac{dH}{dt} = \sum \dot{q}_\alpha \dot{p}_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha = 0$$

Συνεπώς, η H είναι σταθερή, έστω ίση με E.

(*b*) Από το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις (βλέπε Πρόβλ. 11.47, σελ. 305) έχουμε

$$\sum \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια. Έτσι, επειδή $p_\alpha = \partial L/\partial\dot{q}_\alpha = \partial T/\partial\dot{q}_\alpha$ (υποθέτουμε ότι το δυναμικό V δεν εξαρτιέται από τα $\dot{q}_\alpha$), έχουμε $\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha = 2T$. Έτσι βρίσκουμε

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V = E$$

12.3. Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης που εξαρτιέται μόνο από την απόστασή του από την αρχή. (*a*) Βρείτε τη συνάρτηση του Hamilton του συστήματος. (*b*) Γράψτε τις εξισώσεις της κίνησης του Hamilton.

(*a*) Υποθέτουμε ότι η θέση του σωματίδιου προσδιορίζεται από τις πολικές του συντεταγμένες (r, θ) και ότι το δυναμικό που οφείλεται στην κεντρική δύναμη είναι $V(r)$. Επειδή η κινητική ενέργεια του σωματίδιου είναι $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, η συνάρτηση του Lagrange είναι

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \tag{1}$$

Έχουμε
$$p_r = \partial L/\partial\dot{r} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \tag{2}$$

απ' όπου
$$\dot{r} = p_r/m, \quad \dot{\theta} = p_\theta/mr^2 \tag{3}$$

Έτσι, η συνάρτηση του Hamilton είναι

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \{\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)\} \\ &= p_r\left(\frac{p_r}{m}\right) + p_\theta\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right) - \left\{\tfrac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\cdot\frac{p_\theta^2}{m^2r^4}\right) - V(r)\right\} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \end{aligned} \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι η ολική ενέργεια εκφρασμένη με τις συντεταγμένες και τις ορμές.

(*b*) Οι εξισώσεις του Hamilton είναι $\dot{q}_\alpha = \partial H/\partial p_\alpha$, $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial q_\alpha$

Έτσι
$$\dot{r} = \partial H/\partial p_r = p_r/m, \quad \dot{\theta} = \partial H/\partial p_\theta = p_\theta/mr^2 \tag{5}$$

$$\dot{p}_r = -\partial H/\partial r = p_\theta^2/mr^3 - V'(r), \quad \dot{p}_\theta = -\partial H/\partial\theta = 0 \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (5) είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες εξισώσεις (3).

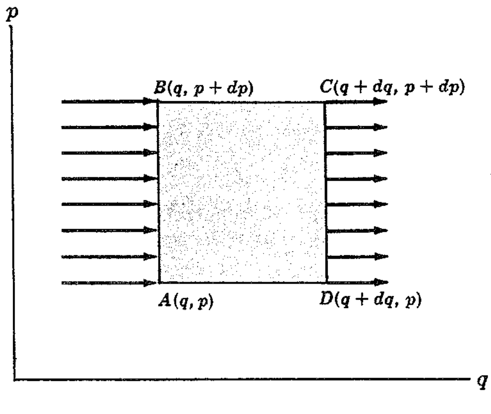
ΧΩΡΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ LIOUVILLE

12.4. Αποδείξτε το θεώρημα του Liouville στην περίπτωση που έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας.

Θεωρούμε ότι το μηχανικό σύστημα περιγράφεται με την κίνηση των αντιπροσωπευτικών σημείων μέσα σε ένα στοιχείο όγκου του χώρου των φάσεων. Στην περίπτωση που το μηχανικό σύστημα έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας, ο χώρος των φάσεων (p, q) είναι δύο διαστάσεων και το στοιχείο όγκου ανάγεται στο στοιχείο εμβαδού $dp\,dq$ (Σχ. 12-2).

Έστω $\rho = \rho(p, q, t)$ η πυκνότητα των αντιπροσωπευτικών σημείων, δηλ. ο αριθμός των αντιπροσωπευτικών σημείων ανά μονάδα εμβαδού, που τον βρίσκουμε με την κατάλληλη οριακή διαδικασία. Επειδή η ταχύτητα με την οποία τα αντιπροσωπευτικά σημεία διαπερνούν την AB είναι $\dot{q}$, ο αριθμός των αντιπροσωπευτικών σημείων που μπαίνουν στο στοιχείο εμβαδού από την AB ανά μονάδα χρόνου είναι

$$\rho\dot{q}\,dp \tag{1}$$



Σχ. 12-2

Ο αριθμός των αντιπροσωπευτικών σημείων που εξέρχονται από την CD ανά μονάδα χρόνου είναι

$$\left\{\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\,dq\right\}dp \tag{2}$$

Έτσι ο αριθμός των αντιπροσωπευτικών σημείων που παραμένουν στο στοιχείο του εμβαδού ισούται με την (1) μείον την (2), δηλ.

$$-\frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\,dp\,dq \tag{3}$$

Όμοια, ο αριθμός των αντιπροσωπευτικών σημείων που εισέρχονται στο στοιχείο εμβαδού από την AD και βγαίνουν από την BC είναι αντίστοιχα

$$\rho\dot{p}\,dq \qquad \text{και} \qquad \left\{\rho\dot{p} + \frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\,dp\right\}dq$$

Έτσι, ο αριθμός που παραμένει στο στοιχείο εμβαδού είναι

$$-\frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\,dp\,dq \tag{4}$$

Η αύξηση του αριθμού των αντιπροσωπευτικών σημείων είναι [προσθέτουμε τις (3) και (4)]

$$-\left\{\frac{\partial(\rho\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho\dot{p})}{\partial p}\right\}dp\,dq$$

Επειδή αυτό ισούται με $\frac{\partial\rho}{\partial t}dp\,dq$, πρέπει να έχουμε

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left\{\frac{\partial(\rho\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho\dot{p})}{\partial p}\right\} = 0$$

ή

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\rho}{\partial q}\dot{q} + \rho\frac{\partial\dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{5}$$

Από τις εξισώσεις του Hamilton $\dot{p} = -\partial H/\partial q$, $\dot{q} = \partial H/\partial p$ έχουμε

$$\frac{\partial\dot{p}}{\partial p} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}, \qquad \frac{\partial\dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial p}$$

Επειδή υποθέσαμε ότι η συνάρτηση του Hamilton έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, έπεται ότι $\partial\dot{p}/\partial p = -\partial\dot{q}/\partial q$. Χρησιμοποιώντας αυτό στην (5) έχουμε

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{6}$$

Αυτή όμως μπορεί να γραφεί $\quad d\rho/dt = 0 \quad (7)$

από την οποία προκύπτει ότι η πυκνότητα στο χώρο των φάσεων είναι σταθερή και αυτό αποδείχνει το θεώρημα του Liouville.

12.5. Αποδείξτε το θεώρημα του Liouville στη γενική περίπτωση.

Στη γενική περίπτωση το στοιχείο όγκου στο χώρο των φάσεων είναι

$$dV = dq_1 \cdots dq_n\,dp_1 \cdots dp_n$$

Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στο Πρόβλ. 12.4 μπορεί να δειχτεί ότι η αύξηση των αντιπροσωπευτικών σημείων στο dV είναι

$$-\left\{\frac{\partial(\rho\dot{q}_1)}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_1)}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{p}_n)}{\partial p_n}\right\}dV$$

και επειδή αυτό ισούται με $\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$, έχουμε

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\dot{q}_1)}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_1)}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial(\rho\dot{p}_n)}{\partial p_n} = 0$$

ή

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{q}_\alpha)}{\partial q_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial(\rho\dot{p}_\alpha)}{\partial p_\alpha} = 0$$

Αυτή μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\rho\left(\frac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial\dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha}\right) = 0 \tag{1}$$

Τώρα από τις εξισώσεις του Hamilton $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha = \partial H/\partial p_\alpha$ έχουμε

$$\frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial p_\alpha}$$

Συνεπώς $\partial \dot{p}_\alpha/\partial p_\alpha = -\partial \dot{q}_\alpha/\partial q_\alpha$ και η (1) γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) = 0 \tag{2}$$

δηλ.

$$d\rho/dt = 0 \tag{3}$$

ή $\rho =$ σταθερή.

Παρατηρούμε ότι, αν $\rho = \rho(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$, τότε

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΤΟΥ HAMILTON

12.6. Δείξτε ότι μια αναγκαία συνθήκη ώστε το $I = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ να είναι ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) είναι η $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Έστω ότι η καμπύλη που κάνει το I ακρότατο είναι η

$$y = Y(x), \qquad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

Τότε η

$$y = Y(x) + \epsilon\eta(x) = Y + \epsilon\eta \tag{2}$$

όπου το ϵ δεν εξαρτιέται από το x, είναι μια γειτονική καμπύλη της $y = Y(x)$ που περνά από τα $x = a$ και $x = b$, αν πάρουμε

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{3}$$

Η τιμή του I γι' αυτή τη γειτονική καμπύλη είναι

$$I(\epsilon) = \int_a^b F(x, Y + \epsilon\eta, Y' + \epsilon\eta')\,dx \tag{4}$$

Αυτή έχει ακρότατο για $\epsilon = 0$. Μια αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι η $\left.\dfrac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$. Αν περάσουμε την παραγώγιση κάτω από το σύμβολο του ολοκληρώματος, βρίσκουμε

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0$$

και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\eta\,dx + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b - \int_a^b \eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

$$= \int_a^b \eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (3). Επειδή η συνάρτηση η είναι αυθαίρετη, πρέπει να έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

που λέγεται εξίσωση του Euler ή του Lagrange. Το αποτέλεσμα εύκολα γενικεύεται στο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')\,dx$$

που μας οδηγεί στις εξισώσεις του Euler ή του Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor βρίσκουμε από την (4) ότι

$$I(\epsilon) - I(0) = \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx + \text{όροι ανώτερης τάξης με } \epsilon^2, \epsilon^3, \text{ κτλ.} \tag{5}$$

Ο συντελεστής του ϵ στην (5) λέγεται *μεταβολή* του ολοκληρώματος και συμβολίζεται με

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

Το γεγονός ότι το $\int_a^b F(x, y, y')\, dx$ έχει ακρότατο συμβολίζεται με

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx = 0$$

12.7. Εξετάστε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της αρχής του Hamilton και του Προβλ. 12.6

Αν ταυτίσουμε τη συνάρτηση $F(x, y, y')$ με τη συνάρτηση του Lagrange $L(t, q, \dot{q})$, όπου τα x, y και y' αντικαθίστανται από τα $t, q, \dot{q}$ αντίστοιχα, βλέπουμε ότι μια αναγκαία συνθήκη ώστε το ολοκλήρωμα δράσης

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{1}$$

να παίρνει ακροτάτη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) είναι η

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2}$$

Επειδή έχουμε δει ότι η (2) περιγράφει την κίνηση ενός σωματίδιου, έπεται ότι μπορούμε να έχουμε μια τέτοια κίνηση, αν απαιτήσουμε η (1) να παίρνει ακρότατη τιμή, που είναι η αρχή του Hamilton.

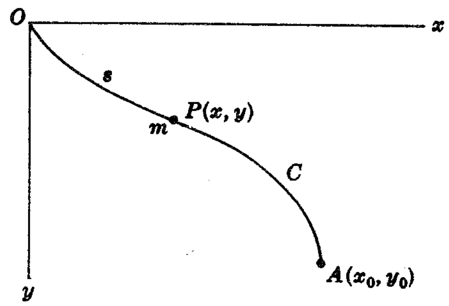
Για συστήματα με n βαθμούς ελευθερίας θεωρούμε το ολοκλήρωμα (1), όπου

$$L = L(t, q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots, q_n, \dot{q}_n)$$

που οδηγεί στις εξισώσεις του Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

12.8. Ένα σωματίδιο γλυστρά πάνω σε ένα σύρμα, που είναι πάνω σε ένα κατακόρυφο επίπεδο και δεν έχει τριβή, από την ηρεμία από ένα σημείο του σύρματος σε ένα άλλο κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Βρείτε τον απαιτούμενο χρόνο.



