ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Μια μαθηματική τεχνική
- Ευρύτατο φάσμα εφαρμογών
- Προβλήματα με γραμμικότητα

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός επιλύει, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, το πρόβλημα κατανομής πεπερασμένων πόρων ή μέσων ή γενικότερα χρήσιμων αγαθών (π.χ. εργαζόμενων, υλικών, μηχανών, γης, ...) σε διάφορες εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες (παραγωγή προϊόντων, παροχή υπηρεσιών, ...) κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Κάνει δηλαδή επιλογή της στάθμης κάθε δραστηριότητας έτσι ώστε να βελτιστοποιείται ένα προκαθορισμένο κριτήριο επιλογής.

- Περιορισμένοι πόροι
- Εναλλακτικές και ανταγωνιστικές δραστηριότητες
- Βελτιστοποίηση (min ή max) συγκεκριμένου κριτηρίου

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

- Σχεδιασμός Εθνικής Οικονομίας ✓
- Ενεργειακός Προγραμματισμός ✓
- Προγραμματισμός παραγωγής, αποθεμάτων ✓
- Προγραμματισμός επενδύσεων ✓
- Κατανομή προσωπικού σε εργασίες ✓
- Επιλογή θέσεως εργοστασίων και αποθηκών ✓
- Μεταφορά εμπορευμάτων από τους τόπους παραγωγής στα κέντρα κατανάλωσης ✓
- Βομβαρδισμός εχθρικού στόχου με δεδομένο σμήνος αεροσκαφών ✓
- Καθορισμός ημερησίου διαιτολογίου ατόμου ✓

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (1)

ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ: Έστω:

x_1 : τεμάχια Προϊόντος 1 που παραγ. εβδομ.

x_2 : τεμάχια Προϊόντος 2 που παραγ. εβδομ.

Ώρες απασχόλησης μηχ. 1 για προϊόν 1: $2x_1$

Ώρες απασχόλησης μηχ. 1 για προϊόν 2: $3x_2$

Συνολικές ώρες διάθεσης μηχ. 1:

Παραδοχή: 2 βάρδιες x 8 ώρες x 5 ημέρες = 80 ώρες

Άρα πρέπει: $2x_1 + 3x_2 \leq 80$

Ομοίως . . . Μηχ. 2: $4x_1 + 2x_2 \leq 80$

Μηχ. 3: $6x_1 \leq 80$

Πώληση: $x_2 \leq 25$

Κέρδος : $4000x_1 + 3000x_2 \longrightarrow \max$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (2)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ: ΚΥΡΙΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- ✓ Σύστημα: Το σύνολο των μηχανημάτων και ανθρώπων του μηχανουργείου που σκοπό έχει την παραγωγή προϊόντων
- ✓ Στοιχεία του συστήματος: Οι άνθρωποι, τα μηχανήματα
- ✓ Δυνατότητα δράσης: Παραγωγή των προϊόντων. Επιτυγχάνεται με συνδυασμό των στοιχείων του συστήματος.
- ✓ Περιορισμοί: στους οποίους υπόκειται η παραγωγή.
  - Χρονικοί περιορισμοί λειτουργίας μηχανημάτων
  - Περιορισμοί από ζήτηση
- ✓ Δραστηριότητες: στις οποίες αναλύεται η δράση του συστήματος.
  - Παραγωγή προϊόντος 1
  - Παραγωγή προϊόντος 2

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (3)

- Στάθμη της δραστηριότητας: Η μέτρηση κάθε δραστηριότητας με την κατάλληλη μονάδα (τεμάχια προϊόντων)
- Μεταβλητές Απόφασης: Οι στάθμες των διαφόρων δραστηριοτήτων (που αποτελούν ένα πρόγραμμα δράσης)
  - x_1, x_2
- Πραγματοποιήσιμο Πρόγραμμα Δράσης: Οι περιορισμοί δράσης ικανοποιούνται
- Κριτήριο Απόφασης: Κάποιο πολύτιμο αγαθό που συνεπάγεται το Πρόγραμμα Δράσης
  - Κέρδος
- Σκοπός του Γ.Π.: Ζητείται να προσδιορισθεί, από όλα τα πραγματοποιήσιμα προγράμματα δράσης, εκείνο που βελτιστοποιεί την ποσότητα του αγαθού του συστήματος που λαμβάνεται ως κριτήριο επιλογής.
  - max {Κέρδος}

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Ζητείται να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών απόφασης $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που μεγιστοποιούν (ή ελαχιστοποιούν) τη γραμμική συνάρτηση:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

ή

min

και συγχρόνως ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq = \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq = \geq) b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq = \geq) b_m$$

και $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

** Υπάρχουν δηλαδή m μέσα παραγωγής που ζητείται να κατανεμηθούν σε n δραστηριότητες

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Δείκτης $j = 1, 2, \ldots, n$: ισχύει για τις δραστηριότητες

Δείκτης $i = 1, 2, \ldots, m$: ισχύει για τα μέσα παραγωγής

a_{ij} : Τεχνολογικοί συντελεστές. Εκφράζουν την ποσότητα του μέσου i που καταναλώνετε για κάθε μονάδα δραστηριότητας j

x_j : Μεταβλητές Απόφασης (Στάθμες δραστηριοτήτων)

c_j : Μοναδιαία αξία της δραστηριότητας j. Όταν αυξάνεται κατά 1 μονάδα η στάθμη της δραστηριότητας j τότε η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνεται κατά c_j.

b_i : Β΄ μέλη περιορισμών. Εκφράζουν την ποσότητα του μέσου i που μπορεί να διατεθεί για όλες τις n δραστηριότητες

Z : Η προς μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση Αντικειμενική Συνάρτηση

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

$Z = [C_1 \quad C_2 \quad . \; . \; . \; . \; C_n]$

max ή min

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

– Αναλογικότητα

Η αντικειμενική συνάρτηση καθώς και όλοι οι περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις (Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η χρησιμοποίηση τω διαθέσιμων μέσων, είναι ποσά ανάλογα προς τις ποσότητες κάθε μιας δραστηριότητας).

– Προσθετικότητα

Οι ποσότητες ενός διαθέσιμου μέσου που καταναλώνονται , από τις διάφορες δραστηριότητες, μπορούν να προστεθούν. (Δηλαδή αν η δραστηριότητα 1 καταναλώνει $a_{i1}x_1$ μονάδες του συντελεστή I, και η 2 $a_{i2}x_2$ τότε και οι δύο μαζί καταναλώνουν $a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2$.

– Διαιρετότητα

Οι μεταβλητές αποφάσεις παίρνουν συνεχείς τιμές.

– Προσδιορισμένοι συντελεστές

Όλοι οι συντελεστές ενός μοντέλου Γ.Π. (δηλαδή τα a_{ij}, b_i, c_j) θεωρούνται σαν γνωστές σταθερές.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το Πρόβλημα της Εταιρείας DEWAG

Η Εταιρεία κατασκευής αυτοκινήτων DEWAG ειδικεύεται στην παραγωγή δύο τύπων μικρών φορτηγών:

- DW 501
- DW 502

Τα αυτοκίνητα DW 501 παράγονται σε 4 τμήματα παραγωγής:

- Τμήμα 1: Ψυχρή εξέλαση (αμαξώματα)
- Τμήμα 2: Συναρμολόγησης μηχανής
- Τμήμα 3: Τελική συναρμολόγηση DW 501
- Τμήμα 4: Τελική συναρμολόγηση DW 502

Η μηνιαία παραγωγική ικανότητα κάθε τμήματος, εφόσον αυτό χρησιμοποιείται για την παραγωγή ενός μόνο τύπου αυτοκινήτου, είναι:

ΤΜΗΜΑΤΑ	DW501	DW502
1. Ψυχρή εξέλαση	5.000	7.000
2. Συναρμολόγηση μηχανών	6.666	3.334
3. Τελική συναρμολόγηση DW501	4.500	
4. Τελική συναρμολόγηση DW502		3.000

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το Τμήμα 1 (ψυχρής εξέλασης) παράγει αμαξώματα για 5000 αυτοκίνητα DW501 μόνο, ή για 7000 αυτοκίνητα DW502 μόνο ή για οποιονδήποτε κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Άρα:

* Παραγωγή αυτοκινήτων DW501: 5000

συντελεστής απασχόλησης Τμ. 1: 100% (ή 1)

* Παραγωγή αυτοκινήτων DW501: 1500

συντελεστής απασχόλησης Τμ. 1: $\frac{1500}{5000} = 0{,}30\ (30\%)$

Μένει το υπόλοιπο 70% της παραγωγικής ικανότητας του Τμ. 1 για κατασκευή αυτοκινήτων DW502

Άρα:

Παράγονται 0,70x7000=4200 αυτοκίνητα DW502

Γενικά, πρέπει:

(Απασχ. Τμ. 1 για DW501) + (Απασχ. Τμ. 1 για DW502) ≤ 1

Ή ΑΛΛΙΩΣ:

