



Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Οικονομική του Χώρου

Ενότητα: Διάλεξη Δέκατη

Κορρές Γεώργιος

Τμήμα Γεωγραφίας

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

1. Σκοποί ενότητας.....	4
2. Περιεχόμενα ενότητας	4
2.1.1 Διάλεξη Δέκατη.....	4
2.1.1.1 Διάφορες Μορφές Συναρτήσεων Παλινδρόμησης.....	4
2.1.1.1.1 Παράδειγμα 2:.....	4
2.1.1.1.2 Παράδειγμα 3:.....	8
2.1.1.1.3 Παράδειγμα 4:.....	11
2.1.1.1.4 Παράδειγμα 5:.....	13
2.1.1.1.5 ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΣΤΕ	15
2.1.1.2 Μέτρα αξιολόγησης της ερμηνευτικής ικανότητας της εξίσωσης παλινδρόμησης	15

1. Σκοποί ενότητας

2. Περιεχόμενα ενότητας

2.1.1 Διάλεξη Δέκατη

2.1.1.1 Διάφορες Μορφές Συναρτήσεων Παλινδρόμησης

Η γραμμική συνάρτηση $\bar{Y} = \alpha + \beta X$ είναι απλή στους υπολογισμούς των συντελεστών α και β και προτιμάται στις εφαρμογές της ανάλυσης παλινδρόμησης. Επίσης, πολλές μεταβλητές στα οικονομικά συνδέονται με γραμμική σχέση. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντοτε. Σε πολλές περιπτώσεις στα εκ παρατηρήσεως δεδομένα δύο μεταβλητών είναι πιθανό να εφαρμόζεται καλύτερα άλλης μορφής συνάρτηση, όπως είναι η παραβολή ή πολυώνυμο 2ου βαθμού με συνάρτηση: $\bar{Y} = \alpha + \beta X + \gamma X^2$,

η εκθετική με συνάρτηση $\bar{Y} = \alpha \cdot \beta^X$ κλπ.

Για την επιλογή της κάθε φορά πιο κατάλληλης συνάρτησης, μια πρώτη ένδειξη, όπως ήδη έχει λεχθεί, δίνεται από τη γραφική απεικόνιση του νέφους, των σημείων που προκύπτουν από τα ζεύγη των εκ παρατηρήσεως τιμών των υπό εξέταση μεταβλητών X και Y . Εκτός της παραπάνω μεθόδου, υπάρχουν και άλλα κριτήρια τα οποία δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την επιλογή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης. Στη συνέχεια δίνονται τα κριτήρια αυτά για ορισμένες βασικές εξισώσεις.

- Για την επιλογή της γραμμικής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών απαιτείται οι τιμές της X και Y να μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο έστω και προσεγγιστικά, ή οι πρώτες διαφορές της $X(\Delta X)$ και της $Y(\Delta Y)$ να είναι σταθερές.
- Το πολυώνυμο 2ου βαθμού επιλέγεται όταν οι τιμές της X μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο (οι πρώτες διαφορές είναι σταθερές) και οι δεύτερες διαφορές της $Y(\Delta^2 Y)$ είναι σταθερές, έστω και προσεγγιστικά.
- Η εκθετική επιλέγεται όταν οι τιμές της X μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο (οι πρώτες διαφορές είναι ίσες) και η Y κατά πρόοδο γεωμετρική ή οι λογάριθμοι της Y μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο (οι πρώτες διαφορές είναι σταθερές) έστω και προσεγγιστικά.

2.1.1.1.1 Παράδειγμα 2:

Δίνονται πιο κάτω οι προσφερόμενες ποσότητες σε χιλ. τεμάχια (Y_i), και οι αντίστοιχες τιμές σε χιλ. νομ. μονάδες (X_i) τριών προϊόντων Α, Β, Γ. Να επιλεγεί η κατάλληλη εξίσωση παλινδρόμησης για το προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών για κάθε ένα προϊόν.

ΠΡΟΪΟΝ Α		ΠΡΟΪΟΝ Β		ΠΡΟΪΟΝ Γ	
X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3
10	45	3	4	4	1

13	51	6	16	6	6
15	55	10	60	8	12
18	59	14	250	10	20
20	65	17	1000	11	29
22	70	20	4000	12	39

Για τον προϊόν Α: Οι μεταβλητές X και Y παρουσιάζουν περίπου σταθερές πρώτες διαφορές και επομένως η πλέον κατάλληλη εξίσωση είναι η πρωτοβάθμια εξίσωση $\bar{Y}=\alpha+\beta X$. Πράγματι:

X_1	ΔX_1	Y_1	ΔY_1
10		45	
13	13-10=3	51	51-45=6
15	15-13=2	55	55-51=4
18	18-15=3	59	59-55=4
20	20-18=2	65	65-59=6
22	22-20=2	70	70-65=5

Για τον προϊόν Β: Οι τιμές της X παρουσιάζουν περίπου σταθερές πρώτες διαφορές και οι λογάριθμοι της Y, επίσης, παρουσιάζουν περίπου σταθερές πρώτες διαφορές. Επομένως η πλέον κατάλληλη εξίσωση είναι η απλή εκθετική $\bar{Y}=\alpha - \beta^X$.

X_2	ΔX_2	Y_2	λογ. Y_2	$\Delta(\text{λογ. } Y_2)$
3		4	0,60	
6	6-3=3	16	1,20	1,20-0,60=0,60
10	10-6=4	60	1,78	1,78-1,20=0,58
14	14-10=4	250	2,40	2,40-1,78=0,62
17	17-14=3	1000	3,00	3,00-2,40=0,60
20	20-17=3	4000	3,60	3,60-3,00=0,60

Για το προϊόν Γ: Οι τιμές της X παρουσιάζουν περίπου σταθερές πρώτες διαφορές και οι τιμές της Y περίπου σταθερές δεύτερες διαφορές. Επομένως, η πλέον κατάλληλη εξίσωση είναι η δευτεροβάθμια εξίσωση $\bar{Y}=\alpha + \beta X + \gamma X^2$.