Σχ. 12-3

Έστω ότι το σύρμα έχει το σχήμα της καμπύλης C του Σχ. 12-3 και ότι το αρχικό σημείο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και το τελικό σημείο είναι το $A(x_0, y_0)$.

Έστω $P(x, y)$ μια τυχούσα θέση του σωματίδιου, που το θεωρούμε ότι έχει μάζα m. Αν πάρουμε το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το A ως επίπεδο αναφοράς, από την αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχουμε

Δυναμική ενέργεια στο O + κινητική ενέργεια στο O = κινητική ενέργεια στο P + δυναμική ενέργεια στο P

ή

$$mgy_0 + 0 = mg(y_0 - y) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2$$

όπου ds/dt είναι το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας του σωματίδιου τη στιγμή t. Έτσι έχουμε

$$ds/dt = \pm\sqrt{2gy} \tag{1}$$

Αν μετρήσουμε το μήκος τόξου s από την αρχή O, τότε το s αυξάνει, καθώς το σωματίδιο κινείται. Έτσι, το ds/dt είναι θετικό και $ds/dt = \sqrt{2gy}$ ή $dt = ds/\sqrt{2gy}$.

Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο για να πάει από τη θέση $y = 0$ στη θέση $y = y_0$ είναι

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Αλλά $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ ή $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Έτσι, ο ζητούμενος χρόνος είναι

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \qquad (2)$$

12.9. Αν το σωματίδιο του Προβλ. 12.8 πηγαίνει από το σημείο O στο σημείο A στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση της καμπύλης C που ορίζει το σχήμα του σύρματος είναι $1+y'^2+2yy''=0$.

Μια αναγκαία συνθήκη ώστε ο χρόνος τ που δίνεται από την εξίσωση (2) του Προβλ. 12.8 να είναι ελάχιστος είναι η

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

όπου

$$F = (1+y'^2)^{1/2}\,y^{-1/2} \qquad (2)$$

Έχουμε $\qquad \partial F/\partial y' = (1+y'^2)^{-1/2}\,y'\,y^{-1/2}, \quad \partial F/\partial y = -\tfrac{1}{2}(1+y'^2)^{1/2}\,y^{-3/2}$

Αντικαθιστώντας στην (1) και μετά από την παραγώγιση ως προς x και τις απλοποιήσεις βρίσκουμε τη ζητούμενη διαφορική εξίσωση.

Το πρόβλημα προσδιορισμού του σχήματος του σύρματος λέγεται το *βραχυστόχρονο πρόβλημα.*

12.10. (*a*) Λύστε τη διαφορική εξίσωση του Προβλ. 12.9 και έτσι (*b*) δείξτε ότι η ζητούμενη καμπύλη είναι μια κυκλοειδής.

(*a*) Επειδή το x δεν υπάρχει στη διαφορική εξίσωση, θέτουμε $y'=u$ οπότε

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}y' = u\frac{du}{dy}$$

και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$1+u^2+2yu\frac{du}{dy} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{2u\,du}{1+u^2}+\frac{dy}{y} = 0$$

Μετά από ολοκλήρωση έχουμε

$$\ln(1+u^2)+\ln y = \ln b \qquad \text{ή} \qquad (1+u^2)y = b$$

όπου b είναι μια σταθερή. Έτσι έχουμε

$$u = y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y}}$$

επειδή η κλίση πρέπει να είναι θετική. Χωρίζοντας τις μεταβλητές και μετά από ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}}\,dy + c$$

Με $y = b\sin^2\theta$, αυτή γράφεται

$$x = \int \sqrt{\frac{b\sin^2\theta}{b\cos^2\theta}} \cdot 2b\sin\theta\cos\theta\,d\theta + c$$

$$= 2b\int \sin^2\theta\,d\theta + c = b\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta + c = \tfrac{1}{2}b(2\theta-\sin 2\theta)+c$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ζητούμενης καμπύλης είναι

$$x = \tfrac{1}{2}b(2\theta-\sin 2\theta)+c, \qquad y = b\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}b(1-\cos 2\theta)$$

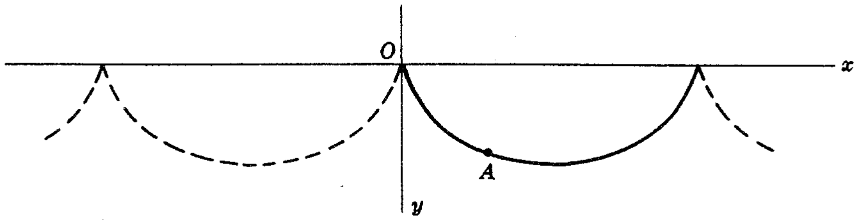
Επειδή η καμπύλη πρέπει να περνά από το σημείο $x=0, y=0$, έχουμε $c=0$. Με

$$\phi = 2\theta, \qquad a = \tfrac{1}{2}b \qquad (1)$$

οι παραμετρικές εξισώσεις της ζητούμενης καμπύλης γίνονται

$$x = a(\phi-\sin\phi), \qquad y = a(1-\cos\phi) \qquad (2)$$

(b) Οι εξισώσεις (2) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις μιας κυκλοειδούς (βλέπε Σχ. 12-4). Η σταθερή a πρέπει να προσδιοριστεί έτσι ώστε η καμπύλη να περνά από το σημείο A. Η κυκλοειδής είναι η τροχιά που διαγράφει ένα σταθερό σημείο μιας περιφέρειας κύκλου που κυλά πάνω σε μια δεδομένη ευθεία (βλέπε Πρόβλ. 12.89).



Σχ. 12-4

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

12.11. Δείξτε ότι ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός, αν υπάρχει μια συνάρτηση $\mathcal{G}$ τέτοια ώστε $d\mathcal{G}/dt = L - \mathcal{L}$.

Τα ολοκληρώματα $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ και $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$ πρέπει να παίρνουν ταυτόχρονα ακρότατες τιμές, οπότε οι μεταβολές τους πρέπει να είναι μηδέν, δηλ.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \qquad \text{και} \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt = 0$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L})\,dt = 0$$

Αυτό συμβαίνει, αν υπάρχει μια συνάρτηση $\mathcal{G}$ τέτοια ώστε

$$L - \mathcal{L} = d\mathcal{G}/dt$$

γιατί σ' αυτή την περίπτωση
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{G}}{dt}dt = \delta\{\mathcal{G}(t_2) - \mathcal{G}(t_1)\} = 0$$

Η συνάρτηση $\mathcal{G}$ λέγεται *γεννήτρια συνάρτηση*.

12.12. Έστω ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι μια συνάρτηση $\mathcal{T}$ των παλιών και των νέων συντεταγμένων θέσης q_α και Q_α αντίστοιχα, καθώς επίσης και του χρόνου t, δηλ. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_\alpha, Q_\alpha, t)$. Δείξτε ότι

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + H \qquad \text{όπου} \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

Από το Πρόβλ. 12.11 έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{T}}{dt} &= L - \mathcal{L} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H - \left\{\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{H}\right\} \\ &= \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha + \mathcal{H} - H\end{aligned}$$

ή
$$d\mathcal{T} = \sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \tag{1}$$

Αλλά, αν $\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_\alpha, Q_\alpha, t)$, τότε

$$d\mathcal{T} = \sum \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha} dQ_\alpha + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} dt \tag{2}$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) παίρνουμε τις ζητούμενες σχέσεις

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}, \quad \mathcal{H} - H = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}$$

Οι εξισώσεις
$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

προκύπτουν από το γεγονός ότι η $\mathcal{H}$ είναι η συνάρτηση του Hamilton στις συντεταγμένες P_α, Q_α, οπότε οι εξισώσεις του Hamilton ισχύουν όπως δείχτηκε στο Πρόβλ. 12.1.

12.13. Έστω ότι $\mathcal{S}$ είναι μια γεννήτρια συνάρτηση που εξαρτιέται μόνο από τα q_α, P_α, t. Δείξτε ότι

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H \qquad \text{όπου} \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

Από την εξίσωση (1) του Προβλ. 12.12 έχουμε

$$\begin{aligned} d\mathcal{T} &= \sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \\ &= \sum p_\alpha dq_\alpha - d\left\{\sum P_\alpha Q_\alpha\right\} + \sum Q_\alpha dP_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \end{aligned}$$

ή

$$d\left(\mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha\right) = \sum p_\alpha dq_\alpha + \sum Q_\alpha dP_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \tag{1}$$

δηλ.

$$d\mathcal{S} = \sum p_\alpha dq_\alpha + \sum Q_\alpha dP_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \tag{2}$$

όπου

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha \tag{3}$$

Επειδή η $\mathcal{S}$ είναι συνάρτηση των q_α, P_α, t, έχουμε

$$d\mathcal{S} = \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha} dP_\alpha + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt \tag{4}$$

Συγκρίνοντας τις (2) και (4) βρίσκουμε

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H$$

Οι σχέσεις

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

προκύπτουν όπως και στο Πρόβλ. 12.12, γιατί η $\mathcal{H}$ είναι η συνάρτηση του Hamilton.

12.14. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, $Q = \tan^{-1}(q/p)$ είναι κανονικός.

Μέθοδος 1. Έστω ότι οι συναρτήσεις του Hamilton στις συντεταγμένες p, q και P, Q είναι αντίστοιχα $H(p, q)$ και $\mathcal{H}(P, Q)$, τέτοιες ώστε $H(p, q) = \mathcal{H}(P, Q)$. Επειδή τα p, q είναι κανονικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

Αλλά

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial p}{\partial Q}\dot{Q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} \tag{3}$$

Από τις εξισώσεις μετασχηματισμού που δόθηκαν έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial p} = p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = q, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

Επίσης, παραγωγίζοντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού ως προς P και Q αντίστοιχα βρίσκουμε

$$1 = p\frac{\partial p}{\partial P} + q\frac{\partial q}{\partial P}, \quad 0 = \left(p\frac{\partial q}{\partial P} - q\frac{\partial p}{\partial P}\right)\Big/(p^2 + q^2)$$

$$0 = p\frac{\partial p}{\partial Q} + q\frac{\partial q}{\partial Q}, \quad 1 = \left(p\frac{\partial q}{\partial Q} - q\frac{\partial p}{\partial Q}\right)\Big/(p^2 + q^2)$$

Λύνοντας παίρνουμε

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{p}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -q, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = p \tag{4}$$

Τότε οι εξισώσεις (1) και (2) γίνονται

$$\dot{p} = \frac{p}{p^2+q^2}\dot{P} - q\dot{Q}, \qquad \dot{q} = \frac{q}{p^2+q^2}\dot{P} + p\dot{Q} \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = q\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} + \frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = p\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} \tag{6}$$

Έτσι από τις εξισώσεις (1), (5) και (6) βρίσκουμε

$$\frac{p}{p^2+q^2}\dot{P} - q\dot{Q} = -q\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - \frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$$

$$\frac{q}{p^2+q^2}\dot{P} + p\dot{Q} = p\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$$

Λύνοντας παίρνουμε

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \tag{7}$$

που μας δείχνουν ότι τα P και Q είναι κανονικές μεταβλητές και συνεπώς ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Μέθοδος 2. Από το Θεώρ. 12.2, σελ. 314, ο μετασχηματισμός είναι κανονικός, αν η ποσότητα

$$\sum p_\alpha\, dq_\alpha - \sum P_\alpha\, dQ_\alpha \tag{8}$$

είναι ολικό διαφορικό. Σ' αυτή την περίπτωση η (8) γίνεται

$$\begin{aligned} p\,dq - P\,dQ &= p\,dq - \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\left(\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2+q^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(p\,dq + q\,dp) = d(\tfrac{1}{2}pq) \end{aligned}$$