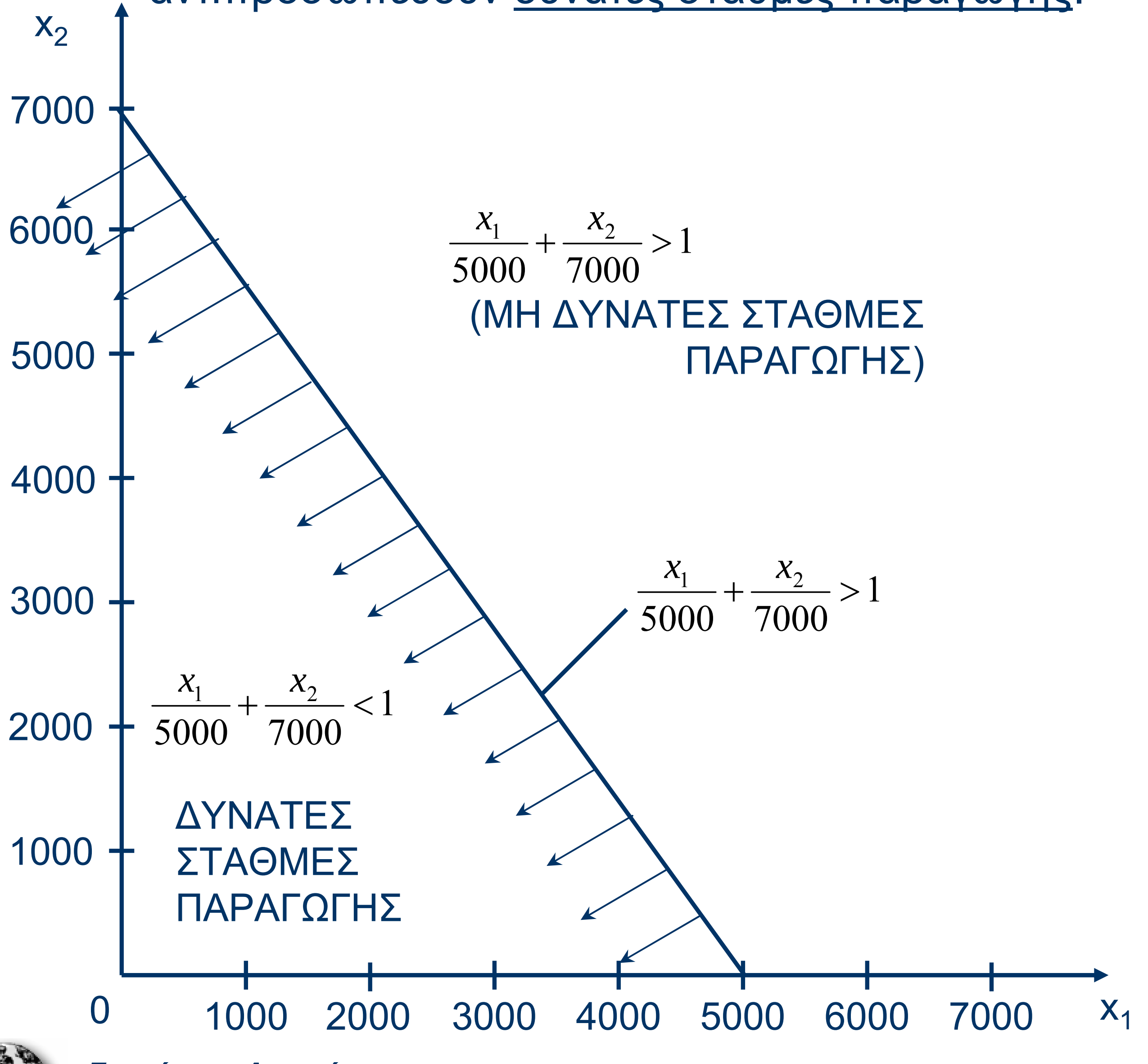
$$\frac{x_1}{5000} + \frac{x_2}{7000} \le 1$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

Τμήμα 1

Η σχέση $\dfrac{x_1}{5000}+\dfrac{x_2}{7000}=1$

Που εκφράζει τη συνθήκη πλήρους εκμετάλλευσης του Τμήματος 1, μπορεί να παρασταθεί γραφικά. Τα σημεία δεξιά της ευθείας έχουν συντελεστή εκμετάλλευσης >1, ενώ εκείνα που είναι αριστερά αντιπροσωπεύουν δυνατές στάθμες παραγωγής.



ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (1)

- Δραστηριότητες: – Παραγωγή αυτοκ. DW501
  – Παραγωγή αυτοκ. DW502
- Πόροι (συντελεστές παραγωγής): – Τμ. Ψυχρής εξέλασης
  – Τμ. Συναρμολόγησης Μηχανών
  – Τμ. Συναρμολόγησης αυτ. DW501
  – Τμ. Συναρμολόγησης αυτ. DW502
- Τεχνολογικοί συντελεστές

* Για την παραγωγή ενός αυτοκ. DW501

$\frac{1}{5000} = 0{,}02\%$ της παραγ. ικαν. Τμ. 1

$\frac{1}{6666} = 0{,}015\%$ της παραγ. ικαν. Τμ. 2

$\frac{1}{4500} = 0{,}0222\%$ της παραγ. ικαν. Τμ. 3

* Για την παραγωγή ενός αυτοκ. DW502

$\frac{1}{7000} = 0{,}0143\%$ της παραγ. ικαν. Τμ. 1

$\frac{1}{3334} = 0{,}03\%$ της παραγ. ικαν. Τμ. 2

$\frac{1}{3000} = 0{,}0333\%$ της παραγ. ικαν. Τμ. 4

	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	
ΤΜΗΜΑΤΑ	DW501	DW502
1. Ψυχρή εξέλαση	0,0200	0,0143
2. Συναρμολόγηση Μηχανών	0,0150	0,0300
3. Συναρμολόγηση DW501	0,0222	—
4. Συναρμολόγηση DW502	—	0,0333

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (2)

- Περιορισμοί:
  - * Δραστηριότητα 1: – Στάθμη x_1
    – Κατανάλωση συντ. παραγ.:
    $(a_{11}x_1, a_{21}x_1, a_{31}x_1, a_{41}x_1)$
  - * Δραστηριότητα 2: – Στάθμη x_2
    – Κατανάλωση συντ. παραγ.:
    $(a_{12}x_2, a_{22}x_2, a_{32}x_2, a_{42}x_2)$
  - * β΄ μέλη περιορισμών: 100% παραγωγικής ικανότητας κάθε τμήματος

Άρα:

$$
\begin{aligned}
0{,}0200x_1 + 0{,}0143x_2 &\le 100\\
0{,}0150x_1 + 0{,}0300x_2 &\le 100\\
0{,}0222x_1 \qquad\qquad &\le 100\\
0{,}0333x_2 &\le 100
\end{aligned}
$$

- Οικονομική συνάρτηση:
  - – Καθαρό εισόδημα από δραστηρ. 1: 9000x1
  - – Καθαρό εισόδημα από δραστηρ. 2: 7500x2

Άρα:

Συνολικό καθαρό εισόδημα: $\boxed{9000x_1 + 7500x_2}$

maxZ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (3)

Διευκρίνηση:

Σύμφωνα με τον πίνακα, στο Τμήμα 1 μπορούν να κατασκευαστούν με πλήρη απασχόληση, αμαξώματα ή μόνο για 5000 αυτοκίνητα DW501 ή μόνο για 7000 αυτοκίνητα DW502 ή για οποιονδήποτε κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Το καθαρό εισόδημα της επιχείρησης από την πώληση ενός αυτοκινήτου είναι:

– Για τύπο DW501: $9.000
– Για τύπο DW502: $7.500

Ζητείται να βρεθεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής, δηλ. εκείνο που μεγιστοποιεί το συνολικό καθαρό εισόδημα της επιχείρησης.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Να βρεθεί το διάνυσμα $X = (x_1, x_2)$ $x_1, x_2 \geq 0$ ώστε:

$$0{,}0200x_1 + 0{,}0143x_2 \leq 100$$

$$0{,}0150x_1 + 0{,}0300x_2 \leq 100$$

$$0{,}0222x_1 + \qquad \leq 100$$

$$0{,}0333x_2 \leq 100$$

και:

$$9000x_1 + 7500x_2 = maxZ$$

* Από όλες τις δυνατές λύσεις του συστήματος ανισοτήτων να βρεθεί εκείνη που μεγιστοποιεί την οικονομική συνάρτηση Z.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