X_3	ΔX_3	Y_3	ΔY_3	$\Delta^3 Y_3$
4		1		

6	6-4=2	6	6-1=5	
8	8-6=2	12	12-6=6	6-5=1
10	10-8=2	20	20-12=8	8-6=2
11	11-10=1	29	29-20=9	9-8=1
12	12-11=1	39	39-29=10	10-9=1

Η δευτεροβάθμια εξίσωση παλινδρόμησης (παραβολική)

Ήδη στην προηγούμενη ενότητα έχει γίνει αναφορά στα κριτήρια που πρέπει να χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των τιμών των μεταβλητών X και Y για να εφαρμοστεί η παραβολική εξίσωση:

$$\bar{Y} = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

Για την εύρεση των συντελεστών α, β και γ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης παλινδρόμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, απαιτείται η λύση του ακόλουθου συστήματος κανονικών εξισώσεων:

$$\Sigma Y = n\alpha + \beta \Sigma X + \gamma \Sigma X^2$$

$$\Sigma XY = \alpha \Sigma X + \beta \Sigma X^2 + \gamma \Sigma X^3$$

$$\Sigma X^2 Y = \alpha \Sigma X^2 + \beta \Sigma X^3 + \gamma \Sigma X^4$$

Η Απλή Λογαριθμική (Εκθετική) παλινδρόμηση

Η απλή λογαριθμική (εκθετική) εξίσωση είναι της μορφής:

$$\bar{Y} = \alpha - \beta^X \quad (a)$$

Για την εκτίμηση των α και β λογαριθμούμε την:

$$\log \bar{Y} = \log \alpha + X \log \beta$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (a), αυτή μετατρέπεται σε γραμμική ως εξής:

$$\bar{Y}^* = \alpha^* - \beta^* X \quad (b)$$

Οι παράμετροι α* και β* εκτιμώνται από την (b) με βάση τους γνωστούς τύπους της γραμμικής παλινδρόμησης. Τις τιμές των α και β βρίσκουμε από αυτές των α* και β*:

- ✓ $\log \alpha = \alpha^* \Rightarrow \alpha = 10^{\alpha^*}$ και
- ✓ $\log \beta = \beta^* \Rightarrow \beta = 10^{\beta^*}$

Λοιπές εξισώσεις παλινδρόμησης

Για τη λύση των λοιπών συναρτήσεων εκθετικής ή άλλης μορφής, προσπαθούμε με λογαριθμικούς ή άλλους μετασχηματισμούς, όπως αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν στην απλή λογαριθμική εξίσωση, να τις αναγάγουμε σε γραμμικής μορφής, ώστε να χρησιμοποιούμε τις γνωστές σχέσεις εύρεσης των παραμέτρων α , β , κλπ. Για παράδειγμα, η Διπλή λογαριθμική $\bar{Y} = \alpha X^\beta$ μετατρέπεται στην

$\log \bar{Y} = \log \alpha + \beta \log X$ και η $\bar{Y} = 10^{\alpha + \beta X + \gamma X^2}$ μετατρέπεται στην

$\log \bar{Y} = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση και η χρήση της στην επιχείρηση

Η μέχρι τώρα ανάλυση περιορίστηκε στην υπόθεση ότι η εξαρτημένη μεταβλητή Y εξαρτάται από μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή τη X . Συχνά όμως υπάρχει ανάγκη διερεύνησης της σχέσης μιας εξαρτημένης μεταβλητής από περισσότερες της μία ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Η μαθηματική αυτή σχέση καλείται πολλαπλή παλινδρόμηση, που στη γραμμική της μορφή εκφράζεται ως εξής: $\bar{Y} = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n$

Οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$, καλούνται συντελεστές μερικής παλινδρόμησης. Ο συντελεστής β_1 εκφράζει το ποσό μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η μεταβλητή X_1 μεταβληθεί κατά μία μονάδα, δεδομένου ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές X_2, X_3, \dots, X_n , παραμένουν σταθερές. Με τον ίδιο τρόπο ερμηνεύονται και οι λοιποί συντελεστές της μερικής παλινδρόμησης. Οι εκτιμήσεις των συντελεστών μερικής παλινδρόμησης και πάντα με βάση τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, βρίσκονται από τη λύση συστήματος κανονικών εξισώσεων. Στην περίπτωση της εξίσωσης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές:

$$\bar{Y} = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Αν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τρεις, η εξίσωση είναι της μορφής:

$$\bar{Y} = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$$

Αν και πολλές φορές, μία μόνο μεταβλητή ερμηνεύει μεγάλο μέρος της εξαρτημένης μεταβλητής, η χρήση περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών, δημιουργεί περισσότερο ρεαλιστικά υποδείγματα καθώς στην πραγματικότητα οι σχέσεις των μεγεθών των επιχειρήσεων είναι σύνθετες. Έτσι στο παράδειγμα εύρεσης της σχέσης, σύμφωνα με την οποία ο αριθμός των ανταγωνιστικών καταστημάτων επηρεάζει τα έσοδα των καταστημάτων της επιχείρησης, ίσως είναι περισσότερο ρεαλιστικό να υποθέσουμε, ότι ο αριθμός των πελατών σε κάθε περιοχή που βρίσκονται τα καταστήματα επηρεάζει, επίσης, τα έσοδα.