δηλ. ένα ολικό διαφορικό. Συνεπώς ο μετασχηματισμός είναι κανονικός

ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON-JACOBI

12.15. (*a*) Γράψτε τη συνάρτηση του Hamilton ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m. (*b*) Γράψτε την αντίστοιχη εξίσωση Hamilton-Jacobi. (*c*) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Hamilton-Jacobi για να βρείτε την κίνηση του ταλαντωτή

(*a*) *Μέθοδος 1.* Έστω q η συντεταγμένη θέσης του αρμονικού ταλαντωτή και $\dot{q}$ η ταχύτητά του. Επειδή η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ και η δυναμική ενέργεια $V = \frac{1}{2}\kappa q^2$, η συνάρτηση του Lagrange είναι

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\kappa q^2 \tag{1}$$

Η ορμή είναι
$$p = \partial L/\partial \dot{q} = m\dot{q} \tag{2}$$

οπότε
$$\dot{q} = p/m \tag{3}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση του Hamilton είναι

$$\begin{aligned} H &= \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p\dot{q} - (\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\kappa q^2) \\ &= \tfrac{1}{2}p^2/m + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Μέθοδος 2. Από το Πρόβλ. 12.2, επειδή η συνάρτηση του Hamilton συμπίπτει με την ολική ενέργεια για συντηρητικά συστήματα, έχουμε

$$H = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \tfrac{1}{2}m(p/m)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \tfrac{1}{2}p^2/m + \tfrac{1}{2}\kappa q^2$$

(*b*) Χρησιμοποιώντας την $p = \partial\mathcal{S}/\partial q$ και τη συνάρτηση του Hamilton του μέρους (*a*), έχουμε από την εξίσωση (26), σελ. 315, την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial q}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = 0 \tag{5}$$

(*c*) Θεωρούμε μια λύση της (5) της μορφής

$$\mathcal{S} = S_1(q) + S_2(t) \tag{6}$$

Τότε η (5) γίνεται
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = -\frac{dS_2}{dt} \tag{7}$$

Εξισώνοντας κάθε μέλος της (7) με μια σταθερή β έχουμε

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \beta, \qquad \frac{dS_2}{dt} = -\beta$$

των οποίων οι λύσεις, χωρίς τις σταθερές ολοκλήρωσης, είναι

$$S_1 = \int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq, \qquad S_2 = -\beta t \tag{8}$$

Έτσι η (6) γίνεται
$$\mathcal{S} = \int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq - \beta t \tag{9}$$

Ταυτίζουμε τη σταθερή β με τη νέα συντεταγμένη ορμή P. Τότε για τη νέα συντεταγμένη θέσης έχουμε

$$Q = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq - \beta t\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2}} - t$$

Αλλά επειδή η νέα συντεταγμένη Q είναι μια σταθερή γ, έχουμε

$$\frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2}} - t = \gamma$$

και μετά από ολοκλήρωση
$$\sqrt{m/\kappa}\,\sin^{-1}(q\sqrt{\kappa/2\beta}) = t + \gamma$$

Λύνοντας ως προς q βρίσκουμε
$$q = \sqrt{2\beta/\kappa}\,\sin\sqrt{\kappa/m}\,(t+\gamma) \tag{10}$$

που είναι η ζητούμενη λύση. Οι σταθερές β και γ βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η β ισούται με την ολική ενέργεια E του συστήματος [βλέπε Πρόβλ. 12.92(*a*)]. Το αποτέλεσμα (9) όταν $\beta = E$ επεξηγεί την εξίσωση (31) της σελ. 316.

12.16. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση Hamilton-Jacobi για να λύσετε το πρόβλημα του Kepler, για ένα σωματίδιο που κινείται σ' ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων που είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετράγωνου της απόστασης.

Η συνάρτηση του Hamilton είναι
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{K}{r} \tag{1}$$

Τότε, επειδή $p_r = \partial\mathcal{S}/\partial r$, $p_\theta = \partial\mathcal{S}/\partial\theta$, η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = 0 \tag{2}$$

Έστω ότι
$$\mathcal{S} = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t) \tag{3}$$

Τότε η (2) γίνεται
$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = -\frac{dS_3}{dt}$$

Εξισώνοντας κάθε μέλος με μια σταθερή β_3 έχουμε

$$dS_3/dt = -\beta_3 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = \beta_3 \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας την (4) παίρνουμε παραλείποντας τη σταθερή ολοκλήρωσης

$$S_3 = -\beta_3 t$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (5) με $2mr^2$ και την γράφουμε στη μορφή

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = r^2\left\{2m\beta_3 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right\}$$

Επειδή το ένα μέλος εξαρτιέται μόνο από το θ και το άλλο μόνο από το r, έπεται ότι κάθε μέλος είναι σταθερό. Έτσι έχουμε

$$dS_2/d\theta = \beta_2 \quad \text{ή} \quad S_2 = \beta_2\theta \tag{6}$$

και
$$r^2\left\{2m\beta_3 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right\} = \beta_2^2$$

ή
$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2} \tag{7}$$

όταν κρατήσουμε τη θετική ρίζα μόνο. Άρα

$$S_1 = \int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr \tag{8}$$

και συνεπώς
$$\mathcal{S} = \int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr + \beta_2\theta - \beta_3 t \tag{9}$$

Ταυτίζοντας τις β_2 και β_3 με τις νέες ορμές P_r και P_θ αντίστοιχα έχουμε

$$Q_r = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\beta_2} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr + \theta = \gamma_1$$

$$Q_\theta = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\beta_3} = \frac{\partial}{\partial\beta_3}\int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr - t = \gamma_2$$

επειδή τα Q_r και Q_θ είναι σταθερές, οι γ_1 και γ_2. Εκτελώντας τις παραγωγίσεις ως προς β_2 και β_3 βρίσκουμε

$$\int \frac{\beta_2\, dr}{r^2\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}} = \theta - \gamma_1 \tag{10}$$

$$\int \frac{m\, dr}{\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}} = t + \gamma_2 \tag{11}$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $r = 1/u$ μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (10). Με την ολοκλήρωση βρίσκουμε ότι η εξίσωση της τροχιάς είναι

$$r = \frac{\beta_2^2/mK}{1 - \sqrt{1 + 2\beta_3\beta_2^2/mK^2}\cos(\theta + \pi/2 - \gamma_1)} \tag{12}$$

Η σταθερή β_3 είναι η ενέργεια E [βλέπε Πρόβλ. 12.92(*b*)], που συμφωνεί με την εξίσωση (31), σελ. 316. Αν $E = \beta_3 < 0$, η τροχιά είναι έλλειψη, αν $E = \beta_3 = 0$, αυτή είναι παραβολή και αν $E = \beta_3 > 0$, αυτή είναι υπερβολή. Αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα του Κεφ. 5.

Όταν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (11), βρίσκουμε τη θέση του σωματίδιου ως συνάρτηση του χρόνου.

22

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΔΡΑΣΗΣ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΣ

12.17. Έστω ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια πλήρης λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi που περιλαμβάνει τις n σταθερές $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Έστω ακόμα $J_\alpha = \oint p_\alpha \, dq_\alpha$. Δείξτε ότι τα J_α είναι συναρτήσεις μόνο των β_α.

Έχουμε
$$\mathcal{S} = S_1(q_1, \beta_1, \ldots, \beta_n) + \cdots + S_n(q_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) - \beta_1 t \qquad (1)$$

όπου η σταθερή β_1 ισούται με την ολική ενέργεια E. Έχουμε τώρα
$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha} = \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} \qquad (2)$$

και άρα
$$J_\alpha = \oint p_\alpha \, dq_\alpha = \oint \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} dq_\alpha \qquad (3)$$

Κατά την ολοκλήρωση αυτή τα q_α ολοκληρώνονται και οι μόνες ποσότητες που παραμένουν είναι οι σταθερές $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Έτσι έχουμε τις n εξισώσεις
$$J_\alpha = J_\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad \alpha = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την (4) μπορούμε να λύσουμε ως προς $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ως συναρτήσεις των $J_1, \ldots, J_n$ και να εκφράσουμε την (1) με τα J_α.

12.18. (*a*) Υποθέτουμε ότι οι νέες συντεταγμένες θέσης και ορμής είναι w_α και J_α αντίστοιχα. Δείξτε ότι, αν $\mathcal{H}$ είναι η νέα συνάρτηση του Hamilton, τότε
$$\dot{J}_\alpha = -\partial \mathcal{H}/\partial w_\alpha, \qquad \dot{w}_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha$$

(*b*) Από το μέρος (*a*) δείξτε ότι
$$J_\alpha = \text{σταθερή} \qquad \text{και} \qquad w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha$$

όπου f_α και c_α είναι σταθερές και $f_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha$.

(*a*) Από τις εξισώσεις του Hamilton για τις κανονικές συντεταγμένες Q_α, P_α έχουμε
$$\dot{P}_\alpha = -\partial \mathcal{H}/\partial Q_\alpha, \qquad \dot{Q}_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial P_\alpha \qquad (1)$$

Επειδή τώρα οι νέες συντεταγμένες θέσης και ορμής είναι $Q_\alpha = w_\alpha$ και $P_\alpha = J_\alpha$, αυτές οι εξισώσεις γίνονται
$$\dot{J}_\alpha = -\partial \mathcal{H}/\partial w_\alpha, \qquad \dot{w}_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha \qquad (2)$$

(*b*) Επειδή $\mathcal{H} = E$, η νέα συνάρτηση του Hamilton εξαρτιέται μόνο από το J_α και όχι από το w_α. Έτσι από την (2) έχουμε
$$\dot{J}_\alpha = 0, \qquad \dot{w}_\alpha = \text{σταθερή} = f_\alpha \qquad (3)$$

όπου $f_\alpha = \partial \mathcal{H}/\partial J_\alpha$. Από τις (3) βρίσκουμε
$$J_\alpha = \text{σταθερή}, \qquad w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha \qquad (4)$$

Οι ποσότητες J_α λέγονται *μεταβλητές δράσης*, ενώ τα αντίστοιχα ολοκληρώματα
$$\oint p_\alpha \, dq_\alpha = J_\alpha \qquad (5)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σ' έναν πλήρη κύκλο ως προς τις συντεταγμένες q_α, λέγονται *ολοκληρώματα φάσης* ή *φασικά ολοκληρώματα*. Οι ποσότητες w_α λέγονται *μεταβλητές γωνίας*.

12.19. (*a*) Έστω ότι το Δw_α παριστάνει τη μεταβολή στο w_α που αντιστοιχεί σε έναν πλήρη κύκλο της συντεταγμένης q_r. Δείξτε ότι
$$\Delta w_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{αν } \alpha = r \\ 0 & \text{αν } \alpha \neq r \end{cases}$$

(b) Δώστε μια φυσική εξήγηση στο αποτέλεσμα του μέρους (a).

(a)
$$\Delta w_\alpha = \oint \frac{\partial w_\alpha}{\partial q_r}\,dq_r = \oint \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial S}{\partial J_\alpha}\right) dq_r = \oint \frac{\partial}{\partial J_\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\right) dq_r$$
$$= \frac{\partial}{\partial J_\alpha}\oint \frac{\partial S}{\partial q_r}\,dq_r = \frac{\partial J_r}{\partial J_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \alpha = r \\ 0 & \text{αν } \alpha \neq r \end{cases}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $w_\alpha = \partial S/\partial J_\alpha$ (βλέπε Προβλ. 12.17 και 12.18) και υποθέσαμε ότι μπορεί να εναλλαγούν η παραγώγιση και η ολοκλήρωση.

(b) Από το μέρος (a) προκύπτει ότι το w_α μεταβάλλεται κατά μία μονάδα, όταν το q_α διατρέξει έναν πλήρη κύκλο, ενώ δεν υπάρχει καμιά μεταβολή, όταν οποιοδήποτε άλλο q διατρέξει έναν πλήρη κύκλο. Από αυτό προκύπτει ότι το q_α είναι μια περιοδική συνάρτηση του w_α με περίοδο τη μονάδα. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι τα f_α στην εξίσωση (4) του Προβλ. 12.18 είναι συχνότητες.

