



Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χωρική Ανάλυση

Ενότητα 11: Γεωστατιστικές μέθοδοι χωρικής παρεμβολής: Kriging

Κυριακίδης Φαίδων

Τμήμα Γεωγραφίας

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Γεωστατιστική Χωρική Παρεμβολή: Η Μέθοδος Απλού Kriging

Φαίδων Κυριακίδης

Καθηγητής

phkyriakidis@geo.aegean.gr



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
Λόφος Πανεπιστημίου, 81100 Μυτιλήνη

Χωρική Ανάλυση

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

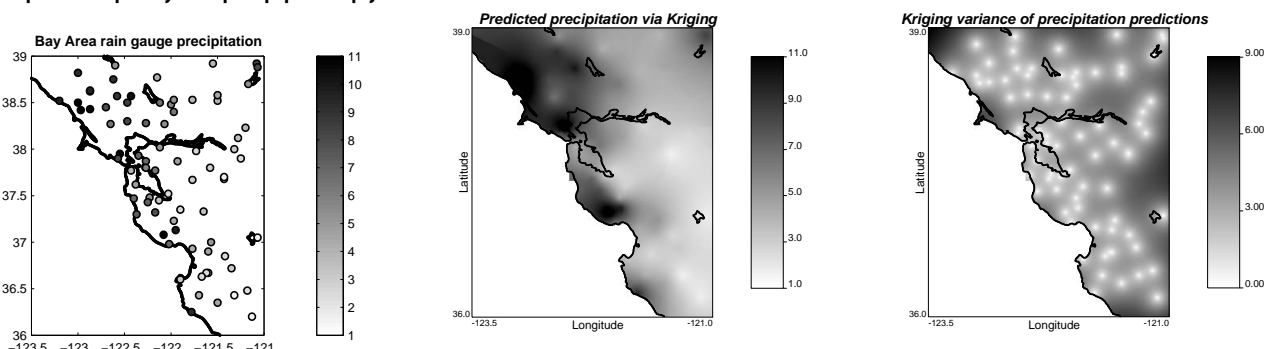
Εισαγωγικές Έννοιες

Εισαγωγή



Δεδομένα: Μετρήσεις χωρικής μεταβλητής σε διάφορες μονάδες παρατήρησης (σταθμοί, ρίχει). Συχνά, οι μονάδες παρατήρησης είναι λίγες και διεσπαρμένες στο χώρο, π.χ., βροχομετρικοί σταθμοί

Στόχος: Εκτίμηση/πρόβλεψη, μέσω της χωρικής παρεμβολής, άγνωστων τιμών της μεταβλητής σε τυχαία σημεία στο χώρο, και ποσοτικοποίηση της σχετικής αβεβαιότητας. Συχνά, τα σημεία εκτίμησης αντιστοιχούν στους κόμβους ενός κανονικού καννάβου, οπότε ορίζεται μία "επιφάνεια" παρεμβαλλόμενων τιμών και μία "επιφάνεια" αβεβαιότητας παρεμβολής



Σκοπός του μαθήματος: Μία εισαγωγή στη γεωστατιστική μέθοδο χωρικής παρεμβολής Kriging. Θα δωθεί έμφαση στο Απλό Kriging, όπου η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής σε κάθε σημείο (παρατήρησης ή εκτίμησης) θεωρείται γνωστή



Συμβολισμός και Ορολογία

Δεδομένα: Σύνολο N μετρήσεων $\{z(s_n), n = 1, \dots, N\}$ μιας χωρικής μεταβλητής Z , που λήφθηκαν σε N μονάδες παρατήρησης $\{s_n, n = 1, \dots, N\}$, π.χ., s_n είναι το σημείο παρατήρησης n . Οι N αυτές μετρήσεις μπορούν να συγκεντρωθούν σε ένα $(N \times 1)$ διάνυσμα μετρήσεων $\mathbf{z}_s = [z(s_n), n = 1, \dots, N]^T$