Ακόμη στη διερεύνηση της σχέσης πωλήσεων και διαφημιστικών δαπανών, είναι ίσως προτιμότερο αντί μιας εξαρτημένης μεταβλητής, να αναλύσουμε τις διαφημιστικές δαπάνες ανάλογα με το μέσο που προβάλλονται (ραδιόφωνο, τηλεόραση, εφημερίδες, περιοδικά, κλπ.) και να διερευνήσουμε την επίδραση κάθε μιας απ' αυτής στα έσοδα της επιχείρησης. Στην περίπτωση που το πρόβλημα είναι η διερεύνηση των παραγόντων από τους οποίους εξαρτώνται οι πωλήσεις της

επιχείρησης, είναι πολύ πιθανό το απλό υπόδειγμα να επιδέχεται βελτιώσεις με την προσθήκη και άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών, καθώς γνωρίζουμε ότι οι δαπάνες διαφήμισης είναι ένας μόνο από τους παράγοντες που επηρεάζουν το ύψος των πωλήσεων.

Η επιλογή των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ιδιαίτερης σημασίας για την εύρεση της σχέσης μεταξύ αυτών και της εξαρτημένης και της επίτευξης επιτυχών προβλέψεων. Ας δούμε στο σημείο αυτό, πως οδηγούμαστε στην κατασκευή ρεαλιστικών υποδειγμάτων με τη χρήση περισσότερων της μιας ανεξάρτητες μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι η εύρεση των προσδιοριστικών παραγόντων των πωλήσεων τηλεοράσεων μιας συνοικιακής επιχείρησης. Οι πιθανές ανεξάρτητες μεταβλητές η επίδραση των οποίων στις πωλήσεις πρέπει να διερευνηθεί με τη χρήση της πολλαπλής παλινδρόμησης είναι οι εξής:

- X_1 = η τιμή της τηλεόρασης που πουλά η επιχείρηση
- X_2 = οι τιμές της τηλεόρασης στις ανταγωνιστικές επιχειρήσεις
- X_3 = οι συνολικές πωλήσεις του κλάδου
- X_4 = το τμήμα της αγοράς που κατέχει η επιχείρηση
- X_5 = οι νέες κατοικίες
- X_6 = ο πληθυσμός της περιοχής της επιχείρησης
- X_7 = ο αριθμός μελών ανά νοικοκυριό
- X_8 = ο αριθμός των ανταγωνιστικών επιχειρήσεων
- X_9 = οι δαπάνες διαφήμισης

Η αναφορά βέβαια στις παραπάνω ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ενδεικτική και ανταποκρίνεται σε μια πρώτη κατάρτιση των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος. Μία προσεκτικότερη εξέταση των μεταβλητών αυτών είναι πιθανό να οδηγούσε σε μετατροπή τους. Έτσι, ο λόγος της τιμής της τηλεόρασης που πουλά η επιχείρηση προς την τιμή ανταγωνιστικού καταστήματος $\left(\frac{X_1}{X_2}\right)$ θα μπορούσε να αντικαταστήσει τις δύο μεταβλητές X_1 και X_2 στο υπόδειγμα.

Για τις ανάγκες του παραδείγματος ο αναλυτής θα έπρεπε, κατ' αρχήν, να κατασκευάσει την ακόλουθη εξίσωση γραμμικής πολλαπλής παλινδρόμησης, προκειμένου να απαντήσει στο ζητούμενο πρόβλημα.

$$\bar{Y} = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_9 X_9$$

Στη συνέχεια θα διερευνηθεί ποιές από τις X_1, X_2, \dots, X_9 επηρεάζουν την X .

2.1.1.1.2 Παράδειγμα 3:

Μία εταιρεία κατασκευών αλουμινίου έχει ως βασικούς της πελάτες κατασκευαστές κατοικιών και εταιρείες παραγωγής αναψυκτικών. Η διοίκηση της εταιρείας θεωρεί ότι οι πωλήσεις της συνδέονται στενά με τους δύο αυτούς κλάδους του δευτερογενή τομέα. Για την κατάρτιση λοιπόν ορθολογικού προγράμματος δράσης, επιθυμεί να προβλέψει τις πωλήσεις των επόμενων τριών ετών, με βάση εκτιμήσεις που υπάρχουν, για τα ίδια έτη, για τον αριθμό των κατοικιών που κατασκευάστηκαν και

τον αριθμό των αναψυκτικών που παράχθηκαν στη χώρα. Τα δεδομένα που έχει στη διάθεσή του ο αναλυτής, είναι αυτά του κάτωθι πίνακα 1.

Απάντηση:

Για την πρόβλεψη των πωλήσεων της εταιρείας βάσει των δεδομένων των δύο παραπάνω κλάδων, θα εφαρμόσουμε πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση της μορφής:

$$\bar{Y} = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων των κανονικών εξισώσεων καταρτίζουμε τον πίνακα 2.

Πίνακας 1: Στοιχεία απαραίτητα για πρόβλεψη των πωλήσεων εταιρείας κατασκευών αλουμινίου

Έτος	Υ Πωλήσεις εταιρείας κατασκ. αλουμινίου (σε εκατ. νομ. μονάδες)	X ₁ Αριθμός νέων κατοικιών (σε χιλ.)	X ₂ Αριθμός παραχθέντων αναψυκτικών σε συσκευασία αλουμινίου (σε εκατ. κουτιά)
1991	280	107	100
1992	261	117	120
1993	337	120	130
1994	404	118	165
1995	402	124	160
1996	452	128	173
*1997 εκτ	;	140	180
*1998 εκτ	;	136	181
*1999 εκτ	;	142	188

Πίνακας 2: Υπολογισμοί απαραίτητοι για την εκτίμηση της Εξίσωσης παλινδρόμησης
 $\bar{Y} = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$