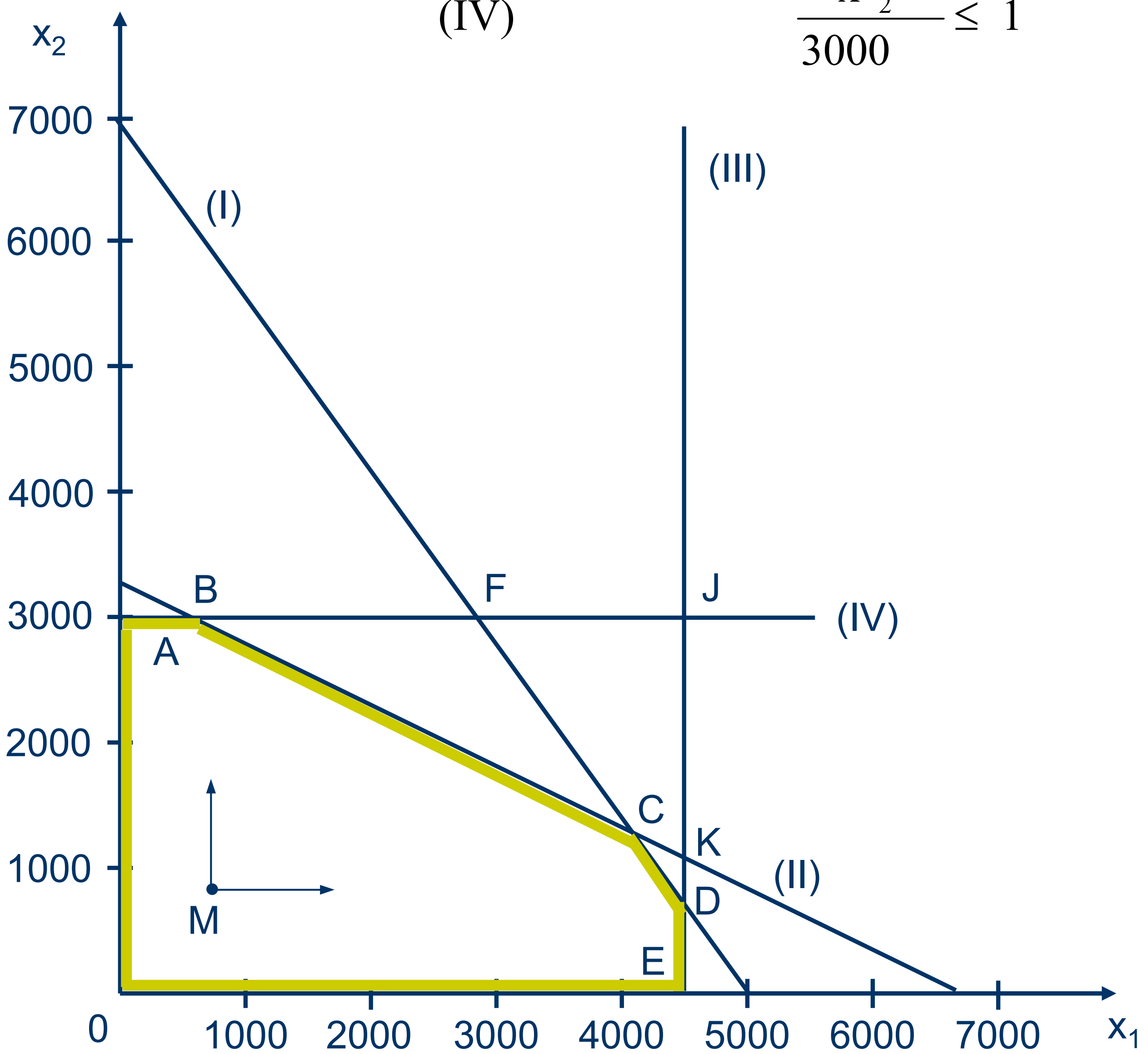
ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ (1)

(I) $$\frac{x_1}{5000} + \frac{x_2}{7000} \leq 1$$

(II) $$\frac{x_1}{6666} + \frac{x_2}{3334} \leq 1$$

(III) $$\frac{x_1}{4500} \leq 1$$

(IV) $$\frac{x_2}{3000} \leq 1$$



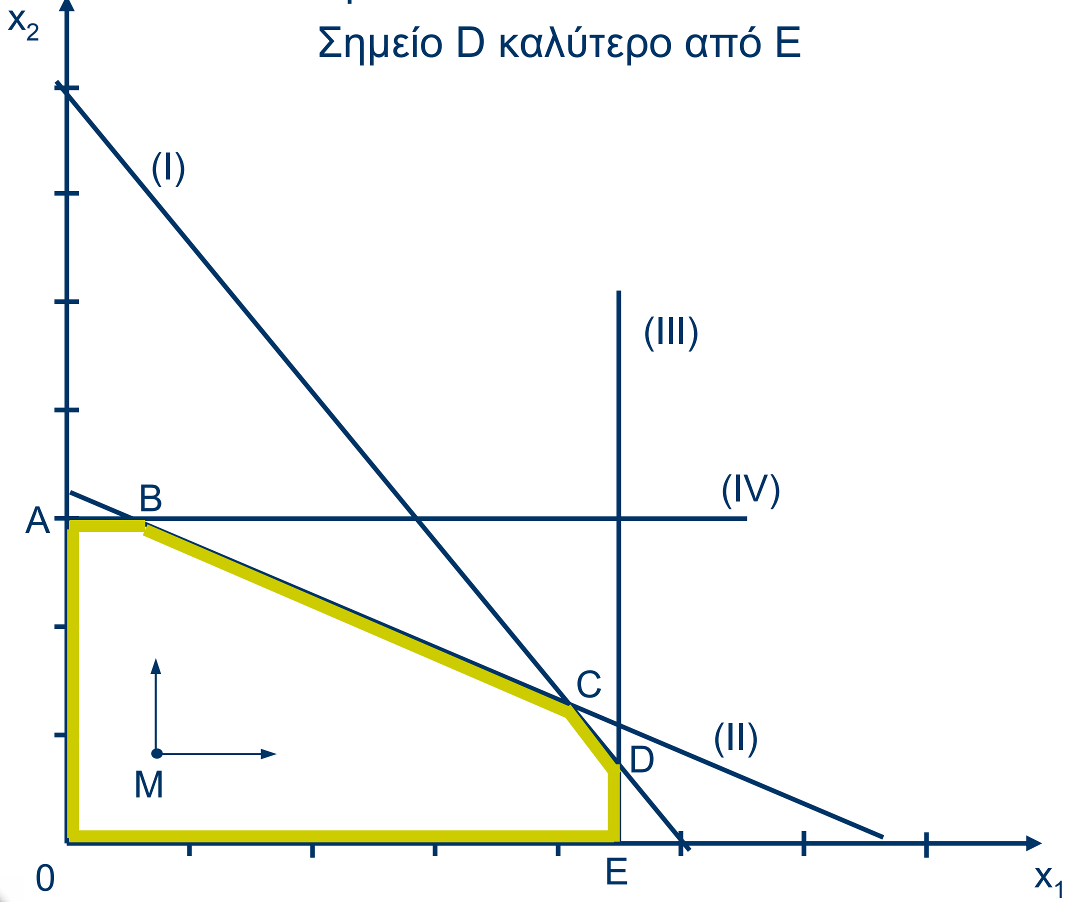
ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ (2)

- Σύνολο δυνατών λύσεων: Πολύγωνο OABCDE
- Σημείο M: Δεν μπορεί να είναι η βέλτιστη λύση γιατί αν αυξηθεί το x1 και μείνει σταθερό το x2 θα αυξηθεί η οικονομική συνάρτηση Z. Άρα:

  Η βέλτιστη λύση θα βρίσκεται στο σύνορο του πολυγώνου OABCDE.
- Σημείο E: $x_1 = 4500$ $x_2 = 0$
- Ευθεία ED: $\left.\begin{array}{l} x_1\text{: σταθερό} \\ x_2\text{: αυξάνει} \end{array}\right\} \Rightarrow Z\uparrow$

  Άρα:

  Σημείο D καλύτερο από E



ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ DEWAG: ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ (3)

- Σημείο D: $x_1 = 4500$ $x_2 = 666$
- Γραμμή CD: Πλήρης χρησιμοποίηση του Τμ. 1 ($\varepsilon_1=1$)

$$\left(\frac{\Delta Z}{\Delta x_1}\right)_{\varepsilon_1=1} = -1\cdot 9000 + \frac{7000}{5000}\cdot 7500 = 1500\$$$

Άρα: Συμφέρει η μετακίνηση προς το C.
Το C καλύτερο από το D.