12.20. Βρείτε τη συχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή του Προβλ. 12.15.

Ένας πλήρης κύκλος της μεταβλητής q [βλέπε εξίσωση (10), Πρόβλ. 12.15] συνίσταται στην κίνηση από $q = -\sqrt{2\beta/\kappa}$ έως $q = +\sqrt{2\beta/\kappa}$ και πάλι πίσω στο $q = -\sqrt{2\beta/\kappa}$. Τότε η μεταβλητή δράσης είναι

$$J = \oint p\,dq = 2\int_{-\sqrt{2\beta/\kappa}}^{\sqrt{2\beta/\kappa}} \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\,dq = 4\int_0^{\sqrt{2\beta/\kappa}} \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\,dq$$
$$= 2\pi\beta\sqrt{m/\kappa}$$

Συνεπώς $$\beta = E = \frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \mathcal{H} \qquad \text{και} \qquad f = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

12.21. Προσδιορίστε τη συχνότητα του προβλήματος του Kepler (βλέπε Πρόβλ. 12.16).

Ένας πλήρης κύκλος της συντεταγμένης r συνίσταται στην κίνηση από το $r = r_{\min}$ στο $r_{\max}$ και πάλι πίσω στο $r = r_{\min}$, όπου τα $r_{\min}$ και $r_{\max}$ είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του r που δίνονται από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης [βλέπε εξίσωση (10), Πρόβλ. 12.16]

$$2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2 = 0 \tag{1}$$

Από τις εξισώσεις (6) και (7) του Προβλ. 12.16 έχουμε

$$J_\theta = \oint p_\theta\,d\theta = \oint \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\,d\theta = \oint \frac{dS_2}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \beta_2\,d\theta = 2\pi\beta_2 \tag{2}$$

$$J_r = \oint p_r\,dr = \oint \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}\,dr = \oint \frac{dS_1}{dr}\,dr = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\,dr$$
$$= 2\pi mK/\sqrt{-2m\beta_3} - 2\pi\beta_2 \tag{3}$$

Από τις (2) και (3), όταν απαλείψουμε το β_2, έχουμε

$$J_\theta + J_r = 2\pi mK/\sqrt{-2m\beta_3} \tag{4}$$

Επειδή $\beta_3 = E$, η (4) γίνεται

$$E = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^2} \qquad \text{και άρα} \qquad \mathcal{H} = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^2}$$

Έτσι οι συχνότητες είναι

$$f_\theta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\theta} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^3}, \qquad f_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_r} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^3}$$

Επειδή αυτές οι δύο συχνότητες είναι οι ίσες, δηλ. υπάρχει μόνο μία συχνότητα, λέμε ότι το σύστημα είναι *εκφυλισμένο*.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

12.22. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σ' ένα πεδίο δυνάμεων που έχει δυναμικό V. Γράψτε (a) τη συνάρτηση του Hamilton και (b) τις εξισώσεις του Hamilton σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ).

(a) Η κινητική ενέργεια σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) \tag{1}$$

Η συνάρτηση του Lagrange είναι

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \tag{2}$$

απ' όπου

$$p_r = \partial L/\partial \dot{r} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \partial L/\partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = \partial L/\partial \dot{\phi} = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} \tag{3}$$

και

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2\theta} \tag{4}$$

Η συνάρτηση του Hamilton είναι

$$\begin{aligned} H &= \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \\ &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + V(r, \theta, \phi) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + V(r, \theta, \phi) \end{aligned} \tag{5}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα των εξισώσεων (4).

Μπορούμε να βρούμε την (5) και απευθείας, γιατί όταν έχουμε συντηρητικά συστήματα η συνάρτηση του Hamilton ισούται με την ολική ενέργεια, δηλ. $H = T + V$.

(b) Οι εξισώσεις του Hamilton είναι $\dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $\dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}$. Έτσι, από το μέρος (a) βρίσκουμε

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2\theta}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \sin^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mr^2 \sin^3\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

12.23. Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται σ' ένα πεδίο δυνάμεων του οποίου το δυναμικό σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $V = -(K \cos\theta)/r^2$. Γράψτε την εξίσωση Hamilton-Jacobi που περιγράφει την κίνηση.

Από το Πρόβλ. 12.22 η συνάρτηση του Hamilton είναι

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - \frac{K \cos\theta}{r^2} \tag{1}$$

Γράφοντας $p_r = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}$, $p_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}$, $p_\phi = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}$, έχουμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}\right)^2\right\} - \frac{K \cos\theta}{r^2} = 0 \tag{2}$$

12.24. (a) Βρείτε μια πλήρη λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi του Προβλ. 12.23 και (b) δείξτε πώς μπορεί να προσδιοριστεί η κίνηση του σωματιδίου.

(a) Θέτοντας $\mathcal{S} = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\phi) - Et$ στην εξίσωση (2) του Προβλ. 12.23 βρίσκουμε

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 - \frac{K\cos\theta}{r^2} = E \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1) επί $2mr^2$ παίρνουμε

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mEr^2 = -\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 + 2mK\cos\theta$$

Επειδή το αριστερό μέλος εξαρτιέται μόνο από το r και το δεξιό μέλος μόνο από τα θ και ϕ, έπεται ότι κάθε μέλος είναι μια σταθερή, έστω β_1. Έτσι έχουμε

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mEr^2 = \beta_1 \tag{2}$$

και

$$-\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 + 2mK\cos\theta = \beta_1 \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3) επί $\sin^2\theta$. Μετά από ανακατάταξη των όρων βρίσκουμε

$$\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 = 2mK\sin^2\theta\cos\theta - \beta_1\sin^2\theta - \sin^2\theta\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 \tag{4}$$

Επειδή το αριστερό μέλος εξαρτιέται μόνο από το ϕ, ενώ το δεξιό μέλος μόνο από το θ, το κάθε μέλος είναι μια σταθερή, έστω β_2. Επειδή όμως

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\phi} = \frac{dS_3}{d\phi} \tag{5}$$

μπορούμε να γράψουμε $\beta_2 = p_\phi^2$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ϕ είναι μια κυκλική ή αγνοήσιμη συντεταγμένη. Έτσι η (4) γίνεται

$$2mK\sin^2\theta\cos\theta - \beta_1\sin^2\theta - \sin^2\theta\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = p_\phi^2 \tag{6}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (2), (6) και (5) βρίσκουμε

$$S_1 = \int\sqrt{2mE + \beta_1/r^2}\,dr, \qquad S_2 = \int\sqrt{2mK\cos\theta - p_\phi^2\csc^2\theta - \beta_1}\,d\theta, \qquad S_3 = p_\phi\phi$$

όπου έχουμε πάρει τις θετικές τετραγωνικές ρίζες και παραλείψει τις αυθαίρετες προσθετικές σταθερές. Η πλήρης λύση είναι

$$\mathcal{S} = \int\sqrt{2mE + \beta_1/r^2}\,dr + \int\sqrt{2mK\cos\theta - p_\phi^2\csc^2\theta - \beta_1}\,d\theta + p_\phi\phi - Et$$

(*b*) Οι ζητούμενες εξισώσεις της κίνησης βρίσκονται από τις

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\beta_1} = \gamma_1, \quad \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial E} = \gamma_2, \quad \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial p_\phi} = \gamma_3$$

Όταν λύσουμε αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε τις συντεταγμένες r, θ, ϕ ως συναρτήσεις του χρόνου. Τις αυθαίρετες σταθερές τις προσδιορίζουμε από τις αρχικές συνθήκες.

12.25. Αν οι συναρτήσεις F και G εξαρτιώνται από τις συντεταγμένες θέσης q_α, ορμής p_α και χρόνου t, η *αγκύλη Poisson* των F και G ορίζεται με τη σχέση

$$[F, G] = \sum_\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right)$$

Δείξτε ότι (*a*) $[F, G] = -[G, F]$, (*b*) $[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$, (*c*) $[F, q_r] = \partial F/\partial p_r$, (*d*) $[F, p_r] = -\partial F/\partial q_r$.

(*a*) Είναι $[F, G] = \sum_\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) = -\sum_\alpha\left(\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\right) = -[G, F]$

Αυτό δείχνει ότι οι αγκύλες Poisson δεν έχουν την αντιμεταθετική ιδιότητα.

(b)
$$[F_1+F_2, G] = \sum_\alpha \left\{\frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right\}$$
$$= \sum_\alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) + \sum_\alpha \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right)$$
$$= [F_1, G] + [F_2, G]$$

Αυτό δείχνει ότι οι αγκύλες Poisson έχουν την επιμεριστική ιδιότητα.

(c) Είναι
$$[F, q_r] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial q_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_r}{\partial p_\alpha}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_r}$$
γιατί $\partial q_r/\partial q_\alpha = 1$, αν $\alpha = r$, και 0, αν $\alpha \neq r$, ενώ $\partial q_r/\partial p_\alpha = 0$ για όλα τα α. Επειδή το r είναι αυθαίρετο, έχουμε αμέσως το ζητούμενο αποτέλεσμα.

(d) Είναι
$$[F, p_r] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_r}{\partial p_\alpha}\right) = -\frac{\partial F}{\partial q_r}$$
γιατί $\partial p_r/\partial q_\alpha = 0$ για όλα τα α, ενώ $\partial p_r/\partial p_\alpha = 1$, αν $\alpha = r$, και 0, αν $\alpha \neq r$. Επειδή το r είναι αυθαίρετο, έχουμε αμέσως το ζητούμενο αποτέλεσμα.

12.26. Αν H είναι η συνάρτηση του Hamilton, δείξτε ότι, αν η f είναι μια τυχούσα συνάρτηση που εξαρτιέται από τις συντεταγμένες θέσης, ορμής και το χρόνο, τότε
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

Έχουμε
$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}dp_\alpha\right) \tag{1}$$
ή
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) \tag{2}$$

Από τις εξισώσεις όμως του Hamilton έχουμε $\dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $\quad \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ (3)

Άρα η (2) γράφεται
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

Άλυτα Προβλήματα

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ HAMILTON

12.27. Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται σε ένα πεδίο δυνάμεων που έχει δυναμικό V. (a) Γράψτε τη συνάρτηση του Hamilton και (b) τις εξισώσεις του Hamilton σε ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y, z).

Απ. (a) $H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + V(x, y, z)$

(b) $\dot{x} = p_x/m$, $\dot{y} = p_y/m$, $\dot{z} = p_z/m$, $\dot{p}_x = -\partial V/\partial x$, $\dot{p}_y = -\partial V/\partial y$, $\dot{p}_z = -\partial V/\partial z$

12.28. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις του Hamilton για να βρείτε την κίνηση ενός σωματιδίου με μάζα m που κινείται προς τα κάτω πάνω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας α χωρίς τριβή.

12.29. Λύστε το πρόβλημα των μικρών ταλαντώσεων ενός απλού εκκρεμούς χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Hamilton.

12.30. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις του Hamilton για να βρείτε την κίνηση ενός βλήματος που εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 και γωνία α με τον ορίζοντα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7

ΔΥΝΑΜΙΚΗ HAMILTON

Πως βρίσκουμε τις εξ. Hamilton για ένα πρόβλημα;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Βρίσκουμε την L ως $T-V$

↓

Βρίσκουμε τις $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ από τις σχέσεις $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

↓

Λύνουμε τις $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ ως προς $\dot{q}_j$ και υπολογίζουμε τα $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_i, p_i, t)$

↓

Αντικαθιστούμε στην L τα $\dot{q}_i$ και υπολογίζουμε την $L = L(p_i, q_i, t)$ και μετά την $H = H(p_i, q_i, t)$ από την $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$

↓

Γράφουμε τις άλλες μισές εξ. Hamilton δηλ. τις $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$, αφού οι πρώτες μισές $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i, t)$ έχουν βρεθεί.