Υ	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₁ X ₂	YX ₁	YX ₂
---	----------------	----------------	-----------------------------	-----------------------------	-------------------------------	-----------------	-----------------

280	107	100	11449	10000	10700	29960	28000
281	117	120	13689	14400	14040	32877	33720
337	120	130	14400	16900	15600	40440	43810
404	118	165	13924	27225	19470	47672	66660
402	124	160	15376	25600	19840	49848	64320
452	128	173	16384	29929	22144	57856	78196
ΣΥ=215 6	ΣΧ₁=71 4	ΣΧ₂=84 8	ΣΧ₁²=8522 2	ΣΧ₂²=1240 54	ΣΧ₁Χ₂=1017 94	ΣΥΧ₁=2586 53	ΣΥΧ₂=3147 0

Επομένως, η εξίσωση παλινδρόμησης ισούται με:

$$\bar{Y} = 32,85 - 0,11X_1 + 2,40X_2$$

Το αρνητικό πρόσημο του συντελεστή $\beta_1 = -0,11$ σημαίνει ότι σε αύξηση του αριθμού των κατοικιών κατά $X_1 = 1000$, τότε οι πωλήσεις της υπό εξέταση εταιρείας κατασκευών αλουμινίου μειώνονται κατά 110.000 νομ. μονάδες. Η αρνητική αυτή σχέση δεν έχει οικονομική (πραγματική) έννοια, καθώς η αναμενόμενη σχέση των δύο μεταβλητών είναι θετική, δηλαδή σε αύξηση των κατασκευών κατοικιών να αντιστοιχεί και αύξηση των πωλήσεων της εταιρείας, που οι πελάτες της είναι κατασκευαστικές εταιρείες, ανεξάρτητα από τις επιδράσεις της αύξησης των παραχθέντων αναψυκτικών. Πάντως η αρνητική επίδραση του αριθμού των κατοικιών στις πωλήσεις της εταιρείας δεν είναι έντονη καθώς η απόλυτη τιμή του συντελεστή $\beta = -0,11$ είναι μικρή. Αξιολόγηση της κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής ως προς την επίδραση που ασκεί στην εξαρτημένη, θα γίνει στην επόμενη ενότητα, όπου θα εξεταστεί η στατιστική και οικονομική σημαντικότητα των συντελεστών της εξίσωσης παλινδρόμησης $\alpha_1\beta_1, \beta_2$, κλπ.

Η αναμενόμενη είναι η σχέση των πωλήσεων της εταιρείας κατασκευών αλουμινίου με τον αριθμό των παραχθέντων αναψυκτικών σε συσκευασία αλουμινίου. Πράγματι σε αύξηση του αριθμού των παραχθέντων αναψυκτικών σε συσκευασία αλουμινίου κατά 1.000.000, τότε οι πωλήσεις της εταιρείας αλουμινιο-κατασκευών θα αυξηθούν κατά 2.400.000 νομ. μονάδες, αν ο αριθμός των κατοικιών που κατασκευάστηκαν παραμένει σταθερός.

Με βάση την εκτιμηθείσα εξίσωση και με τη χρησιμοποίηση της εκτίμησης του αριθμού νέων κατοικιών και των παραχθέντων αναψυκτικών για τα έτη 1997, 1998 και 1999, προχωρούμε σε πρόγνωση των πωλήσεων της εταιρείας αλουμινιοκατασκευών κατά τα έτη αυτά ως εξής:

$$1997: \bar{Y} = 32,85 - (0,11).(140) + (2,4).(180) = 464,85 - 15,4 = 449,45$$

$$1998: \bar{Y} = 32,85 - (0,11).(136) + (2,4).(181) = 434,4 - 14,96 = 419,44$$

$$1999: \bar{Y} = 32,85 - (0,11).(142) + (2,4).(188) = 484,05 - 15,62 = 468,43$$

Επομένως, οι πωλήσεις της εταιρείας προβλέπονται να ανέλθουν σε 449.450.000 νομ. μονάδες, 419.440.000 νομ. μονάδες, και 468.430.000 νομ. μονάδες κατά τα έτη 1997-1999.

2.1.1.1.3 Παράδειγμα 4:

Η έννοια της ζήτησης αναφέρεται στην ποσότητα ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας που επιθυμούν τα άτομα να αγοράσουν σε δεδομένη χρονική περίοδο. Στο παράδειγμα αυτό θα αναφερθούμε στη συνάρτηση ζήτησης όσο αφορά την ανάλυση παλινδρόμησης. Το μέγεθος και οι προσδιοριστικοί παράγοντες της ζήτησης ενός προϊόντος αποτελούν ένα από τα βασικότερα θέματα που απασχολούν τις επιχειρήσεις, καθώς ο τελικός στόχος της δραστηριότητας αυτών είναι η διάθεση του προϊόντος στον τελικό καταναλωτή. Οι Διευθυντές της επιχείρησης είναι απαραίτητο να γνωρίζουν από ποιους παράγοντες επηρεάζεται η ζήτηση των προϊόντων της, ώστε με τη μελέτη αυτών να προβλέπει το μέγεθος των πωλήσεων της και να προσαρμόζουν ανάλογα τη δράση της. Το μέγεθος του ζητούμενου προϊόντος στο μέλλον είναι αυτό που θα προσδιορίσει τις αναγκαίες μονάδες συντελεστών παραγωγής που πρέπει να απασχολήσει η επιχείρηση, τις απαιτούμενες δαπάνες, τις επενδύσεις, την τιμολογιακή πολιτική αυτής, κλπ. Για τον προσδιορισμό των παραγόντων που επηρεάζουν τη ζήτηση ενός προϊόντος και την πρόβλεψη της μελλοντικής της εξέλιξης, χρησιμοποιείται συνήθως, η ανάλυση παλινδρόμησης. Το πρόβλημα συνίσταται στην εκτίμηση και αξιολόγηση μιας συνάρτησης στην οποία η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος είναι η εξαρτημένη μεταβλητή Y και μια σειρά παραγόντων που αφορούν την επιχείρηση ή το ευρύτερο οικονομικό περιβάλλον στο οποίο αυτοί λειτουργούν, αποτελούν τις ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Η συνάρτηση αυτή καλείται συνάρτηση ζήτησης και έχει ως γενική μορφή τις εξής:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