- Σημείο C: $x_1 = 4074$ $x_2 = 1296$
- Γραμμή BC: Πλήρης χρησιμοποίηση του Τμ. 2 ($\varepsilon_2=1$)

$$\left(\frac{\Delta Z}{\Delta x_1}\right)_{\varepsilon_2=1} = -1\cdot 9000 + \frac{3334}{6666}\cdot 7500 = \text{-}5250\$$$

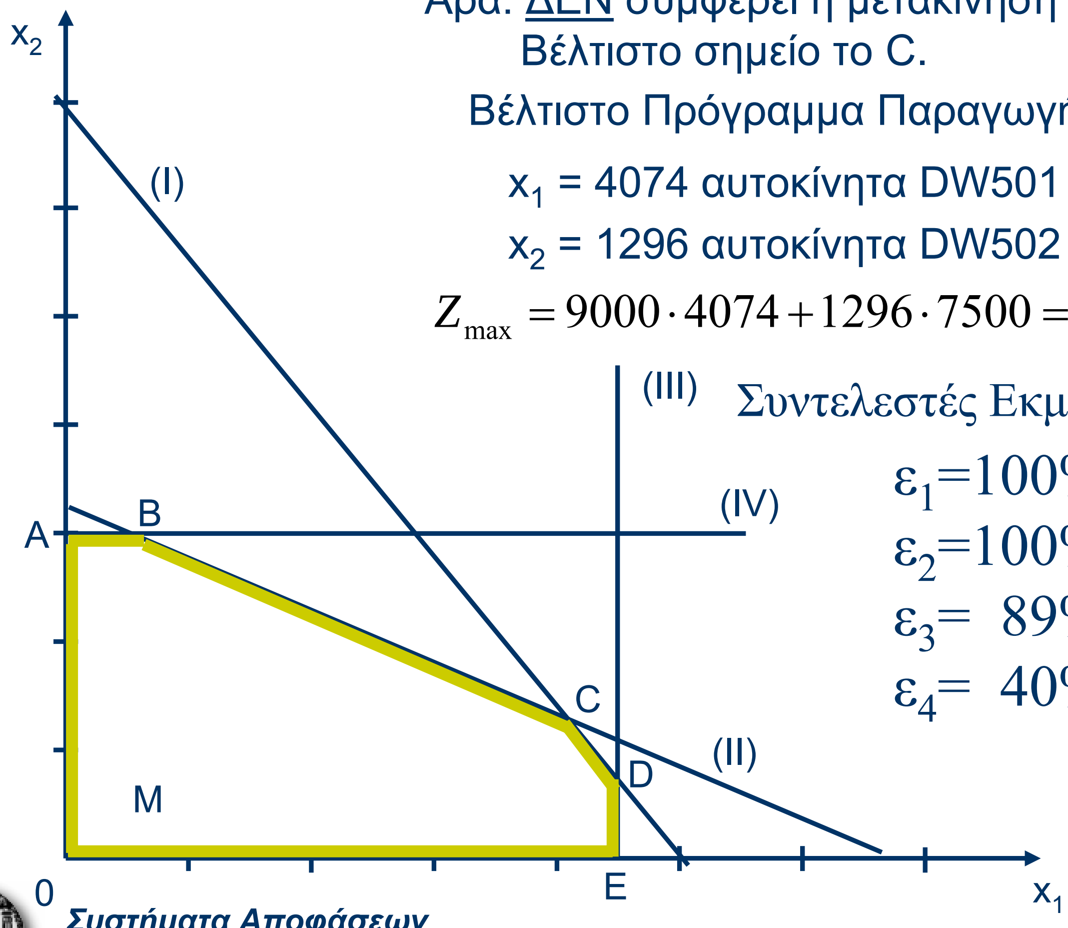
Άρα: ΔΕΝ συμφέρει η μετακίνηση προς το B.
Βέλτιστο σημείο το C.

Βέλτιστο Πρόγραμμα Παραγωγής

$x_1 = 4074$ αυτοκίνητα DW501

$x_2 = 1296$ αυτοκίνητα DW502

$$Z_{max} = 9000\cdot 4074 + 1296\cdot 7500 = 43.386.000$$

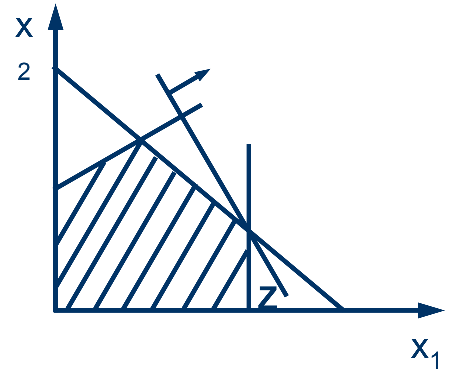


Συντελεστές Εκμετάλλευσης:

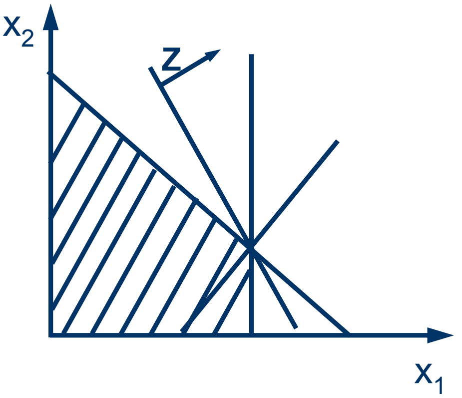
$\varepsilon_1=100\%$
$\varepsilon_2=100\%$
$\varepsilon_3=\ 89\%$
$\varepsilon_4=\ 40\%$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

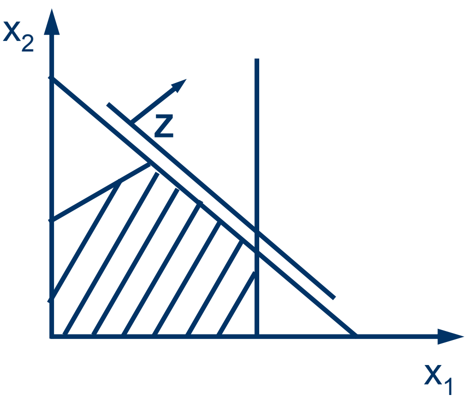
ΔΥΝΑΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΛΥΣΕΩΝ



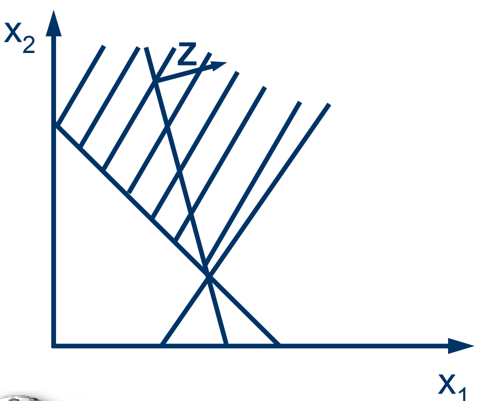
1. Ύπαρξη μοναδικού βελτίστου



2. Ύπαρξη μοναδικού βελτίστου εκφυλισμού



3. Άπειρα βέλτιστα προγράμματα



4. Δεν υπάρχει πεπερασμένο βέλτιστο

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

- Κατασκευή των ευθειών που ικανοποιούν τους περιορισμούς
- Εύρεση του συνόλου των δυνατών λύσεων
- Κατασκευή «αντιπροσωπευτικής» ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης από την κλίση της
- Μετατόπιση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης προς το βέλτιστο ώσπου να εγκαταλείψει το χώρο των δυνατών λύσεων
- Εύρεση της βέλτιστης λύσης (“optimum” σημείο)

<u>Ερώτηση</u>

Αν για οποιονδήποτε λόγο αλλάξουν κάποιες από τις παραμέτρους του προβλήματος, θα πρέπει να ακολουθηθεί εξαρχής η παραπάνω διαδικασία για εύρεση του βέλτιστου;

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ (1)

Πόσο «ευαίσθητη» είναι η βέλτιστη λύση στις αλλαγές των παραμέτρων;

ΔΗΛΑΔΗ

Αν αλλάξουν κάποιες από τις παραμέτρους του προβλήματος, συνεχίζει το ίδιο σημείο να δίνει τη βέλτιστη λύση ή όχι;

ΔΗΛΑΔΗ

Ποια είναι τα όρια μέσα στα οποία μπορούμε να κινηθούμε ώστε να μην υπάρξει αλλαγή της βέλτιστης λύσης;

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ (2)

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+ \ldots\ldots +a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+ \ldots\ldots +a_{2n}x_n \leq b_2$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+ \ldots\ldots +a_{mn}x_n \leq b_m$

$\text{opt } \Xi = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3 \ldots\ldots +C_nX_n$

*** Στην ανάλυση ευαισθησίας αλλάζουν:

- οι συντελεστές της οικονομικής συνάρτησης
- τα β΄ μέλη των περιορισμών

και μάλιστα μόνο ένας παράγοντας κάθε φορά.

Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΜΗΤΡΑ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Κάποιο μηχανουργείο έχει ειδικευτεί στην παραγωγή 2 τύπων προϊόντων. Για την κατασκευή τους απαιτείται επεξεργασία σε 3 μηχανήματα του μηχανουργείου, ως εξής:

Χρόνος επεξεργασίας ανά τεμάχιο (Μηχανο-ώρες)

Τύπος μηχανήματος	Προϊόν 1	Προϊόν 2
Μηχάνημα 1 (Τόρνος)	2	3
Μηχάνημα 2 (Φρέζα)	4	2
Μηχάνημα 3 (Πλάνη)	6	-

Το Τμήμα Πωλήσεων υπολογίζει ότι ο μέγιστος αριθμός πωλήσεων προϊόντος 2 μέσα στην εβδομάδα είναι 25 τεμάχια, ενώ για το προϊόν 1 δεν υπάρχει ανάλογος περιορισμός.