Στόχος: Πρόβλεψη/εκτίμηση, με βάση τις N γνωστές μετρήσεις, ενός συνόλου M άγνωστων τιμών $\{z(t_m), m = 1, \dots, M\}$ της μεταβλητής Z σε M σημεία $\{t_m, m = 1, \dots, M\}$, π.χ., στους κόμβους ενός κανονικού καννάβου

Ορολογία:

- ▶ συχνά, οι μετρήσεις καλούνται δεδομένα πηγής (source data), ενώ οι άγνωστες τιμές καλούνται τιμές στόχου (target values), και ανάλογα οι αντίστοιχες μονάδες παρατήρησης ή εκτίμησης – source and target zones or supports
- ▶ θεωρείται, προς το παρόν, ότι τόσο τα δεδομένα πηγής όσο και οι τιμές στόχου αφορούν σε μία και μόνο μεταβλητή Z , και οι αντίστοιχες μονάδες παρατήρησης είναι σημειακές
- ▶ τέλος, θεωρείται (για χάρη ευκολίας) ότι όλες οι N μετρήσεις συνεισφέρουν στην εκτίμηση της άγνωστης τιμής $z(t_m)$, δηλαδή, παρουσιάζεται η περίπτωση της καθολικής (global) χωρικής παρεμβολής

Αναμενόμενες Τιμές και Διαταράξεις ή Αποκλίσεις



Γνωστές αναμενόμενες τιμές ή επιδράσεις πρώτου βαθμού:

- ▶ στα N σημεία παρατήρησης $\{s_n, n = 1, \dots, N\}$ ορίζεται ένα $(N \times 1)$ διάνυσμα αναμενόμενων τιμών $\boldsymbol{\mu}_s = [\mu(s_n), n = 1, \dots, N]^T$, όπου $\mu(s_n) = \mathbb{E}\{Z(s_n)\}$ είναι ο μακροπρόθεσμος μέσος όρος ("κλιματολογία") της μεταβλητής Z στο σημείο s_n
- ▶ στο σημείο εκτίμησης t_m ορίζεται η αναμενόμενη τιμή $\mu(t_m) = \mathbb{E}\{Z(t_m)\}$, ή ο μακροπρόθεσμος μέσος όρος ("κλιματολογία") της μεταβλητής Z στο σημείο t_m

Διαταράξεις ή αποκλίσεις από αναμενόμενες τιμές:

- ▶ στα N σημεία παρατήρησης $\{s_n, n = 1, \dots, N\}$ ορίζεται ένα $(N \times 1)$ διάνυσμα διαταράξεων $\mathbf{r}_s = [r(s_n), n = 1, \dots, N]^T = \mathbf{z}_s - \boldsymbol{\mu}_s$, όπου $r(s_n) = z(s_n) - \mu(s_n)$ είναι η απόκλιση (παρατήρηση - αναμενόμενη τιμή) στο σημείο s_n
- ▶ στο σημείο εκτίμησης t_m ορίζεται η άγνωστη διατάραξη $r(t_m) = z(t_m) - \mu(t_m)$

Αν δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν τα στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\mu}_s$ και η τιμή $\mu(t_m)$, τότε μπορεί κανείς να ορίσει μια χωρικά σταθερή αναμενόμενη τιμή $\mu(s_n) = \mu = \mu(t_m)$, $\forall n, m$, βάσει, για παράδειγμα, του μέσου όρου των N μετρήσεων



Γραμμική Χωρική Παρεμβολή

διαταράξεων, αφού απαλειφθούν οι τοπικές διαφορές σε επιδράσεις πρώτου βαθμού

Γραμμική παρεμβολή: Η προβλεπόμενη διατάραξη $\hat{r}(t_m)$ στο σημείο εκτίμησης t_m υπολογίζεται ως ένα σταθμισμένο άθροισμα των γνωστών N διαταράξεων $\{r(s_n) = [z(s_n) - \mu(s_n)], n = 1, \dots, N\}$:

$$\hat{r}(t_m) = \sum_{n=1}^N w_m(s_n) r(s_n) \quad \text{και} \quad \hat{z}(t_m) = \mu(t_m) + \hat{r}(t_m)$$