↓

Λύνουμε το σύστημα

↓

ΤΕΛΟΣ

V

$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$ Οι

$_i, \dot{q}_i, t.$

ιολογίζομε

τὴν L τα $\dot{q}_i$ καί

ώς συνάρτηση

υπολογίζομε τό

$H = \sum \dot{q}_i P_i - L$

$= F_{q_i} - \dot{P}_i.$

$q_i, P_i, t)$

εων

Παράδειγμα 1

Νά γραφοῦν οἱ ἐξισώσεις Hamilton γιά ἕνα σωματίδιο πού εκτελεῖ βολή στό κατακόρυφο ἐπίπεδο μέσα σέ σταθερό πεδίο βαρύτητος ἐντάσεως g

Λύση

Β.Ε: 2

Συντεταγμένες x, y

$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$U = mgy$ $\quad$ ($U=0$ στό ἔδαφος)

$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

Υπολογίζομε τίς γενικευμένες ὁρμές.

$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad , \quad P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

Λύνομε ὡς πρός $\dot{x}, \dot{y}$

$$\dot{x} = \frac{P_x}{m} \quad , \quad \dot{y} = \frac{P_y}{m} \qquad (1)$$

Ἄρα:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{P_x^2}{m^2} + \frac{P_y^2}{m^2} \right) - mgy = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} - mgy$$

Ἡ Hamiltonian

$$H = (P_x \dot{x} + P_y \dot{y}) - L = \frac{P_x^2}{m} + \frac{P_y^2}{m} - \frac{P_x^2}{2m} - \frac{P_y^2}{2m} + mgy$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + mgy$$

Θεωροῦμε τίς ἐξισώσεις τοῦ Hamilton $\quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{P}_x \rightarrow \dot{P}_x = 0 \rightarrow P_x = \text{σταθ}$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{P}_y \Rightarrow \dot{P}_y = -mg \rightarrow P_y = -mgt + c$$

Οἱ ἄλλες δύο ἐξισώσεις εἶναι: $\dot{x} = \sigma\tau\alpha\vartheta$, $\dot{y} = \frac{P_y}{m} = -gt + \sigma\tau\alpha\vartheta$

(Σημείωση:

(α) Οἱ ἐξωτερικές δυνάμεις εἶναι συντηρητικές. καί δέν ἔχομε κινουμένους συνδέσμους ἤ συντεταγμένες. Ἑπομένως ἡ $H = T + V$. Πράγματι:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left(\frac{P_x^2}{m^2} + \frac{P_y^2}{m^2} \right) = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m}$$

$$U = mgy$$

Ἄρα: $$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + mgy$$ πού ἔχομε ἤδη βρῆ.)

(β) Γιά νά δοῦμε ὅτι οἱ ἐξισώσεις πού βρήκαμε εἶναι ὄντως οἱ ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνος παραγωγίζομε τίς $\dot{x} = \sigma\tau\alpha\vartheta$ καί $\dot{y} = -gt + \sigma\tau\alpha\vartheta$ καί βρίσκομε $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$ δηλ. τίς ἐξισώσεις κίνησης τῆς Νευτωνίου περιγραφῆς)

Παράδειγμα 2

Νά γραφοῦν οἱ ἐξισώσεις τοῦ Hamilton γιά ἕνα εὐκαμπές μέ ἐλαστικό νῆμα σταθερᾶς ἐλαστικότητος k καί φυσικοῦ μήκους r_0 στό ἄκρο τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μάζα m. Ἡ κίνηση περιορίζεται στό κατακόρυφο ἐπίπεδο. Νά δειχθῆ ὅτι οἱ προκύπτουσες ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμες μέ τίς ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνα γιά τό σύστημα τοῦτο. (Βλ. (5.11) παρ.)

Λύση:

B.E

Γενικ

$T =$

$V = -$

$L =$

Γενικε

$P_r =$

$P_\theta =$

Οἱ (1) (2)

κινούμενοι

$H = \frac{1}{2} m ($

Οἱ ὑπόλοι

Προκειμένου

ένωσης συνδέσμου

ύσεις τοῦ

βρίσκομε

περιγραφής)

μέ ἐλαστικό

τοῦ δισκίου

ρεδο. Νά

τοῦ Νεύ-

$T = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2)$

φυσικό μήκος

$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$

$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$

Γενικευμένες ορμές:

$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \Rightarrow \dot r = \frac{P_r}{m}$ (1)

$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \rightarrow \dot\theta = \frac{P_\theta}{mr^2}$ (2)

Οἱ (1) (2) εἶναι δύο πρῶτες ἐξισώσεις τοῦ Hamilton. Δεν ὑπάρχουν κινούμενοι περιορισμοί ἤ συντεταγμένες ὅρο: $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2} m\left(\frac{P_r^2}{m^2} + r^2\frac{P_\theta^2}{m^2 r^4}\right) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

$\therefore$

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{1}{r^2}P_\theta^2\right) - mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

Οἱ ὑπόλοιπες δύο ἐξισώσεις τοῦ Hamilton εἶναι:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\dot P_r \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot P_\theta$$

$$\therefore \quad -\frac{P_\theta^2}{mr^3} - mg\cos\theta + k(r - r_0) = -\dot P_r \quad (3)$$

$$mgr\sin\theta = -\dot P_\theta \quad (4)$$

Προκειμένου νά δείξωμε ὅτι αὐτές εἶναι ἰσοδύναμες μέ τίς ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνα ἀντικαθιστοῦμε τά P_θ, P_r ἀπο τίς ἐξισώσεις κίνησης (1) ; (2) στις (3) ; (4)

Ἡ (3) γίνεται: $-\dfrac{m^2 r^4 \dot{\theta}^2}{m r^3} - mg\cos\theta + k(r - r_0) = -m\ddot{r}$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} - m r\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r - r_0) = 0 \qquad (5)$$

καί ἡ (4) ὁμοίως δίνει: $m r^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 \qquad (6)$

Οἱ (5) καί (6) εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἐξισώσεις κίνησης τοῦ Νεύτωνα γιά τό ἐκκρεμές αὐτό (Βλ.(5.1.1) παράδειγμα)

6.1.3. Παράδειγμα:

Νά δειχθῆ ὅτι ἡ Hamiltonian γιά τό σύστημα τοῦ 4.1.4 παραδείγματος σχέσ 4.15 εἶναι

$$H = \frac{1}{2m}\left[\frac{p_z^2}{1+\tan^2(1+b^2z^2)}\right] + mgz$$

ὑποθέτοντας ὅτι $\omega = -b\dot{z}$ Βρῆτε τίς ἐξισώσεις τοῦ Hamilton.

Λύση.

Οἱ σύνδεσμοι εἶναι: $p = z\tan\theta$, $\dot{\phi} = -b\dot{z}$

Ἔχομε δείξει στό 4.1.4 παράδειγμα ὅτι ἡ κινητική ἐνέργεια.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2\tan^2\theta + z^2\tan^2\theta b^2\dot{z}^2 + \dot{z}^2) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + z^2b^2\tan^2\theta\right) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\,\frac{1+z^2b^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

Ἄρα $L =$

Ἡ γενικευμεν

Δέν ὑπάρχου

$\therefore \quad H = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}$

Μία ἐξίσωσ εἶναι

Ἄρα

6.1.4. Π

Νά γραφοῦν Μάζης εἶναι Coulomb. Χ

...lembert ὑπό τήν μορφή:

$i = 1, 2, \ldots$

...τώσεων D' Alembert καλέσαμε ἐξισώσεις

...ωμε τίς ἐξισώσεις Lagrange συναρτή-

...ῆς Lagrangian.

...δύναμη $\vec{F}$ δρᾶ σ' ἕνα σύστημα

...η ὑπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση

...α δυνατή μετατόπιση ἀπό τήν θέση

$$'(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i$$

...ἀντιστοιχεῖ στήν $\vec{F}_{q_i}$ εἶναι ἡ $\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$ μποροῦμε νά γράψωμε

$$\ldots) = F'_{q_i}$$

...ιευμένες δυνάμεις πού βρίσκονται

...ικῶν δυνάμεων ἀπό τῆς $\vec{F}$

...μεταφέρωμε ὅλες τίς διατηρήσιμες

Lagrange τότε γράφονται:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{q_i} \qquad (5.1.1.)$$

ὅπου ἡ συνάρτηση $L = T - V$ καλεῖται "συνάρτηση Lagrange" καί περιέχει στό V ὅλες τίς διατηρήσιμες δυνάμεις.

Οἱ γενικευμένες δυνάμεις F_{q_i} βρίσκονται ἀπό τό ὁλικό δυνατό ἔργο πού παράγουν οἱ μή διατηρήσιμες δυνάμεις γιά μία γενική δυνατή μετατόπιση.

Οἱ συντηρητικές δυνάμεις πού ἐμφανίζονται συνήθως στήν πράξη εἶναι:

Ἡ δύναμη βαρύτητας ($V = \pm mgz$) [+ ἤ − ἀνάλογα ἐάν τό σῶμα βρίσκεται πάνω ἤ κάτω ἀπό τό ἐπίπεδο Μηδενικῆς Ἐνεργείας]

Ἡ δύναμη τάσης ἐλατηρίου σταθερᾶς k καί ἀρχικοῦ μήκους l_0 ($V = +\frac{1}{2}k(l - l_0)^2$). (πάντοτε θετικό)

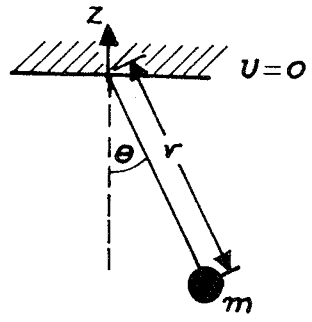
Οἱ διάφορες Κεντρικές Δυνάμεις.

Παράδειγμα: (Εξ. E-L για το Παρ. 1)

Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις κίνησης ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς μάζας m τοῦ ὁποίου τό νῆμα εἶναι ἐλαστικό φυσικοῦ μήκους l καί σταθερᾶς k ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ κίνηση γίνεται στό κατακόρυφο ἐπίπεδο.

Λύση:

Βαθμοί Ἐλευθερίας: 2



Γενικευμένες συντεταγμένες: r, θ (πολικές) $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

Δυνάμεις: Ἡ βαρύτης, δυναμικό: $-mgr\cos\theta$

Ἡ δύναμη ἀπό τό ἐλατήριο, δυναμικό $\frac{1}{2}k(r-\ell)^2$

[Σημείωση: Τό δυναμικό τοῦ ἐλατηρίου λαμβάνεται πάντα θετικό δηλ. $+\frac{1}{2}k(r-\ell)^2$]

Ὁλικό Δυναμικό: $U = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-\ell)^2$

Lagrangian: $L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-\ell)^2$

Βρίσκομε τίς ἐξισώσεις κίνησης

[Ἐπειδή δέν ὑπάρχουν μή συντηρητικές δυνάμεις τό $\delta W_{ολικό} = 0$

ἄρα $F_{q_r} = 0$]

Συντεταγμένη θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Ἄρα: $\frac{d}{dt}(mr\dot{\theta})^2 + mgr\cos$

$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta =$

Συντεταγμένη - r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ $\frac{\partial L}{\partial r} = m$

Ἄρα: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}r - g\cos$

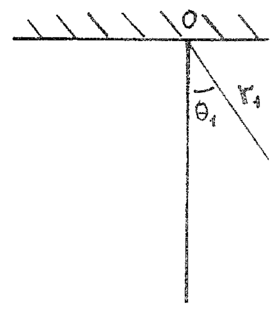
5.1.2 Παράδειγμα (Τό διπ

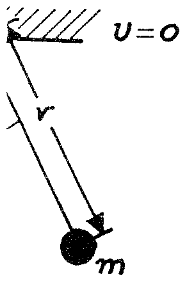
Δύο ἐκκρεμῆ OA, AB εἶναι

νήματα τῶν ἐκκρεμῶν εἶναι ἐλαστι

(ℓ_1, k_1) καί (ℓ_2, k_2) ἀντιστοίχως Να

μένου ὅτι ἡ κίνηση γίνεται μόνο ε





...ολικές) $\quad T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

: $\quad -mgr\cos\theta$

...ριο, δυναμικό $\frac{1}{2}k(r-\ell)^2$

...ατηρίου λαμβάνεται παντα θετικό

$\frac{1}{2}k(r-\ell)^2$

$...\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-\ell)^2$

...κή συντηρητικές δυνάμεις τό $\delta W_{ολικό} = 0$

...$ngr\cos\theta$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0 \qquad (5.1.2.)$$