Οι βασικότεροι προσδιοριστικοί παράγοντες της ζήτησης ενός προϊόντος Y που εισέρχονται συνήθως στη συνάρτηση ζήτησης είναι οι ακόλουθοι:

- X_1 = η τιμή του υπό εξέταση προϊόντος ή υπηρεσίας
- X_2 = η ύπαρξη υποκατάστατων
- X_3 = η τιμή του υποκατάστατου(ών) προϊόντος(ων)
- X_4 = η τιμή συμπληρωματικού(ών) προϊόντος(ων)
- X_5 = το εισόδημα των καταναλωτών
- X_6 = ο τρόπος διανομής του εισοδήματος
- X_7 = οι δαπάνες προώθησης του προϊόντος
- X_8 = οι προτιμήσεις των καταναλωτών
- X_9 = οι προσδοκίες των καταναλωτών για τις μελλοντικές τιμές και το εισόδημα
- X_{10} = το μέγεθος και τα διαρθρωτικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού
- X_{11} = η καταναλωτική πίστη.

Χρήσιμο είναι να σχολιαστεί ο τρόπος με τον οποίο επηρεάζει κάθε ένας από τους παραπάνω παράγοντες της ζήτησης του προϊόντος, σύμφωνα με τη μικροοικονομική θεωρία. Η ανάλυση αυτή θα βοηθήσει στη διερεύνηση της οικονομικής σημαντικότητας των συντελεστών παλινδρόμησης στη συνάρτηση ζήτησης. Η τιμή του προϊόντος συνήθως επηρεάζει αρνητικά τη ζήτηση του προϊόντος. Σε αύξηση της

τιμής του προϊόντος, η ποσότητα που επιθυμούν να αγοράσουν οι καταναλωτές μειώνονται και αντίστροφα. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή \bar{Y} του συντελεστή παλινδρόμησης της ανεξάρτητης μεταβλητής που εκφράζει τη τιμή του προϊόντος, αναμένεται αρνητική, όταν οι λοιπές μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Συγκεντρωτικά και σε γενικές γραμμές, η αναμενόμενη κατεύθυνση μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας ενός προϊόντος σε μεταβολή κάθε ενός παράγοντα, των υπολοίπων θεωρούμενων σταθερών, δίνεται στη συνέχεια με το συμβολισμό (+) όταν υπάρχει μεταβολή προς την μία κατεύθυνση (σε αύξηση αντιστοιχεί αύξηση) και με (-) όταν η μεταβολή είναι προς διαφορετική κατεύθυνση (σε αύξηση αντιστοιχεί μείωση και αντιστρόφως).

Προσδιοριστικοί παράγοντες	Ζήτηση προϊόντος
Τιμή προϊόντος	(-)
Ύπαρξη υποκατάστατων	(-)
Τιμή υποκατάστατων	(+)
Τιμή συμπληρωματικών	(-)
Εισόδημα καταναλωτών	(+)
Ανισότητα διανομής εισοδήματος	(-)
Δαπάνες διαφήμισης	(+)
Προτιμήσεις καταναλωτών	(+)
Προσδοκίες καταναλωτών	(+)
Πληθυσμός	(+)
Καταναλωτική πίστη	(+)

Πιο συγκεκριμένα, από τα στατιστικά στοιχεία που διαθέτει μια επιχείρηση ως και από αυτά που συνέλεξε, καταρτίστηκε η ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος αυτής:

$$\bar{Y}=3,2-0,40X_1-0,10X_2-2,11X_3,$$

$$(0,02) \quad (0,4) \quad (0,13)$$

$$R^2=0,45$$

όπου: \bar{Y} = η εκτίμηση της ζητούμενης ποσότητας του προϊόντος

X_1 = η τιμή του προϊόντος

X_2 = η τιμή ενός υποκατάστατου προϊόντος

X_3 = το διαθέσιμο εισόδημα των καταναλωτών

Αν οι αριθμοί στις παρενθέσεις αποτελούν το τυπικό σφάλμα εκτίμησης των συντελεστών μερικής παλινδρόμησης, να εξεταστεί η αξιοπιστία της συνάρτησης με τη χρησιμοποίηση στατιστικών και οικονομικών κριτηρίων.

Απάντηση:

Αρχικά διερευνούμε κατά τα γνωστά τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών μερικής παλινδρόμησης:

$$\frac{0,40}{0,02} = 20 > 1,96. \text{ Επομένως } \beta_1 \text{ στατιστικά σημαντικός.}$$

$$\frac{0,10}{0,4} = 0,25 < 1,96. \text{ Επομένως } \beta_2 \text{ μη στατιστικά σημαντικός.}$$

$$\frac{2,11}{0,13} = 16,23 > 1,96. \text{ Επομένως } \beta_3 \text{ στατιστικά σημαντικός.}$$