Το καθαρό κέρδος για τα προϊόντα 1 και 2 είναι 4000 Δρ. και 3000 Δρ. αντίστοιχα.

Ζητείται να προσδιορισθεί το βέλτιστο εβδομαδιαίο πρόγραμμα παραγωγής.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ:

Τεχνολογικοί Συντελεστές

Μεταβλητές Απόφασης

β΄ μέλη Περιορισμών

$$2X_1 + 3X_2 \leq 80$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 80$$
$$6X_1 \leq 80$$
$$X_2 \leq 25$$

$$\max \Xi = 4000x_1 + 3000x_2$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

Μοναδιαία Αξία Δραστηριοτήτων

Ή ΑΛΛΙΩΣ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 80 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\max \quad Z = [\,4000 \quad 3000\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ:

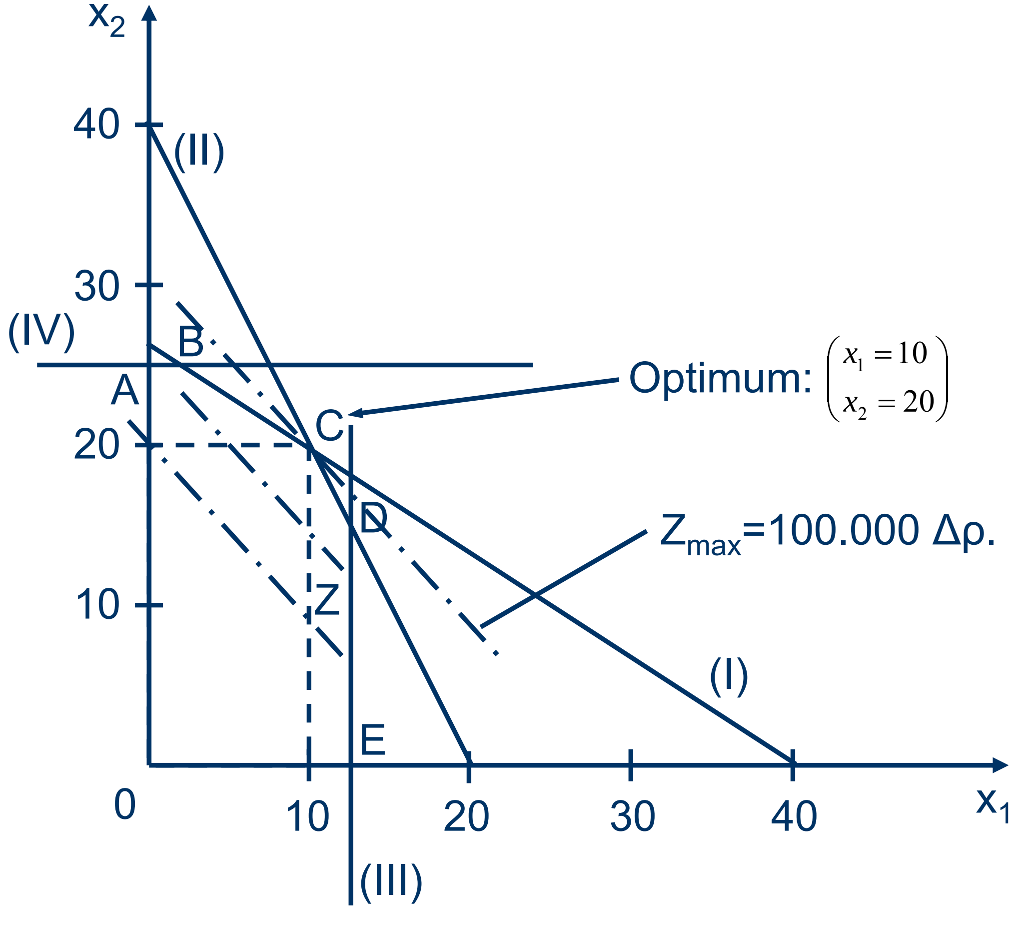
(I) $2X_1 + 3X_2 \leq 80$

(II) $4X_1 + 2X_2 \leq 80$

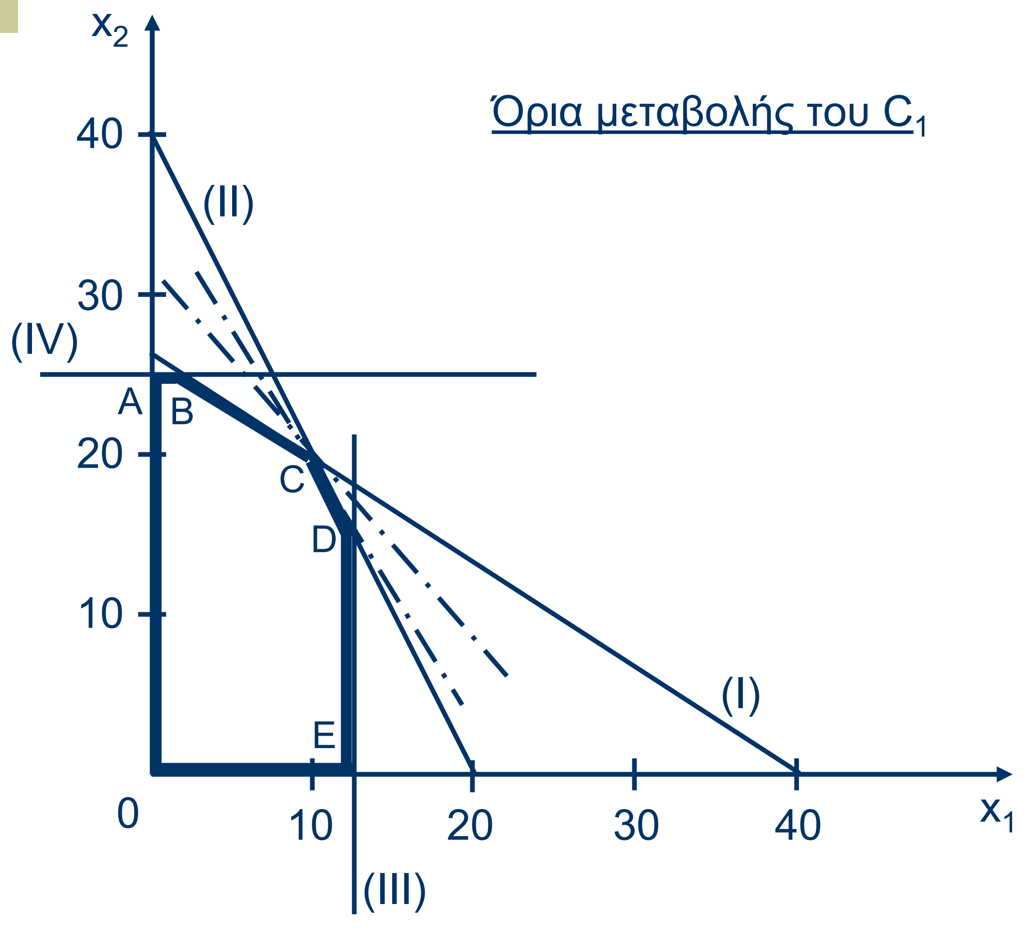
(III) $6X_1 \leq 80$

(IV) $X_2 \leq 25$

$X_1, X_2 \geq 0$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (4)



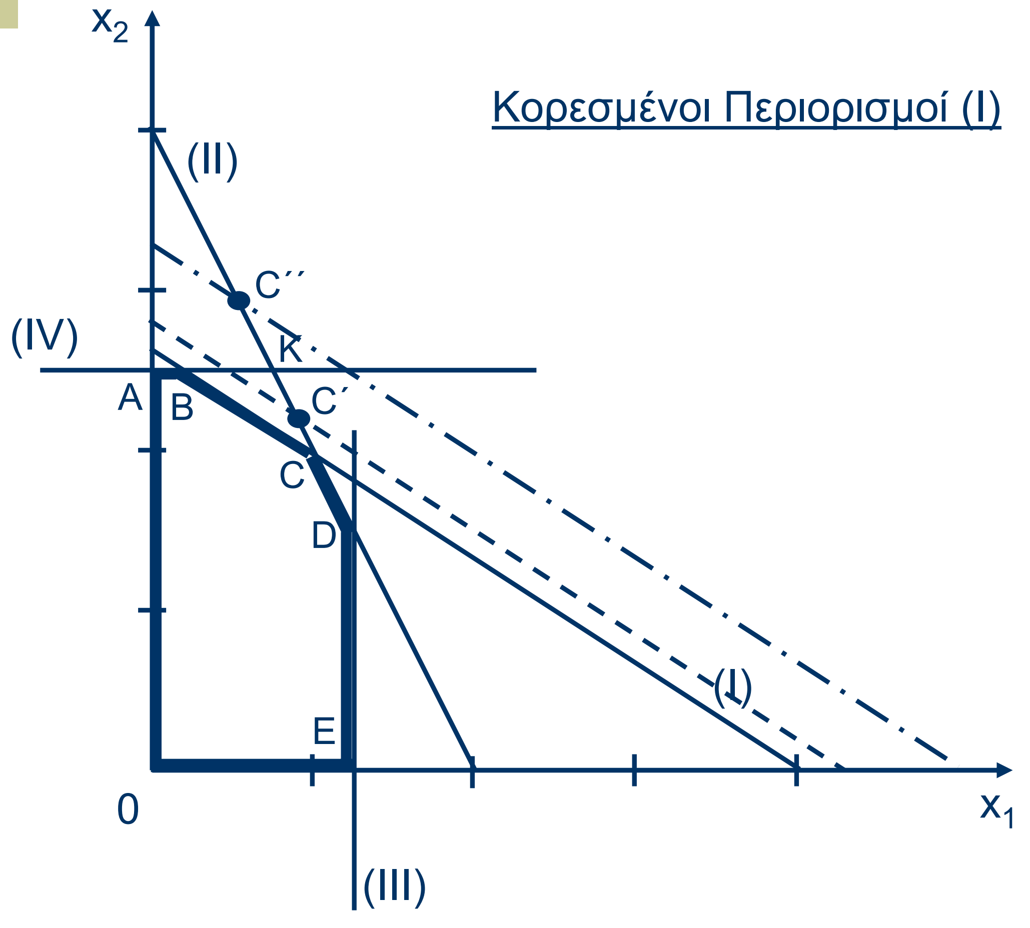
Για όσο $\lambda_{II}<\lambda_Z<\lambda_I$
η βέλτιστη λύση θα παραμένει το C (τομή των (I) και (II))