$w_m(s_n)$ είναι η συνεισφορά (βάρος) της γνωστής διατάραξης $r(s_n)$ στην εκτίμηση της άγνωστης διατάραξης $r(t_m)$ στο σημείο εκτίμησης t_m

Προσδιορισμός βαρών παρεμβολής: Τα N βάρη $\{w_{mn}, n = 1, \dots, N\}$ είναι συνήθως συνάρτηση της χωρικής διάταξης των σημείων πηγής και στόχου, και ειδικότερα, συνάρτηση των N αποστάσεων στόχου-πηγών $\{d_{mn}, n = 1, \dots, N\}$ μεταξύ του σημείου εκτίμησης t_m και των N σημείων παρατήρησης. *Με άλλα λόγια, πρώτα τα βάρη υπολογίζονται με βάση τη χωρική διάταξη των σημείων εκτίμησης και παρατήρησης, και κατόπιν αντιστοιχίζονται με τις παρατηρούμενες μετρήσεις ή διαταράξεις...*

Γεωστατιστική Χωρική Παρεμβολή



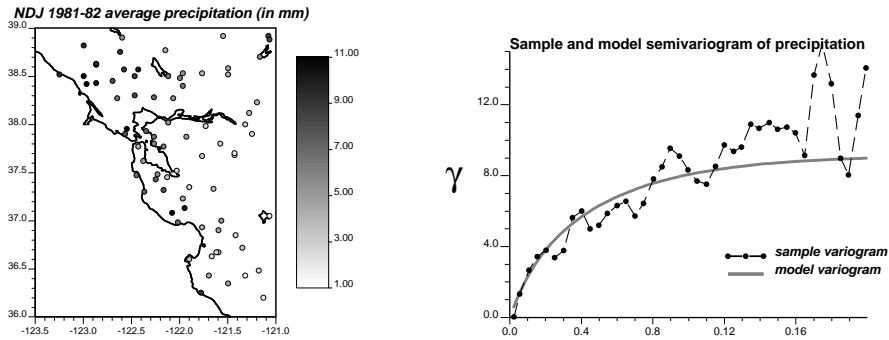
Διαδικασία:

1. θεωρείται ότι οι αναμενόμενες τιμές μεταβάλλονται στο χώρο; Υπάρχει πληροφορία ικανή να διαφοροποιήσει χωρικά τις αναμενόμενες τιμές;
 - ▶ αν ναι, υπολόγισε τις διαταράξεις στα σημεία παρατήρησης από τις γνωστές αναμενόμενες τιμές
 - ▶ αν όχι, θεώρησε ότι όλες οι αναμενόμενες τιμές είναι ίσες ($\mu =$ χωρικά σταθερή, κοινή αναμενόμενη τιμή)
2. υπολογισμός του εμπειρικού ημιβαριογράμματος των διαταράξεων = διακριτή μορφή μιας (αναποδογυρισμένης) συνάρτησης πυρήνα. Ολόκληρη η συνάρτηση δεν είναι συνήθως διαθέσιμη, λόγω του μικρού αριθμού δεδομένων
3. προσαρμογή ενός έγκυρου μοντέλου ημιβαριογράμματος στο εμπειρικό ημιβαριόγραμμα. Με άλλα λόγια, εκτίμηση των παραμέτρων (επίδραση κόκκου, οροφή και εύρος) ενός θεωρητικού μοντέλου ημιβαριογράμματος
4. εφαρμογή της μεθόδου του απλού Kriging για εκτίμηση των άγνωστων διαταράξεων και της σχετικής αβεβαιότητας
5. πρόσθεση των αναμενόμενων τιμών σε κάθε σημείο εκτίμησης για να μετασχηματιστούν τα προβλεπόμενα διαταράξεις σε προβλεπόμενες τιμές της μεταβλητής Z