Συντεταγμένη - r

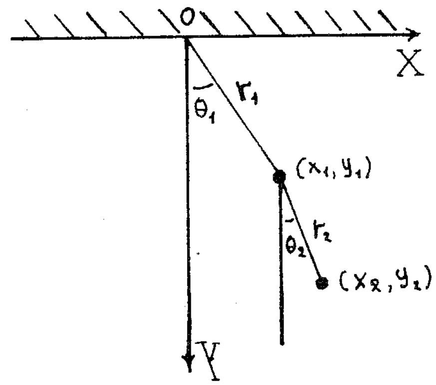
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + k(\ell - r)$$

Άρα: $\quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}r - g\cos\theta - \frac{k\ell}{m} = 0 \quad (5.1.3.)$

Παράδειγμα Εξ. Euler-Lagrange (Τό διπλό εκκρεμές)

Δύο εκκρεμή ΟΑ, ΑΒ είναι συζευγμένα όπως στό σχήμα. Τά νήματα τών εκκρεμών είναι ελαστικά φυσικού μήκους καί σταθεράς (ℓ_1, k_1) καί (ℓ_2, k_2) αντιστοίχως. Νά βρεθούν οί εξισώσεις κινήσεως υποτιθεμένου ότι ή κίνηση γίνεται μόνο στό κατακόρυφο επίπεδο.



Λύση:

Βαθμοί Ἐλευθερίας $\left.\begin{array}{l}\text{Γιά τό } OA \; : \; 2 \\ \text{Γιά τό } AB \; : \; 2\end{array}\right\}$ σύνολο : 4

Γενικευμένες συντεταγμένες: $r_1, \theta_1 \;;\; r_2, \theta_2$

Ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r_1 \sin\theta_1 \\ y_1 = r_1 \cos\theta_1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2 \\ y_2 = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 \end{array}\right\}$$

Ταχύτητα τοῦ A:

$$\dot{x}_1 = \dot{r}_1 \sin\theta_1 + r_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$

$$\dot{y}_1 = \dot{r}_1 \cos\theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

Ἄρα: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2)$

Ταχύτητα τοῦ B:

$$\dot{x}_2 = \dot{r}_1 \sin\theta_1 + r_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \dot{r}_2 \sin\theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

$$\dot{y}_2 = \dot{r}_1 \cos\theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \dot{r}_2 \cos\theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

Ἄρα: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \rightarrow$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2 + \dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{r}_1 \dot{r}_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \right.$$
$$\left. + r_1 \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Ἡ ὁλική Κινητική Ἐνέργεια:

$$T = \quad T_2 \rightarrow$$

Δυνάμεις:

(i) Βάρος : $U_1 = m g r_1 \cos$

(ii) Τάσεις νημάτων: $\frac{1}{2} k_1$

Ὁλικό δυναμικό: $m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2 + \frac{1}{2}$

Lagrangian: $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}_2^2 +$$
$$+ \dot{r}_1 r_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + r_1 \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta$$
$$- \frac{1}{2} k_2 (r_2 - \ell_2)^2 - \frac{1}{2} k_1 (r_1 - \ell_1)^2$$

Βρίσκομε τίς ἐξισώσεις κίνησης. ἑπομένως τό δεξιό μέρος τῶν ἐξι

r_1 - συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = (m_1 + m_2)\dot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{r}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \right.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \left[\ddot{r}_2 \cos(\theta\right.$$
$$+ r_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \dot{r}_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = (m_1 + m_2) r_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta\right.$$

$\left.\begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array}\right\}$ σύνολο : 4

$,\theta_1 \; : \; r_2, \theta_2$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2 \\ y_2 = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 \end{array}\right\}$$

$os\theta_1$

$n\theta_1$

$= \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2)$

$\theta_1 + \dot{r}_2 \sin\theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$

$\theta_1 + \dot{r}_2 \cos\theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2$

$\rightarrow$

$\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{r}_1 r_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) +$

$\theta_1) + r_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$

:

$+ r_2^2 \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_2 [(r_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) +$

$+ r_1 \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)]$

(i) Βάρος : $V_1 = m_1 g r_1 \cos\theta_1$, $V_2 = m_2 g (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)$

(ii) Τάσεις νημάτων : $\frac{1}{2} k_1 (r_1 - \ell_1)^2$, $\frac{1}{2} k_2 (r_2 - \ell_2)^2$

Ολικό δυναμικό: $m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2 + \frac{1}{2} k_1 (r_1 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (r_2 - \ell_2)^2$

Lagrangian: $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_2 [(r_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) +$$
$$+ \dot{r}_1 r_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + r_1 \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)] - m_1 g r_1 \cos\theta_1 - m_2 g (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)$$
$$- \frac{1}{2} k_2 (r_2 - \ell_2)^2 - \frac{1}{2} k_1 (r_1 - \ell_1)^2$$

Βρίσκομε τίς εξισώσεις κίνησης. Μή συντηρητικές δυνάμεις δέν υπάρχουν επομένως τό δεξιό μέρος τών εξισώσεων Lagrange είναι ίσο μέ μηδέν ($F_{q_i} = 0$)

r_1 - συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = (m_1 + m_2)\dot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{r}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + r_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 [\ddot{r}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{r}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{r}_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) +$$
$$+ r_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + r_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = (m_1 + m_2) r_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)] - (m_1 + m_2) g \cos\theta_1 - k_1 (r_1 - \ell_1)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \ddot{r}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{r}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{r}_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) +$$
$$+ r_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + r_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) - (m_1 + m_2) r_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_1 + m_2) g \cos\theta_1 +$$
$$+ k_1 (r_1 - \ell_1) - \frac{1}{2} m_2 [r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)] = 0$$

Ἀνάλογα ἐργαζόμενοι βρίσκομε καί τίς τρεῖς ἄλλες ἐξισώσεις κίνησης

Σημείωση:

Ἐάν τά μήκη τῶν εὐκρεμῶν θεωρηθοῦν ἄκαμπτα τότε ἔχομε 2 βαθμούς ἐλευθερίας τούς θ_1, θ_2 $(r_1 = l_1,\ r_2 = l_2)$ καί ἡ Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot\theta_1^2 + l_2^2 \dot\theta_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] -$$
$$- m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g (l_2 \cos\theta_2 + l_1 \cos\theta_1)$$

Οἱ ἐξισώσεις κίνησης στήν περίπτωση αὐτή λαμβάνουν τήν τελική μορφή:

$$(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot\theta^2 \sin(\theta_1-\theta_2) = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1$$

$$m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1^2 \sin(\theta_1-\theta_2) = - m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

5.1.3. Παράδειγμα.

Σωμάτιο μάζης m κινεῖται ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητας κατά μῆκος λείας ράβδου μήκους l, κεκλιμένης κατά γωνία α ὡς πρός τήν κατακόρυφο, και περιστρεφομένης γύρω ἀπό σταθερό κατακόρυφο

τό σωμάτιο τό ἄκρο Β. ἀ

ἀπό τό σημεῖο Α.

Λύση:

Βαθμοί Ἐλευθερίας : 1

Γενικευμένη συντεταγμένη: r

Σέ σφαιρικές συντεταγμένες μέ

$T = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \sin^2$

Δυνάμεις: Βαρύτης : δυναμ

Ἡ ἐξίσωση Lagrange εἶναι: $\ddot r$

ἤ $(D^2 - \sin^2\alpha\,\omega^2) r = -$

Οἱ ρίζες τῆς ὁμογενοῦς εἶναι

$r = C_1 e^{\omega \sin\alpha t} + C_2 e$

Παράδειγμα

Δίνεται η Λαγκρανζιανή: $L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2 + \omega^2\rho^2\dot\phi\right)$

α) Ποιά είναι η χαμιλτονιανή του προβλήματος;

β) Νά δείξετε ότι δύο από τίς γενικευμένες ορμές τοῦ προβλήματος είναι σταθερές καί νά εξετάσετε άν διατηρείται ή ενέργεια.

γ) Χρησιμοποιώντας τή διατήρηση τής ενέργειας νά εκφράσετε τήν τρίτη γενικευμένη ορμή σάν συνάρτηση τοῦ ρ.

(Δ' Μαθ Νοεμ 78 – Β' Φυσ. Ιαν. 79)

Λύση:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2 + \omega^2\rho^2\dot\phi\right)$$

Προφανώς σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχωμε

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2\right), \qquad V = -\frac{m}{2}\omega^2\rho^2\dot\phi$$

Οι συντεταγμένες z, ϕ είναι κυκλικές άρα: P_ϕ, P_z είναι σταθερές

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial\dot\rho} = m\dot\rho \Rightarrow \dot\rho = \frac{P_\rho}{m}$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = m\rho^2\dot\phi + \frac{\omega^2\rho^2 m}{2} \Rightarrow \dot\phi = \frac{P_\phi}{m\rho^2} - \frac{\omega^2}{2}$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial\dot z} = m\dot z \Rightarrow \dot z = \frac{P_z}{m}$$

Άρα: $$L = \frac{m}{2}\left[\frac{P_\rho^2}{m^2} + \rho^2\left(\frac{P_\phi}{m\rho^2} - \frac{\omega^2}{2}\right)^2 + \frac{P_z^2}{m} + \omega^2\rho^2\left(\frac{P_\phi}{m\rho^2} - \frac{\omega^2}{2}\right)\right]$$

$$\rightarrow L = \frac{P_\rho^2 + P_z^2}{2m} + \frac{m}{2}\rho^2\left(\frac{P_\phi}{m\rho^2} - \frac{\omega^2}{2}\right)\left[\frac{P_\phi}{m\rho^2} - \frac{\omega^2}{2} + \omega^2\right]$$

$$\rightarrow L = \frac{P_\rho^2 + P_z^2}{2m} + \frac{m}{2}\rho^2\left(\frac{P_\phi}{m\rho^2} - \frac{\omega^2}{2}\right)\left(\frac{P_\phi}{m\rho^2} + \frac{\omega^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{P_\rho^2+P_z^2}{2m} + \frac{m}{2}\rho^2\left[\frac{P_\phi^2}{m^2\rho^4} - \frac{\omega^4}{4}\right]$$

$$\therefore \quad H = \frac{P_\rho^2+P_z^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} - \frac{m\omega^4\rho^2}{8}$$

Δέν ὑπάρχουν κινούμενοι σύνδεσμοι καί οἱ δυνάμεις εἶναι συντηρητικές ἄρα ἡ ὁλική ἐνέργεια E εἶναι ἴση μέ τήν Hamiltonian δηλ. $H = T+V$

Ἡ

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2m}\,2\dot P_\rho P_\rho - \frac{P_\phi^2}{2m}\,\frac{2\dot\rho}{\rho^3} - \frac{2m\omega^4}{8}\rho\dot\rho = \frac{1}{m}P_\rho \dot P_\rho - \frac{P_\phi^2}{m\rho^3}\dot\rho - \frac{m\omega^4}{4}\rho\dot\rho$$

Ἀλλά

$$\dot P_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\left[\frac{P_\phi^2}{2m} - \frac{2}{\rho^3} - \frac{2m\omega^4}{8}\rho\right] = +\frac{P_\phi^2}{2m\rho^3} - \frac{m\rho\omega^4}{4}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{m}\dot P_\rho m\left(\frac{P_\phi^2}{2m\rho^3} - \frac{m\rho\omega^4}{4}\right) - \frac{P_\phi^2\dot\rho}{m\rho^3} - \frac{m\omega^4}{4}\rho\dot\rho = 0$$

Ἄρα $H = \sigma\tau\alpha\theta = E$

Δηλαδή ἡ ὁλική ἐνέργεια διατηρεῖται.