$$-2 < -\frac{C_1}{3000} < -\frac{2}{3} \rightarrow \underline{\underline{2000 < C_1 < 6000}}$$

** Δεν έχει σημασία ποια ακριβώς θα είναι η τιμή C1 (καθαρό κέρδος προϊόντος 1) αρκεί να βρίσκεται μεταξύ 2000 και 6000 Δρ. Το βέλτιστο πρόγραμμα παραμένει το ίδιο.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (5)



* Βέλτιστη λύση το C΄ (τομή πάλι των (I) και (II))

$$C' \equiv (9.75\ ,\ 20.5)$$

$$Z = 4000 \cdot 9.75 + 3000 \cdot 20.5 = 100.500\ \Delta\rho.$$

$$Z = 100.000\ \Delta\rho.$$

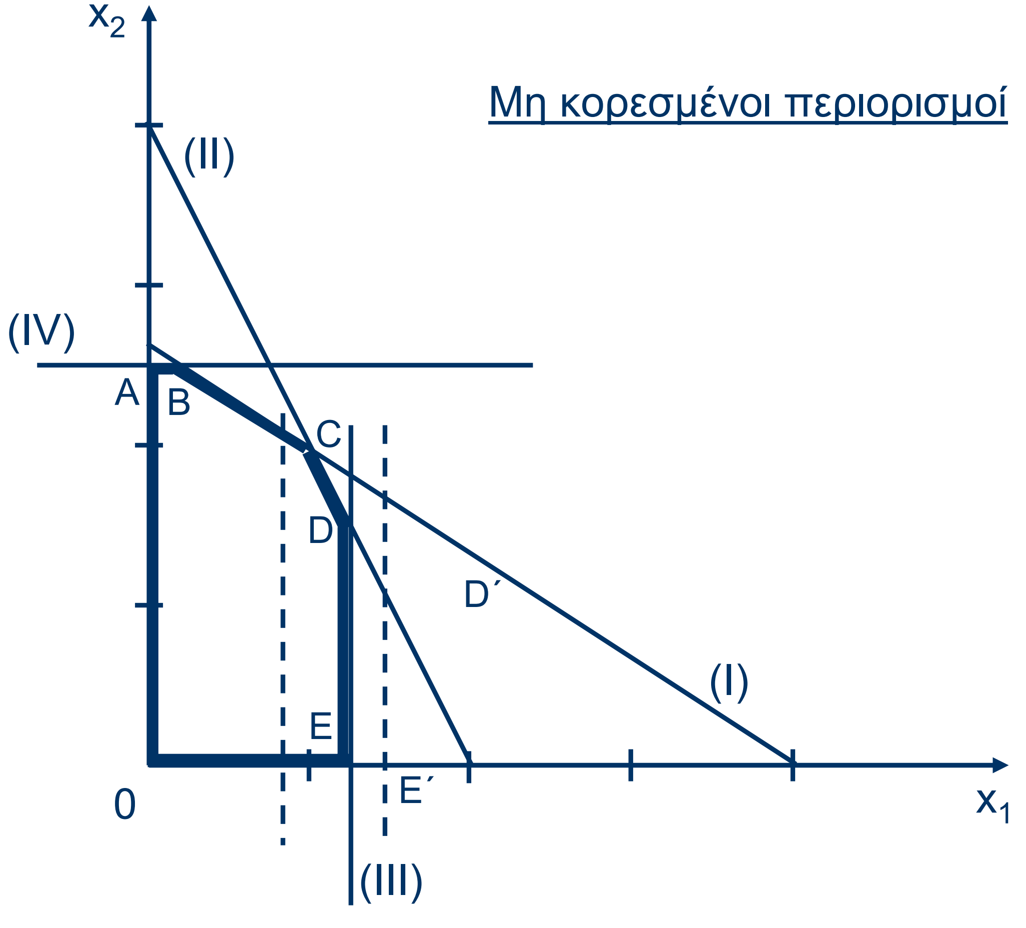
$$\Delta Z = Z' - Z = \underline{\underline{500\ \Delta\rho.}}$$

Επιπλέον κέρδος από την αύξηση της παραγωγικότητας το Τμ. I κατά 1 ώρα.

→ Επιπλέον κέρδος για αύξηση κατά 2 ώρες=2x500 Δρ.

→ Αξία της 1 ώρας του τμ. I = 500 Δρ.
(ΟΡΙΑΚΟ ΚΑΘΑΡΟ ΕΣΟΔΟ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (6)



- ✓ Τι θα συμβεί αν το τμήμα (III) αυξήσει την παραγωγική του ικανότητα κατά 1 ώρα;
- ✓ Λύση πάλι το C   ΔZ=0
- ✓ Η αξία της 1 ώρας του τμήματος III είναι 0.
- ✓ Γενικά: Η αξία των πόρων που εκφράζουν μη κορεσμένοι περιορισμοί είναι 0

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (7)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ Β΄ ΜΕΛΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

→ Κατά πόσο θα μεταβληθεί η βέλτιστη λύση αν το τμήμα Ι αυξήσει την παραγωγικότητα του κατά 1 ώρα;

(Ι) $2x_1 + 3x_2 \leq 81$

Διάκριση μεταξύ

- Κορεσμένων περιορισμών (στη βέλτιστη λύση)
  - Ι και ΙΙ
  - Στη βέλτιστη λύση ικανοποιούνται σαν ισότητες
- Μη κορεσμένων περιορισμών
  - ΙΙΙ και ΙV
  - Στη βέλτιστη λύση ικανοποιούνται σαν ανισότητες.

ΤΟ ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

- Θεωρίες δυϊσμού
- Θεώρημα Thevenin-Norton

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\min U = b_1\Pi_1 + b_2\Pi_2 + \ldots + b_m\Pi_m$$

ΔΥΑΔΙΚΟ

	X_1	X_2				X_n	
Π_1	α_{11}	a_{12}	.	.	.	a_{1n}	$\leq b_1$
Π_2	α_{21}	a_{22}	.	.	.	a_{2n}	$\leq b_2$
.	.					.	.
.	.					.	.
.	.					.	.
Π_m	a_{m1}	a_{m2}				a_{mn}	$\leq b_m$
	$\geq$	$\geq$				$\geq$	
	c_1	c_2	.	.	.	c_n	

$$\max Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

ΠΡΩΤΕΥΟΝ

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΣΗΜΑΣΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΔΥΑΔΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η μεταβλητή $Π_i$ του Δυαδικού:

- αντιστοιχεί στον <u>περιορισμό</u> που ισχύει για τον -i- πόρο
- εκφράζει την <u>αξία</u> της μονάδας του πόρου αυτού για την επιχείρηση (στη βέλτιστη λύση)
- συμπίπτει εννοιολογικά με την τιμή του <u>καθαρού οριακού κέρδους</u> (Shadow price) που υπολογίζεται στην ανάλυση ευαισθησίας
- είναι ≠0 αν αντιστοιχεί σε κορεσμένο περιορισμό και =0 αν αντιστοιχεί σε μη κορεσμένο

Η βέλτιστη τιμή της οικονομικής συνάρτησης του δυαδικού συμπίπτει με εκείνη του πρωτεύοντος προβλήματος, δηλ.:

$$\min U = \max Z$$

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

Παράδειγμα: Έστω ότι κάποια επιχείρηση ενδιαφέρεται να νοικιάσει τις εγκαταστάσεις του Μηχανουργείου. Ζητείται να βρεθεί το ποσόν που πρέπει να πληρώνει σαν νοίκι.