Ο συντελεστής $\beta_1 = -0,40$ σημαίνει ότι αυξανόμενης της τιμής του προϊόντος κατά 1 μονάδα, η ζητούμενη ποσότητα αυτού ελαττώνεται κατά 0,40 μονάδες, σχέση που στέκει οικονομικώς και επομένως ο β_1 είναι οικονομικά σημαντικός. Ο συντελεστής $\beta_2 = -0,10$ σημαίνει ότι σε αύξηση της τιμής του υποκατάστατου προϊόντος κατά 1 μονάδα, η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος που εξετάζουμε ελαττώνεται κατά 0,10 μονάδες, πράγμα που δε στέκει οικονομικώς, γιατί το αναμενόμενο ήταν αύξηση της ζητούμενης ποσότητας. Επομένως ο συντελεστής β_2 δεν είναι οικονομικά σημαντικός. Ο συντελεστής $\beta_3 = -2,11$, δηλώνει ότι σε αύξηση του προϊόντος κατά 1 μονάδα, η ζητούμενη ποσότητα αυτού μειώνεται κατά 2,11 μονάδες, γεγονός που στα περισσότερα (πλην τα κατώτερα) προϊόντα δεν είναι αναμενόμενο. Επομένως και ο συντελεστής β_3 δεν είναι οικονομικά σημαντικός. Επιπλέον ο συντελεστής προσδιορισμού $R^2 = 0,45$. Με βάση τις παραπάνω μετρήσεις προκύπτει ότι η εκτιμηθείσα συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος δεν παρέχει αξιοπιστία καθώς:

Η συνολική ερμηνευτική ικανότητα των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι σε μη παραδεκτά επίπεδα $R^2 = 0,45 < 0,50$.

Ο συντελεστής της μεταβλητής X_2 (τιμή υποκατάστατου αγαθού) είναι μη στατιστικά και οικονομικά σημαντικός και επίσης ο συντελεστής της μεταβλητής X_3 (εισόδημα καταναλωτών) είναι μη οικονομικά σημαντικός (αν δεχτούμε ότι το προϊόν δεν ανήκει στην κατηγορία των κατώτερων αγαθών).

Η ερμηνευτική ικανότητα της παραπάνω εξίσωσης είναι δυνατό να βελτιωθεί, δηλαδή η τιμή του R^2 να αυξηθεί, αν αφαιρέσουμε από το υπόδειγμα τις μεταβλητές X_2 (τιμή υποκατάστατου) και X_3 (εισόδημα καταναλωτών) και εκτιμήσουμε εκ νέου τη ζήτηση του προϊόντος με βάση την X_1 (τιμή προϊόντος) και την εισαγωγή άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών που την επηρεάζουν.

2.1.1.1.4 Παράδειγμα 5:

Θα ασχοληθούμε μόνο με την παρουσίαση της μορφής που παίρνει η συνάρτηση παραγωγής καθώς και με τον προσδιορισμό των ανεξάρτητων μεταβλητών που εισέρχονται σ' αυτή, σε μια εξίσωση παλινδρόμησης. Η συνάρτηση παραγωγής εκφράζει τη σχέση μεταξύ των χρησιμοποιούμενων εισροών των συντελεστών παραγωγής και του παραγόμενου προϊόντος. Η σχέση αυτή προσδιορίζεται από τις δεδομένες τεχνολογικές μεθόδους και προϋποθέτει ότι με δεδομένο συνδυασμό παραγωγικών συντελεστών παράγεται η μέγιστη ποσότητα του προϊόντος. Η συνάρτηση παραγωγής είναι της γενικής μορφής:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

Όπου Y = η μέγιστη παραγόμενη ποσότητα

X_1 = η εργασία

X_2 = το κεφάλαιο

X_3 = το έδαφος

X_4 - X_n = οι λοιποί συντελεστές παραγωγής που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του προϊόντος.

Οι τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ εκφράζονται σε φυσικές μονάδες των συντελεστών παραγωγής που εκφράζουν. Επίσης, η παραγωγή Y για ένα προϊόν μιας επιχείρησης δύναται να εκφράζεται με φυσικές μονάδες.

Αν η παραγωγή αναφέρεται σε περισσότερα είδη προϊόντων της επιχείρησης ή σε ολόκληρο κλάδο οικονομικής δραστηριότητας τότε, εκφράζεται σε αξία, εκφρασμένη σε σταθερές τιμές. Πολύ γνωστή συνάρτηση παραγωγής ενός προϊόντος αποτελεί η συνάρτηση Cobb-Douglas, η οποία είναι εκθετική της μορφής:

$$Y = \alpha X^{\beta_1}_1 \cdot X^{\beta_2}_2 \quad (a)$$

Όπου Y = η παραγωγή σε φυσικές μονάδες

X_1 = η ποσότητα της χρησιμοποιούμενης εργασίας σε φυσικές μονάδες

X_2 = το κεφάλαιο σε φυσικές μονάδες $Y, X_1, X_2 > 0$, όπου $\alpha > 0$ και $\beta_1, \beta_2 \geq 0$

Η (a) με λογαριθμικό μετασχηματισμό, παίρνει τη γραμμική μορφή:

$$\log Y = \log \alpha + \beta_1 \log X_1 + \beta_2 \log X_2$$

ή αν θέσουμε

- $Y^* = \log Y$
- $\alpha^* = \log \alpha$
- $X_1^* = \log X_1$
- $X_2^* = \log X_2$

μετασχηματίζεται στην γραμμική:

$$Y^* = \alpha^* + \beta_1 X_1^* + \beta_2 X_2^*$$

Στη συνέχεια, για την εκτίμηση των συντελεστών μερικής παλινδρόμησης α , β_1 και β_2 εργαζόμαστε όπως ακριβώς στο άνω παράδειγμα 4.