γ) Ἔχομε τώρα

$$E = \frac{P_\rho^2+P_z^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} - \frac{m\omega^4\rho^2}{8}$$

$$\Rightarrow P_\rho^2 = 2m\left[E - \frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} + \frac{m\omega^4\rho^2}{8}\right] - P_z^2$$

6.1.7. Παράδειγμα

Ἡ Lagrangian γιὰ ἕνα σωμάτιο ποὺ κινεῖται στὸ χῶρο μπορεῖ νὰ ἐκφρασθεῖ σὲ ἐπίπεδες πολικὲς συντεταγμένες ὡς ἑξῆς

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 - 2\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)\right\}$$

ὅπου μ, a εἶναι σταθερές. Νὰ βρεῖτε τὴν Hamiltonian τοῦ συστήματος καὶ νὰ δείξετε ὅτι μία ἀπὸ τὶς γενικευμένες ὁρμὲς εἶναι σταθερή. Νὰ ἐκφράσετε τὴν ἄλλη γενικευμένη ὁρμὴ σὰν συνάρτηση τοῦ ρ.

Λύση: (Δ΄ Μαθ. - Νοεμ. 73)

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 - 2\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)\right\}$$

Βαθμοὶ ἐλευθερίας: 2.

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m}, \quad P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{m\rho^2}$$

Ἔτσι: $H = P_\rho\dot{\rho} + P_\phi\dot{\phi} - L \rightarrow H = \frac{P_\rho^2}{m} + \frac{P_\phi^2}{m\rho^2} - L$

Ἡ Lagrangian

$$L = \frac{m}{2}\left\{\frac{P_\rho^2}{m^2} + \rho^2\frac{P_\phi^2}{m^2\rho^4} - 2\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)\right\} = \frac{P_\rho^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} - m\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)$$

Τελικά $$H = \frac{P_\rho^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} + m\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ϕ εἶναι κυκλική. Ἄρα $P_\phi = \text{σταθ} = K$

Ἡ Hamiltonian εἶναι σταθερὰ (ἡ ὁλική ἐνέργεια) γιατί τὸ σύστημα εἶναι ὁλόνομο καὶ σκληρόνομο. Ἔστω $H = E$

Τότε $$E = \frac{P_\rho^2}{2m} + \frac{K^2}{2m\rho^2} + m\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow P_\rho^2 = 2m\left[E - \frac{k^2}{2m\rho^2} - m\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)\right]$$

Παρατήρηση

Ἡ ϕ εἶναι κυκλική ἄρα P_ϕ = σταθερά. Ἡ ὁλική ἐνέργεια E διατηρεῖται. Προφανῶς $V = m\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)$ ἄρα

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2\right) + m\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho}\right)$$

Ἄρα $\quad P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = m\dot\rho \quad , \quad P_\phi = k = \frac{m\dot\phi}{\rho^2}$

καί $\quad E = \frac{m}{2}\left(\frac{P_\rho^2}{m^2} + \frac{k^2}{m\rho^2}\right) + m\mu\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\rho}\right)$

$$\Longrightarrow P_\rho^2 = 2m\left[E - \frac{k^2}{2m\rho^2} - \mu m\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\rho}\right)\right]$$

...

6.1.8. Παράδειγμα.

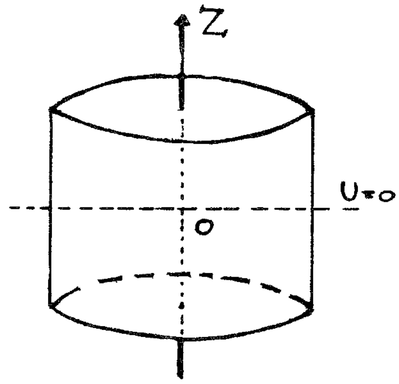
Σωματίδιο εἶναι ὑποχρεωμένο νά κινεῖται, χωρίς τριβή, πάνω στήν ἐπιφάνεια κυλίνδρου ἀκτίνας R. Τό σωματίδιο ὑπόκειται σέ ἐλκτική δύναμη τῆς μορφῆς $\vec{F} = -m\Omega^2\vec{r}$ ὅπου τό ἐλκτικό κέντρο βρίσκεται στόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Στό σωματίδιο (θεωρούμενο ἐκτός πεδίου βαρύτητος) ἀσκεῖται καί ἡ δύναμη $\vec{f} = \vec{f_0}\exp(-\lambda t)$ $\lambda > 0$ παράλληλα πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Ἄν οἱ ἀρχικές συνθῆκες τοῦ συστήματος σέ κυλινδρικές συντεταγμένες εἶναι:

$$\varphi(0) = 0, \quad z(0) = \dot z(0) = 0$$

Βρεῖτε τήν χρονική ἐξέλιξη τῶν ~~βαθμῶν ἐλευθερίας τοῦ συστήματος καί δῶστε~~ κάποια ἐποπτική περιγραφή. Βρεῖτε τήν Hamiltonian τοῦ συστήματος καί ἐξετάσετε κατά πόσον εἶναι σταθερά τῆς κίνησης

(Β' Φυσ. Νοε/ 78)

Λύση:



Έστω O τό ἑλκτικό κέντρο, $\vec{f}_{f_0} = f_0 \hat{e}_z$ Τότε

συνισταμένη $\vec{F} + \vec{f} = -m\omega^2 r + f_0 e^{-\lambda t} \cdot \hat{e}_z$

$$\vec{F} + \vec{f} = -m\omega^2 (R\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z) + f_0 e^{-\lambda t} \hat{e}_z$$

$$\vec{F} + \vec{f} = -m\omega^2 R \hat{e}_\rho + (-m\omega^2 z + f_0 e^{-\lambda t}) \hat{e}_z$$

Ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι σέ κυλινδρικές συντεταγμένες (μέ $\dot{\rho}=0$)

$$\vec{a} = (-R\dot{\phi}^2)\hat{e}_\phi + (R\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

Ὁ δεύτερος νόμος τοῦ Νεύτωνα δίνει:

(α) συντεταγμένη-φ $\quad R\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = σταθ$

$$-R\dot{\phi}^2 = -m\omega^2 \Rightarrow \dot{\phi} = \sqrt{\frac{m}{R}}\,\omega$$

ἄρα: $\quad \phi = \phi(0) + \sqrt{\frac{m}{R}}\,\omega t = \sqrt{\frac{m}{R}}\,\omega t$

(β) συντεταγμένη-z $\quad m\ddot{z} = -m\omega^2 z + f_0 e^{-\lambda t}$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{f_0}{m} e^{-\lambda t}$$

Ἡ λύση τῆς ὁμογενοῦς εἶναι $z = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

Μία μερική λύση αὐτῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$z_{μερ} = Ae^{-\lambda t}$ ὅπου A εἶναι μία σταθερά

Βρίσκομε $\ddot{z}_{\mu\varepsilon\rho} = A\lambda^2 e^{-\lambda t}$

άρα ή δίνει $A\lambda^2 e^{-\lambda t} + \varrho^2 A e^{-\lambda t} = \frac{f_0}{m} e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{f_0}{m(\lambda^2 + \varrho^2)}$$

Άρα ή γενική λύση:

$$z = c_1 \cos\varrho t + c_2 \sin\varrho t + \frac{f_0 e^{-\lambda t}}{m(\lambda^2+\varrho^2)}$$

Αρχική συνθήκη: $z(0) = 0$ δίνει

$$0 = c_1 + \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} \Rightarrow c_1 = -\frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)}$$

Παραγωγίζομε

$$\dot{z} = -c_1 \varrho \sin\varrho t + c_2 \varrho \cos\varrho t - \frac{\lambda f_0 e^{-\lambda t}}{m(\lambda^2+\varrho^2)}$$

Η αρχική συνθήκη $\dot{z}(0)=0$ δίνει

$$0 = c_2 \varrho - \frac{\lambda f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} \Rightarrow c_2 = \frac{\lambda f_0}{m\varrho(\lambda^2+\varrho^2)}$$

$(\mu\dot{\varepsilon}\dot{\rho}=0)$

Άρα $$z(t) = \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} - \left[\cos\varrho t + \frac{\lambda}{\varrho}\sin\varrho t\right] + \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} e^{-\lambda t}$$

Ορίζομε μία γωνία ψ από

$$\tan\psi = \frac{\lambda}{\varrho} \Rightarrow \psi = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)$$

Άρα έχομε:

$$z(t) = \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)}\left(\cos\varrho t + \frac{\sin\psi}{\cos\psi}\sin\varrho t\right) + \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)\cos\psi}\cos(\varrho t - \psi) + \frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} e^{-\lambda t}$$

$\varrho t + c_2 \sin\varrho t$

Τό $z(t)$ είναι λοιπόν σύνθεση δύο κινήσεων Μιας απλής αρμονικής

κι μία σταθερά

πλάτους $\frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)\cos\psi}$ καί συχνότητος ϱ καί μίας φθινούσης κίνησης

$\frac{f_0}{m(\lambda^2+\varrho^2)} e^{-\lambda t}$ ή όποία γιά $t \to \infty$ τείνει στό μηδέν

Γιά νά βροῦμε τήν Hamiltonian πρῶτα βρίσκομε τήν Lagrangian.

Ἡ δύναμη $\vec{F} = -m\varrho^2\vec{r}$ δίδεται ἀπό δυναμικό $U_1 = -\int \vec{F} d\vec{r} = \frac{1}{2} m \varrho^2 r^2$

Ἡ δύναμη $\vec{f} = \vec{f_0} e^{-\lambda t}$ δίδεται ἀπό δυναμικό $U_2 = -\int \vec{f_0}\, d\vec{r}\, e^{-\lambda t} \Rightarrow$

$$U_2 = -\int f_0\, \hat{e}_z\, d\vec{r}\, e^{-\lambda t} = -f_0 z e^{-\lambda t}$$

Ἄρα $L = T - V_1 - V_2 = \frac{1}{2} m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} m\varrho^2 r^2 + f_0 z e^{-\lambda t}$

$$= \frac{1}{2} m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2} m\varrho^2\left(R^2 + z^2\right) - f_0 z e^{-\lambda t}$$

Ὡς γνωστόν $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = f_0 z e^{-\lambda t}$ Ἄρα ή H δέν εἶναι σταθερά τῆ κίνησης

Συνεπῶς ἀκολουθοῦμε τό FORMAT τῆς σελίδος (6-5)

Οἱ γενικευμένες ὁρμές:

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mR^2}$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{P_z}{m}$$

Ἀντικαθιστοῦμε στήν Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m\left(R^2 \frac{P_\phi^2}{m^2R^4} + \frac{P_z^2}{m^2}\right) - \frac{1}{2} m\varrho^2\left(R^2 + z^2\right) - f_0 z e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$L = \frac{P_\phi^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} - \frac{1}{2} m\varrho^2(R^2+z^2) - f_0 z e^{-\lambda t}$$

Η Hamiltonian:

$$H = P_\phi \dot{\phi} - P_z \dot{z} - L$$

$$\Rightarrow H = \frac{P_\phi^2}{mR^2} + \frac{P_z^2}{m} - \frac{P_\phi^2}{2mR^2} - \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \underline{\Omega}^2 (R^2+z^2) + f_0 z e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow H = \frac{P_\phi^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \underline{\Omega}^2 (R^2+z^2) + f_0 z e^{-\lambda t}$$

Σημείωση: Μπορούμε νά βρούμε τίς εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τη Lagrangian. Βρίσκομε:

φ-συντεταγμένη $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} = σταθ = \ell$ (γιατί η φ είναι κυκλική)

$\Rightarrow \dot{\phi} = \omega \Rightarrow \phi = \omega t$ (διατί $\phi(0) = 0$)

z-συντεταγμένη $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

$\frac{\partial L}{\partial z} = -m \underline{\Omega}^2 z + f_0 e^{-\lambda t}$

$\therefore \quad m\ddot{z} = -m \underline{\Omega}^2 z + f_0 e^{-\lambda t}$

$\ddot{z} + \underline{\Omega}^2 z = \frac{f_0}{m} e^{-\lambda t}$

Προβλήματα και Θέματα

Τμήμα Μ.Π.Ε.Σ., Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χειμερινό εξάμηνο 2010-2011

Μάθημα: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Υπεύθυνος Μαθήματος: Σπύρος Κωτσάκης, Καθηγητής

Προβλήματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

1. Περιγράψτε συνοπτικά τα διάφορα στάδια της μαθηματικής μοντελοποίησης.