- Έστω ότι πληρώνει: $Π_1$ για 1 ώρα του Τμ. Ι
  $Π_2$ για 1 ώρα του Τμ. ΙΙ
  $Π_3$ για 1 ώρα του Τμ. ΙΙΙ
  $Π_4$ για 1 ώρα του Τμ. ΙV

- Η παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου 1 χρειάζεται:
  2 ώρες στο Τμ. Ι
  4 ώρες στο Τμ. ΙΙ
  6 ώρες στο Τμ. ΙΙΙ
  0 ώρες στο Τμ. ΙV

- Άρα η παραγωγή 1 μονάδας του προϊόντος 1 στοιχίζει:

$$2Π_1+4Π_2+6Π_3+0Π_4$$

  Και αυτό είναι το ποσόν που κερδίζει το μηχανουργείο από την παραγωγή 1 μονάδας προϊόντος 1.

- Αν το κατασκευάζαμε μόνο του το μηχανουργείο θα είχε κέρδος 4000 Δρ. Άρα πρέπει:

$$2Π_1+4Π_2+6Π_3+0Π_4 \geq 4000$$

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

- Ομοίως και για το προϊόν 2 θα ισχύει:

$$3Π_1+2Π_2+0Π_3+1Π_4 \geq 3000$$

- Η καινούρια επιχείρηση θα χρησιμοποιήσει:

  80 ώρες στο Τμ. I
  80 ώρες στο Τμ. II
  80 ώρες στο Τμ. III
  25 ώρες στο Τμ. IV

- Το συνολικό της επομένως κόστος (νοίκι) για όλη τη βδομάδα θα είναι:

$$80Π_1+80Π_2+80Π_3+25Π_4$$

- Το κόστος αυτό η επιχείρηση ενδιαφέρεται να ελαχιστοποιήσει, δηλ.:

$$\min Z_u = 80Π_1+80Π_2+80Π_3+25Π_4$$

- Καταλήξαμε δηλαδή σε ένα άλλο πρόβλημα Γ.Π.:

$$\begin{aligned} \min Z_u &= 80Π_1+80Π_2+80Π_3+25Π_4 \\ & 2Π_1+4Π_2+6Π_3 \geq 4000 \\ & 3Π_1+2Π_2+Π_4 \geq 3000 \end{aligned}$$

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)

<u>Πρωτεύον Πρόβλημα</u>

$$2X_1 + 3X_2 \le 80$$
$$4X_1 + 2X_2 \le 80$$
$$6X_1 \le 80$$
$$X_2 \le 25$$

$$\max Z = 4000X_1 + 3000X_2$$

<u>Δυαδικό Πρόβλημα</u>

$$2\Pi_1 + 4\Pi_2 + 6\Pi_3 \ge 4000$$
$$3\Pi_1 + 2\Pi_2 + \Pi_4 \ge 3000$$

$$\min U = 80\Pi_1 + 80\Pi_2 + 80\Pi_3 + 25\Pi_4$$

ΠΡΩΤΕΥΟΝ	ΔΥΑΔΙΚΟ
1. Περιορισμοί ≤	Μεταβλητές Πi
2. Μεταβλητές X_j	Περιορισμοί ≥
3. Στήλες	Γραμμές
4. β΄ μέλη περιορισμών	Συντελ. οικονομ. συναρτ.
5. Συντελεστές οικονομ. συναρτ.	β΄ μέλη περιορισμών
6. max Z	min U

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (1)

Άσκηση 15

Δραστηριότητες: – Παραγωγή αυτοκ. DW501: x_1

– Παραγωγή αυτοκ. DW502: x_2

Καθαρά έσοδα: – Από DW501 9000

– Από DW502 7500

Περιορισμοί - Αγαθά: Δυναμικότητες των διαφόρων τμημάτων:

(I) Τμ. Ψυχρής Εξέλασης

(II) Τμ. Συναρμολόγησης Μηχανών

(III) Τμ. Τελικής Συναρμολόγησης DW-501

(IV) Τμ. Τελικής Συναρμολόγησης DW-502

Μαθηματικό μοντέλο:

$$\max Z = 9000x_1 + 7500x_2$$

με περιορισμούς:

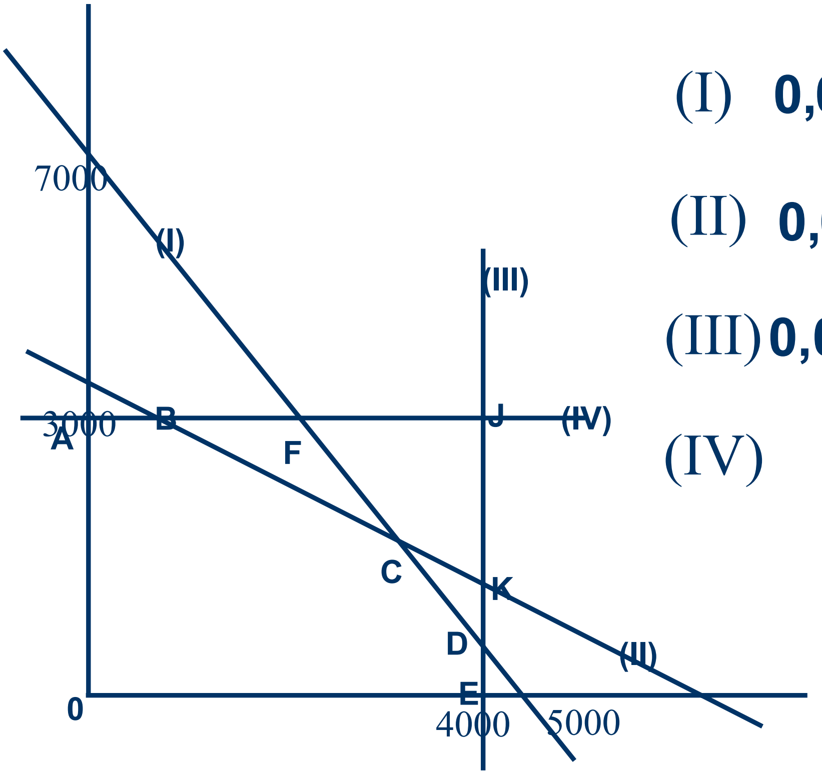
(I) $0{,}0200x_1 + 0{,}0143x_2 \leq 100$

(II) $0{,}0150x_1 + 0{,}0300x_2 \leq 100$

(III) $0{,}0222x_1 + \quad \leq 100$

(IV) $0{,}0333x_2 \leq 100$

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (2)



$$\text{(I)} \quad 0{,}02x_1 + 0{,}0143x_2 \leq 100$$

$$\text{(II)} \quad 0{,}015x_1 + 0{,}03x_2 \leq 100$$

$$\text{(III)} \quad 0{,}0222x_1 \leq 100$$

$$\text{(IV)} \quad 0{,}0333x_2 \leq 100$$

1 Εύρεση Βέλτιστης Λύσης

Κλίσεις ευθειών : $\lambda_z = -\dfrac{c_1}{c_2} = -\dfrac{9000}{7000} = -1{,}2$

$$\lambda_I = -\frac{0{,}02}{0{,}0143} = -1{,}4$$

$$\lambda_{II} = -\frac{0{,}015}{0{,}03} = -0{,}5$$

$$\lambda_{III} = -\infty \qquad \lambda_{IV} = 0$$

Βέλτιστη λύση το C (I ∩ II) : $x_1 = 4073$

$x_2 = 1297$

maxZ = 46.384.500

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (3)

2 Αύξηση δυναμικότητας τμ. (Ι) κατά 1%

(Ι) $\Rightarrow$ $0{,}02x_1 + 0{,}0143x_2 \le 101$ | x_1=4151

(ΙΙ) $0{,}015x_1 + 0{,}03\ x_2 \le 100$ | x_2=1258

(Λύση: πάλι στο C)

maxZ΄ = 46.794.000$

ΑΡΑ:

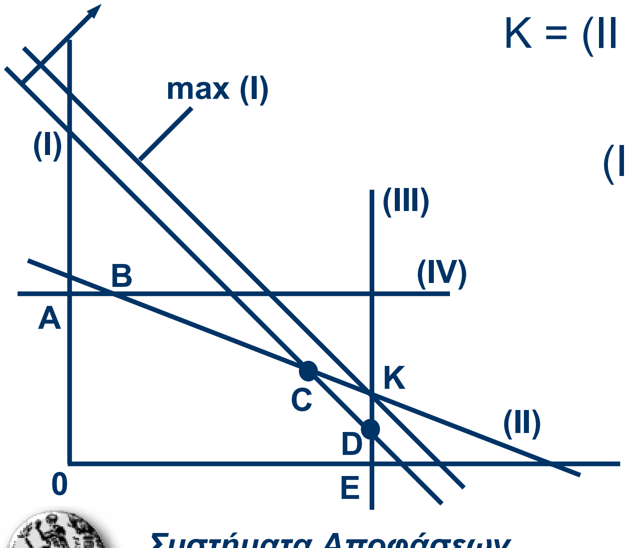
ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ ΚΑΘΑΡΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ Ζ ΓΙΑ ΑΥΞΗΣΗ 1% ΤΟΥ ΠΟΡΟΥ (Ι) → 409.500$