2.1.1.1.5 ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΥΜΑΣΤΕ

Το βασικό πλεονέκτημα εφαρμογής οικονομετρικών μοντέλων, σύμφωνα με την παραπάνω έννοια, είναι η ικανότητα αυτών να διαπραγματεύονται αλληλεξαρτήσεις των διαφόρων μεγεθών της επιχείρησης. Στα μειονεκτήματα της εφαρμογής των οικονομετρικών υποδειγμάτων αναφέρονται:

- Η έλλειψη κανόνων που να ισχύουν γενικά στις διάφορες εφαρμογές, που οδηγεί σε υποκειμενικότητα ανάλογα με την περίπτωση που μελετάται και τις ικανότητες του οικονομετρητή.
- Η ανάγκη για συνεχή ενημέρωση και έλεγχο των χρησιμοποιούμενων δεδομένων και των αποτελεσμάτων κάθε εφαρμογής, γεγονός που δεν επιτρέπει την ευρεία χρήση της μεθόδου αυτής από τις επιχειρήσεις.

Η ανάλυση παλινδρόμησης είναι μια στατιστική τεχνική με βάση την οποία επιχειρείται η ανάπτυξη μαθηματικών εξισώσεων για τη διερεύνηση της αιτιώδους σχέσης μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών και στη συνέχεια πρόβλεψη των τιμών της μιας, αν γνωρίζουμε τις τιμές της άλλης μεταβλητής ή των άλλων μεταβλητών. Στην περίπτωση που επιθυμούμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ δύο μόνο μεταβλητών αναφερόμαστε στην απλή παλινδρόμηση, ενώ στην περίπτωση που θεωρούμε ότι μια μεταβλητή συναρτάται με δύο ή περισσότερες άλλες μεταβλητές αναφερόμαστε στην πολλαπλή παλινδρόμηση.

Στη συνέχεια δίνονται τα κριτήρια αυτά για ορισμένες βασικές εξισώσεις.

- Για την επιλογή της γραμμικής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών απαιτείται οι τιμές της X και Y να μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο έστω και προσεγγιστικά, ή οι πρώτες διαφορές της $X(\Delta X)$ και της $Y(\Delta Y)$ να είναι σταθερές.
- Το πολυώνυμο 2ου βαθμού επιλέγεται όταν οι τιμές της X μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο (οι πρώτες διαφορές είναι σταθερές) και οι δεύτερες διαφορές της $Y(\Delta^2 Y)$ είναι σταθερές, έστω και προσεγγιστικά.
- Η εκθετική επιλέγεται όταν οι τιμές της X μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο (οι πρώτες διαφορές είναι ίσες) και η Y κατά πρόοδο γεωμετρική ή οι λογάριθμοι της Y μεταβάλλονται κατά αριθμητική πρόοδο (οι πρώτες διαφορές είναι σταθερές) έστω και προσεγγιστικά.

Λοιπές εξισώσεις παλινδρόμησης:

- Η δευτεροβάθμια εξίσωση παλινδρόμησης (παραβολική)
- Η Απλή Λογαριθμική (Εκθετική) παλινδρόμηση
- Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση και η χρήση της στην επιχείρηση

2.1.1.2 Μέτρα αξιολόγησης της ερμηνευτικής ικανότητας της εξίσωσης παλινδρόμησης

Για να δούμε πόσο καλά μια γραμμή παλινδρόμησης περιγράφει το βαθμό εξάρτησης ανάμεσα στην εξαρτημένη μεταβλητή Y και στις ανεξάρτητες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n , χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα κριτήρια:

- (α) Συντελεστής προσδιορισμού R^2
- (β) Ποσοστιαίο σφάλμα εκτιμήσεως
- (γ) t-test
- (δ) Συντελεστής βάρους
- (ε) Έλεγχος με την κατανομή F
- (στ) Έλεγχος Durbin - Watson

Για την κατανόηση των μέτρων αυτών θα πρέπει να αναφερθούμε πρώτα στην ανάλυση της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y .

(α) Συντελεστής προσδιορισμού R^2

Ο συντελεστής προσδιορισμού αποτελεί το συνολικό μέτρο καλής εφαρμογής της γραμμής παλινδρόμησης στα εκ παρατηρήσεως δεδομένα (πραγματικές τιμές). Εκφράζει την αναλογία της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y , που ερμηνεύεται από την επίδραση της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παράδειγμα 6:

Εάν $R^2 = 0,90$, αυτό σημαίνει ότι το 90% της συνολικής μεταβλητικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής Y , οφείλεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή και το υπόλοιπο 10% της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής οφείλεται σε άλλες, άγνωστες αιτίες. Ο συντελεστής προσδιορισμού παίρνει τιμές από 0 μέχρι 1. Αν $R^2 = 0$, τότε η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν ερμηνεύει καθόλου η διακύμανση της Y , ενώ όταν $R^2 = 1$, τότε ολόκληρη η διακύμανση της Y ερμηνεύεται από την X και οι πραγματικές τιμές της Y θα συμπίπτουν με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές της, \bar{Y} . Όλες οι τιμές της Y θα βρίσκονται επί της ευθείας της εξίσωσης παλινδρομήσεως, δηλαδή πρόκειται περί θεωρητικού υποδείγματος που δεν υπόκειται σε σφάλμα. Ανάλογη είναι η έννοια και του συντελεστού πολλαπλού προσδιορισμού, όταν έχουμε πολλαπλή παλινδρόμηση. Η εξίσωση παλινδρόμησης είναι ικανοποιητική, όταν τουλάχιστον το 50% της μεταβλητικότητας της Y ερμηνεύεται από τη X , δηλαδή όταν η τιμή του $R^2 \geq 0,5$. Είναι αυτονόητο ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο R^2 , τόσο καλύτερη είναι η εφαρμογή της ευθείας παλινδρόμησης. Ο συντελεστής προσδιορισμού ισούται με το τετράγωνο του συντελεστού συσχέτισεως r . Επομένως η ελάχιστη τιμή του r , προκειμένου η εξίσωση παλινδρόμησης να είναι ικανοποιητική, είναι $r \geq 0,7$, ώστε $R^2 \geq 0,7^2 = 0,5$.