2. Για δύο τυχόντα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ του γραμμικού χώρου $\mathbb{V}_n$, αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία αυτής της ανισότητας;

3. Υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (1, 1, -2)$.

4. Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (1, -3, 4), \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

5. Υπολογίστε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (1, 1, -2), \mathbf{c} = (1, -3, 4)$.

6. Βρείτε την ευθεία που περνά από τα σημεία $\mathbf{P}_1 = (1, 1, 1)$ και $\mathbf{P}_2 = (-2, 1, -3)$. Εξηγείστε γιατί τα σημεία $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ και $\mathbf{P}_3 = (3, -2, 4)$ δεν μπορεί να είναι συνευθειακά.

7. Εξηγείστε τους όρους: Νευτώνεια αιτιότητα, χώρος ταυτόχρονων γεγονότων, αδρανειακό σύστημα αναφοράς, χώρος καταστάσεων.

8. Πόσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας ενός υλικού σημείου που κινείται στο επίπεδο; Στον χώρο; Δύο υλικών σημείων στον χώρο; Τριών υλικών σημείων στον χώρο έτσι ώστε οι μεταξύ τους αποστάσεις να είναι σταθερές;

9. Σχεδιάστε το διπλό εκκρεμές, με μηδέν, ένα και δύο ελατήρια αντίστοιχα, και προσδιορίστε τους χώρους καταστάσεων και βαθμούς ελευθερίας των τριών αυτών συστημάτων.

10. Εξηγείστε τους όρους: Παραμετρική εξίσωση καμπύλης, εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης, εφαπτομένη καμπύλης του ευκλείδειου χώρου. Δώστε ένα παράδειγμα για κάθε μια από τις παραπάνω έννοιες.

11. Αιτιολογείστε την μορφή του γραμμικού στοιχείου του $\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιώντας τον μετρικό τανυστή, $g_{ab} : ds^2 = \sum_{a,b=1}^{n} g_{ab} x_a x_b$. Ποιές είναι οι αντίστοιχες μορφές που παίρνει ο g_{ab} στο επίπεδο όταν χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες ή πολικές συντεταγμένες;

12. Γράψτε την πολική ανάλυση του διανύσματος της ταχύτητας στο επίπεδο. Πλήρης αιτιολόγηση.

13. Ορίσατε τις σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, ϕ, και τις κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, z του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου. Ποιές είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της σφαίρας; Τι σημαίνει η εξίσωση $\theta = c$, όπου c μια σταθερά, σε κυλινδρικές και τι σε σφαιρικές συντεταγμένες;

14. Σχεδιάστε το γράφημα της καμπύλης που δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{f}(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

15. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2},$$

δεν υπάρχει.

16. Εξηγείστε γιατί η παράγωγος $\nabla f(\mathbf{x})$, της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δείχνει πάντοτε προς την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f.

17. Βρείτε το ∇f, όταν $f = e^{xy^2}$, και όταν $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

18. Βρείτε το df για τις συναρτήσεις: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, και $f(x,y) = \arctan y/x$. (Εφαρμόστε την σχετική θεωρία.)

19. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = xy^2 + e^{xy}$.

20. (Πεπλεγμένη Παραγώγιση.) Θεωρώντας το y σαν συνάρτηση του x, υπολογίστε την παράγωγο dy/dx από την ακόλουθη έκφραση: $xe^y + 3y = 0$. (Παραδείγματος χάριν, αν $x^2 + y^2 - 4 = 0$, τότε $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, και άρα $dy/dx = -x/y$.)

21. Αποδείξτε ότι αν $U(x)$ είναι η δυναμική ενέργεια βαρύτητας και $x_1 < x_2$, τότε $U(x_1) < U(x_2)$.

22. Διατυπώστε και αποδείξτε τα θεωρήματα διατήρησης της ορμής, της στροφορμής και της ενέργειας για ένα σύστημα σωματιδίων στην νευτώνεια θεωρία.

23. Διατυπώστε τους ορισμούς του ορίου και της συνέχειας για συναρτήσεις με τιμές πίνακες.

24. Βρείτε την παράγωγο και το διαφορικό της συνάρτησης $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, y + z)$.

25. Από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} xyu - yv^2 + x^2 &= 0 \\ 4u^2 + 2v^2 - x^3 y &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

καθορίστε τις παραγώγους: $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$, και $\partial v/\partial x, \partial v/\partial y$, καθώς και τις: $\partial x/\partial u, \partial x/\partial v$, και $\partial y/\partial u, \partial y/\partial v$.

26. Αποδείξτε ότι κάθε κεντρικό πεδίο είναι συντηρητικό.

27. Βρείτε πώς διαμορφώνονται οι εξισώσεις του Νεύτωνος για την περίπτωση της κεντρικής κίνησης.

28. Αποδείξτε ότι χρησιμοποιώντας την έκφραση της ενεργούς δυναμικής ενέργειας, το πρόβλημα της κεντρικής κίνησης γίνεται μονοδιάστατο.

29. Περιγράψτε τα διάφορα είδη ενέργειας στην κεντρική κίνηση: Ολική, πραγματική δυναμική, ενεργός δυναμική, κεντρομόλος δυναμική ενέργεια, και βρείτε την σχέση μεταξύ τους.

30. Αποδείξτε ότι ο χρόνος που περνά ένας δορυφόρος του Ήλιου με πολύ επιμήκη τροχιά στις απομακρυσμένες περιοχές της τροχιάς του είναι μεγαλύτερος από αυτόν που περνά κοντά στον Ήλιο.

31. Περιγράψτε τις κωνικές τομές μέσω πολικών συντεταγμένων.

32. Διατυπώστε το πρόβλημα του Kepler και εξηγείστε γιατί όλες οι τροχιές είναι κατ' ανάγκη κωνικές τομές (Bernoulli (1710)).

33. Διατυπώστε την συνθήκη για την ευστάθεια των κυκλικών τροχιών στο πρόβλημα του Kepler.

34. Εξηγείστε με ποιά έννοια μπορούμε να πούμε ότι η νευτώνεια μηχανική είναι υποσύνολο της μηχανικής Lagrange.

35. Αποδείξτε ότι αν ο χρόνος είναι αγνοήσιμη μεταβλητή, τότε η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

36. Βρείτε την λαγκρανζιανή του απλού εκκρεμούς καθώς και τις εξισώσεις κίνησης.

37. Διατυπώστε και μελετείστε πλήρως μέσω των αναλυτικών μεθόδων της δυναμικής Lagrange ένα πιο περίπλοκο σύστημα, ανάλογο με εκείνα που δίνονται στις σημειώσεις του μαθήματος.

Παλαιότερα θέματα εξετάσεων εφαρμοσμένων μαθηματικών

1. Διατυπώστε με ακρίβεια πότε ένα k-επίπεδο στον n-διάστατο χώρο είναι παράλληλο με ένα l-επίπεδο, $k \leq l < n$. Ποιές είναι οι δυνατές θέσεις δύο τέτοιων επιπέδων;

2. Αποδείξτε με μεθόδους του λογισμού καμπυλών ότι η ακτίνα του κύκλου $\mathcal{C}(\mathbf{P_0}; \mathbf{r})$ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη $\mathbf{f}'(\mathbf{t})$ στο σημείο όπου καταλήγει αυτή η ακτίνα.

3. Αν I_1 είναι η προβολή στο $\mathbb{R}^2$, αποδείξτε ότι $\nabla I_1 = (1, 0)$.

4. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου κατεύθυνσης, υπολογίστε την $\nabla_{\mathbf{u}} f$ όταν $f(x, y) = x^2 y$, $\mathbf{u} = (1, 0)$.

5. Βρείτε την παράγωγο και το διαφορικό της συνάρτησης $\mathbf{f} = (x/y, 2y + 1, xz^2)$.

6. Αν $\mathbf{c} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, αποδείξτε ότι η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

7. Αν $u = F(x - y, y - z, z - x)$, αποδείξτε ότι $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y + \partial u/\partial z = 0$.

8. Βρείτε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $F = f \circ \mathbf{g}$, όταν $\mathbf{g} = (u \cos v, u \sin v, 3u^2)$ και $f(x, y, z) = (xy - z)/(yz)$.

9. Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{V}_n$ με $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Βρείτε την σχέση της ορθογώνιας προβολής του $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{b}$, $\pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$, με την συνιστώσα του $\mathbf{a}$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{b}$, $\sigma_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$. Πλήρης αιτιολόγηση.

10. Έστω $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_r$ μη-μηδενικά διανύσματα, αμοιβαία ορθογώνια, δηλ., $\mathrm{a}_i \cdot \mathrm{a}_j = 0$, αν $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$. Αν $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_r$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $\mathrm{c}_1\mathrm{a}_1 + \ldots \mathrm{c}_r\mathrm{a}_r = \mathbf{0}$, αποδείξτε ότι όλα τα $\mathrm{c}_i = 0$.

11. Αποδείξτε ότι τρία γραμμικά εξαρτημένα διανυσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ στον $\mathbb{V}_3$ είναι παράλληλα στο ίδιο επίπεδο.

12. Αν $\mathbf{n}$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $\mathcal{P} = \{\mathbf{P_0} + \mathbf{ua} + \mathbf{vb} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}\}$, τότε
$$\mathcal{P} = \{\mathbf{P} : \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P_0}) = \mathbf{0}\},$$
και επιπλέον το $\mathcal{P}$ είναι το μοναδικό επίπεδο που διέρχεται από το $\mathbf{P_0}$ με κάθετο $\mathbf{n}$.

25. Διατυπώστε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στην τοπολογική μορφή του για μια απεικόνιση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και εξηγείστε τι σημαίνει αυτή η διατύπωση για την περίπτωση $n = m = 1$.

26. Αν

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x & x^2 - 1 & 4 \\ x + 1 & x^3 & x^2 \\ 2x^2 & x - 4 & x \end{pmatrix}, \tag{2}$$

βρείτε το $\lim_{x\to 2} F(x)$. Διατυπώστε το θεώρημα το οποίο θα χρησιμοποιήσετε.

27. Βρείτε την παράγωγο και το διαφορικό της συνάρτησης $\mathbf{f} = (x/y, 2y + 1, xz^2)$.

28. Αν $\mathbf{c} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, αποδείξτε ότι η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

29. Αν $u = F(x - y, y - z, z - x)$, αποδείξτε ότι $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y + \partial u/\partial z = 0$.

30. Βρείτε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $F = f \circ \mathbf{g}$, όταν $\mathbf{g} = (u \cos v, u \sin v, 3u^2)$ και $f(x, y, z) = (xy - z)/(yz)$.

31. Υποθέτοντας ότι οι εξισώσεις

$$x^2 + yu + 2z - v^2 = 0, \quad xv + y^2 + 3zu^2 - 5 = 0,$$

λύνονται ως προς u, v σε συνάρτηση των x, y, z, βρείτε τις $\partial u/\partial x$ και $\partial v/\partial x$.

32. Αν η επιφάνεια $\mathcal{S}$ είναι το υπερβολικό παραβολοειδές με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = v\cos u,\ y = v \sin u,\ z = v^2 \cos 2u, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \infty), \tag{3}$$

βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathcal{S}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.