ΟΡΙΑΚΟ ΚΑΘΑΡΟ ΕΣΟΔΟ ΠΟΡΟΥ (Ι) (SHADOW PRICE)

- Σημασία: Δείχνει την αξία που έχει το 1% του πόρου (Τμήματος) Ι στην βέλτιστη λύση

3 Όρια μεταβολής δυναμικότητας τμ. (Ι)

Η SHADOW PRICE ισχύει για όσο ο περιορ. (Ι) μετέχει στη βέλτιστη λύση, δηλ. μέχρι το Κ:



K = (II $\cap$ III) = x_1 = 4546

x_2 = 1060

(Ι) $\Rightarrow$ $0{,}02x_1 + 0{,}0143x_2 = 106{,}078$

ΑΡΑ: Για αύξηση της δυναμ. κατά 6,078%

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (4)

4 Αύξηση δυναμικότητας τμ. (ΙΙ) κατά 1%

(Ι) $0{,}02x_1 + 0{,}0143x_2 = 100$ | $x_1=4036$

(ΙΙ) $\Rightarrow$ $0{,}015x_1 + 0{,}03\ x_2 = 101$ | $x_2=1349$

(Λύση πάλι το C)

maxZ΄ = 46.441.500$

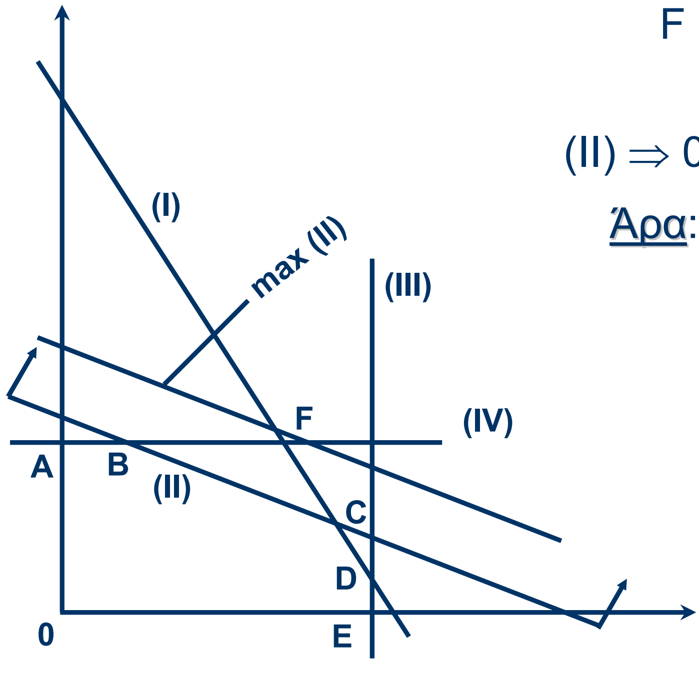
ΑΡΑ:

Οριακό καθαρό έσοδο {αύξηση της οικονομικής συνάρτησης για 1% αύξηση του β΄ μέλους περ. (ΙΙ)}

57.000

5 Όρια μεταβολής δυναμικότητας τμ. (ΙΙ)

Η SHADOW PRICE του τμ. (ΙΙ) παραμένει η ίδια έως ότου ο περιορισμός (ΙΙ) ξεπεράσει το F:



$F = (I \cap IV) = x_1 = 2834$

$x_2 = 3030$

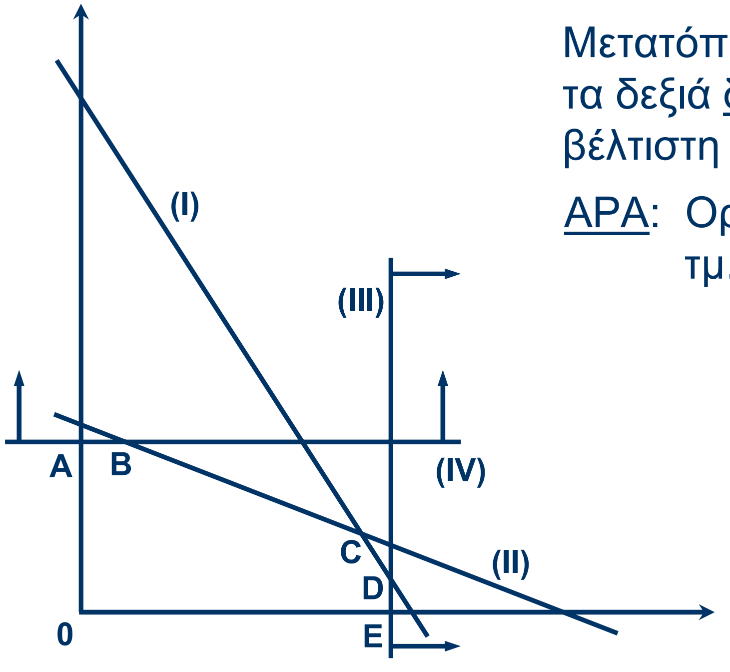
(ΙΙ) $\Rightarrow 0{,}015x_1 + 0{,}03x_2 = 133{,}41$

Άρα: Για αύξηση της δυναμικότητας κατά 33,41%

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (5)

6 Αύξηση δυναμικότητας τμ. (ΙΙΙ) κατά 1%



Μετατόπιση της (ΙΙΙ) προς τα δεξιά δεν επηρεάζει τη βέλτιστη λύση.

ΑΡΑ: Οριακό καθαρό έσοδο τμ. ΙΙΙ = 0

7 Αύξηση δυναμικότητας τμ. (IV) κατά 1%

Μετατόπιση της (IV) προς τα πάνω δεν επηρεάζει τη βέλτιστη λύση

Άρα: Οριακό καθαρό έσοδο τμ. IV = 0

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η αξία για την επιχείρηση των περιορισμών που δεν είναι κορεσμένοι στη βέλτιστη λύση είναι 0.

8 Αύξηση δυναμικότητας τμ. (ΙΙ) κατά 10% (Υπερωρίες) με κόστος 600.000$

Οριακό καθαρό έσοδο τμ. (ΙΙ) = 57.000 $\Rightarrow$

ΚΕΡΔΟΣ για αύξηση 10%	=	570.000	ΔΕΝ
ΚΟΣΤΟΣ	=	600.000	ΣΥΜΦΕΡΕΙ

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (6)

9 Παραγωγή αυτοκινήτου DW-503

Καθαρό εισόδημα: 7000 $

Κατανάλωση δυναμικότητας τμημάτων:

Τμ. (I) : 1/ 6000

Τμ. (II) : 1/ 5000

Τμ. (III) : 1/9000

Τμ. (IV) : ---

10 Το μοντέλο Γ.Π.

$$\max Z = 9000x_1 + 7500x_2 + 7000x_3$$

$$0{,}02x_1 + 0{,}0143x_2 + 0{,}0167x_3 \le 100$$

$$0{,}015x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}02x_3 \le 100$$

$$0{,}0222x_1 + 0{,}0111x_3 \le 100$$

$$0{,}0333x_2 \le 100$$

11 1 αυτοκίνητο DW-503 απαιτεί:

0,0167% τμ. I, αξίας 409.500 = 6838,65

0,02% τμ. II, αξίας 57.000 = 1140,00

0,0111% τμ. III, αξίας 0 = 0

0% τμ. IV, αξίας 0 = 0

Κόστος 7.978,65

Άρα: Δεν συμφέρει.

Πρέπει να πωλείται τουλάχιστον 7978,65

ΔΥΑΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ DEWAG: ΕΠΕΚΤΑΣΗ (7)

12 Δυαδικό πρόβλημα

$$\min Z = 100\pi_1 + 100\pi_2 + 100\pi_3 + 100\pi_4$$

$$0{,}02\pi_1 + 0{,}015\pi_2 + 0{,}0222\pi_3 \geq 9000$$

$$0{,}02\pi_1 + 0{,}015\pi_2 + 0{,}0222\pi_4 \geq 7500$$

Μεταβλητές π_i => ΑΞΙΑ (για την επιχείρηση) 1 μονάδας του τμήματος i.

13 Λύση δυαδικού προβλήματος

Περιορισμοί (ΙΙΙ), (ΙV) ακόρεστοι => $\pi_3, \pi_4 = 0$

Περιορισμοί (Ι), (ΙΙ) κορεσμένοι => $\pi_1, \pi_2 \neq 0$

Άρα στην βέλτιστη λύση:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}0200\pi_1 + 0{,}015\pi_2 = 9000 \\ 0{,}0143\pi_1 + 0{,}03\pi_2 = 7500 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi_1 = 408.500 \\ \pi_2 = 55.253 \end{array}$$

Ίδιες με τις Shadow Prices των περιορισμών (Ι), (ΙΙ)