(β) Ποσοστιαίο σφάλμα εκτίμησης

Το ποσοστιαίο σφάλμα εκτίμησης ισούται με:

$$PSE = \frac{S_{xy}}{Y} \cdot 100$$

όπου S_{XY} το τυπικό σφάλμα εκτίμησης περί τη γραμμή παλινδρόμησης. Το S_{XY} ισούται με την τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Ως μέγιστο αποδεκτό ποσοστιαίο σφάλμα εκτίμησης λαμβάνεται συνήθως το 20%.

(γ) t-test

Στο t-test χρησιμοποιούμε το σύμβολο α , β_1, \dots, β_n για τους εκτιμηθέντες από το δείγμα συντελεστές, προκειμένου να τους διακρίνουμε από τους αντίστοιχους $\alpha', \beta_1', \dots, \beta_n'$ που ισχύουν στον πληθυσμό από τον οποίο προήλθε το δείγμα. Η εξίσωση παλινδρόμησης που εκτιμάται από ένα δείγμα N ζευγών τιμών, αποτελεί εκτίμηση της άγνωστης εξίσωσης ολόκληρου του πληθυσμού. Επομένως οι συντελεστές $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ που εκτιμήθηκαν από την εξίσωση παλινδρόμησης πρέπει να υποβληθούν σε έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας, αν δηλαδή ισχύουν με ορισμένο επίπεδο σημαντικότητας (σφάλμα α) και στον πληθυσμό. Είναι αυτονόητο ότι, αν όλοι οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ είναι 0 στον πληθυσμό τότε δεν υφίσταται πραγματική σχέση μεταξύ της εξαρτημένης και ανεξάρτητων μεταβλητών και η παλινδρόμηση πρέπει να εγκαταλειφθεί. Αν κάποιος συντελεστής β_1 ή β_2 ή... ή β_n είναι 0, τότε η αντίστοιχη μεταβλητή X_1, X_2, \dots, X_n πρέπει να απορριφθεί από το υπόδειγμα. Για τον έλεγχο υποθέσεων με την κατανομή t , τίθεται η υπόθεση $H_0: \beta=0$, έναντι της $H_0: \beta' \neq 0$. Οι συντελεστές διαιρούνται με το τυπικό σφάλμα εκτίμησης αυτών και η τιμή του t που προκύπτει συγκρίνεται με τον αριθμό των πινάκων της κατανομής $t_{v, \alpha+2}$, για v βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α . Οι βαθμοί ελευθερίας ισούνται με $v=N-(m+1)$, όπου N το δείγμα και m ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή:

$$t = \frac{|\hat{a}|}{S_{\hat{a}}}$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για τον έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας του συντελεστή α . Εάν $t > t_{v, \alpha+2}$ τότε η H_0 απορρίπτεται, άρα $\beta' \neq 0$ και άρα ο β είναι στατιστικά σημαντικός. Αν $t < t_{v, \alpha+2}$ τότε η H_0 γίνεται δυνατή, άρα $\beta'=0$ και άρα δεν είναι στατιστικά σημαντικός. Αν $t = t_{v, \alpha+2}$, τότε δεν μπορεί να προκύψει συμπέρασμα και επομένως πρέπει να επαναληφθεί ο έλεγχος με άλλο δείγμα.

(δ) Συντελεστής βάρους

Ο συντελεστής βάρους W_{β} αποτελεί κριτήριο αξιολόγησης της συνεισφοράς των ανεξάρτητων μεταβλητών στον υπολογισμό της εξαρτημένης. Ο συντελεστής βάρους υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$W_{\hat{a}} = \frac{\hat{a} \cdot S_X}{S_Y}$$

όπου S_X η τυπική απόκλιση της ανεξάρτητης μεταβλητής X και

S_Y = η τυπική απόκλιση της εξαρτημένης μεταβλητής Y.

(ε) Έλεγχος αυτοσυσχέτισης Durbin - Watson

Αυτοσυσχέτιση καλείται η επίδραση που ασκεί μια τιμή μιας μεταβλητής στη διαμόρφωση επόμενης της ή επόμενων τιμών αυτής. Η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης στα σφάλματα $\varepsilon_i = (Y_i - \bar{Y}_i)$, δεν επιτρέπει την εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση της παλινδρόμησης της Y στην X. Την αυτοσυσχέτιση αυτή τη μετράμε συνήθως με την παράμετρο d των Durbin - Watson. Ανάλογα με το πλήθος n των ανεξάρτητων μεταβλητών X_i της εξίσωσης παλινδρόμησης, του μεγέθους του δείγματος και το επίπεδο σημαντικότητας α , συγκρίνουμε την τιμή του d με τις κριτικές τιμές d_U και d_L των πινάκων “κριτικές τιμές d_L και d_U για τον έλεγχο αυτοσυσχέτισης”.

- Αν $d < d_L$ υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση.
- Αν $d > d_U$ δεν υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση.
- Αν $d_L < d < d_U$ δεν εξάγονται συμπεράσματα.
- Αν $4 - d < d_L$ υπάρχει αρνητική αυτοσυσχέτιση.
- Αν $4 - d > d_U$ δεν υπάρχει αρνητική αυτοσυσχέτιση.
- Αν $d_L < 4 - d < d_U$ δεν εξάγονται συμπεράσματα.

Τα μέτρα αυτά αξιολόγησης της ερμηνευτικής ικανότητας των εξισώσεων παλινδρόμησης θα εφαρμοστούν στα επόμενα παραδείγματα.