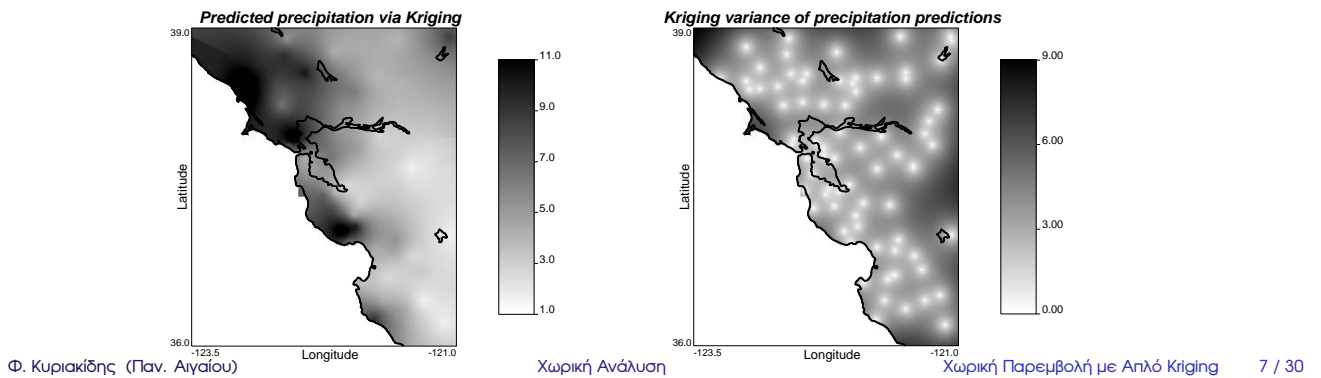


Παράδειγμα Χωρικής Παρεμβολής Kriging

Μετρήσεις βροχόπτωσης και ημιβαριόγραμμα:



Επιφάνεια παρεμβολής Kriging και επιφάνεια σχετικής αβεβαιότητας:

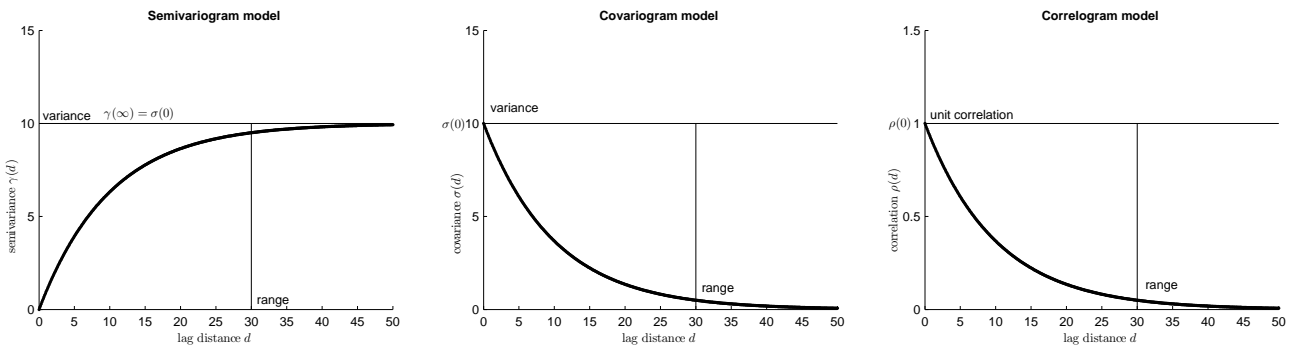


Φ. Κυριακίδης (Παν. Αιγαίου)

Χωρική Ανάλυση

Χωρική Παρεμβολή με Απλό Kriging

Μοντέλο Ημιβαριογράμματος και Συσχετογράμματος



Σχέσεις μεταξύ μοντέλων: όταν η οροφή $\sigma(0) = \gamma(\infty) = \sigma^2 = \mathbb{V}\{Z\}$ του μοντέλου ημιβαριογράμματος $\gamma(d)$ είναι πεπερασμένη:

▶ Semivariogram \rightarrow covariogram:

$$\sigma(d) = \sigma(0) - \gamma(d)$$

▶ Covariogram \rightarrow correlogram:

$$\rho(d) = \frac{\sigma(d)}{\sigma(0)}$$

▶ Semivariogram \rightarrow correlogram:

$$\rho(d) = 1 - \frac{\gamma(d)}{\sigma(0)}$$

▶ Covariogram \rightarrow semivariogram:

$$\gamma(d) = \sigma(0) - \sigma(d)$$



Η Μέθοδος Simple Kriging

- ▶ γνωστή αναμενόμενη τιμή $\mu(s_n)$ – “κλιματολογία” – και διακύμανση $\sigma^2(t_m)$ – διασπορά – της χωρικής μεταβλητής Z σε οποιαδήποτε σημείο (πηγή και στόχο). Συχνά, λόγω της απουσίας επαρκούς πληροφορίας, γίνεται η παραδοχή ότι τα στατιστικά αυτά είναι σταθερά σε όλη την περιοχή μελέτης, $\mu(s_n) = \mu = \mu(t_m)$ και $\sigma^2(t_m) = \sigma^2 = \sigma^2(s_n)$. Αυτό συνεπάγεται την απουσία περιβαλλοντικών παραγόντων (επιδράσεων πρώτης τάξης)
- ▶ πρόβλεψη $\hat{z}(t_m)$ της άγνωστης τιμής $z(t_m)$ της μεταβλητής Z σε ένα σημείο στόχο t_m ως ένα σταθμισμένο άθροισμα N διαταράξεων – $(z(s_n) - \mu)$ – στα N σημεία παρατήρησης s_n + αναμενόμενη τιμή μ της μεταβλητής στο σημείο στόχο t_m
- ▶ τα βάρη λαμβάνουν υπόψη:
 - ▶ συσχέτιση/συνδιακύμανση μεταξύ των σημείων πηγής και στόχου,
 - ▶ πλεονασμό (συσχέτιση) μεταξύ των σημείων πηγής, και
 - ▶ μορφή, π.χ., εκθετική, του μοντέλου ημιβαριογράμματος ή συσχετογράμματος
- ▶ διακύμανση σφάλματος εκτίμησης $\hat{\sigma}^2(t_m)$ = αξιοπιστία της εκτίμησης στο σημείο στόχο t_m . Η αρχική διακύμανση $\sigma^2(t_m)$ της μεταβλητής στο σημείο στόχο t_m μειώνεται λόγω της “σταθμισμένης” επιρροής των “κοντινών” σημείων πηγής:
 - ▶ “κοντά” = στατιστική εγγύτητα (συσχέτιση)
 - ▶ “σταθμισμένο” = λαμβάνοντας υπ όψη τον πλεονασμό των σημείων πηγής (βαρη SK)

Παρεμβαλλόμενη Τιμή SK



$$[\hat{z}(t_m) - \mu(t_m)] = \sum_{n=1}^N w_m(s_n)[z(s_n) - \mu(s_n)] = \mathbf{w}_m^T \mathbf{r}_s = \mathbf{w}_m^T [\mathbf{z}_s - \boldsymbol{\mu}_s]$$

- ▶ $\mathbf{w}_m = [w_m(s_n), n = 1, \dots, N]^T$: $(N \times 1)$ διάνυσμα των βρών που ανατίθενται σε N σημεία πηγής για πρόβλεψη στο σημείο στόχου t_m
- ▶ $\mathbf{r}_s = [z(s_n) - \mu(s_n), n = 1, \dots, N]^T$: $(N \times 1)$ διάνυσμα των διαταράξεων από γνωστές αναμενόμενες τιμές $\mu(s_n)$ στα σημεία πηγής

$$\underbrace{[\hat{z}(t_m) - \mu(t_m)]}_{\hat{r}(t_m)} = \underbrace{[w_m(s_1) \cdots w_m(s_n) \cdots w_m(s_N)]}_{\mathbf{w}_m^T} \underbrace{\begin{bmatrix} z(s_1) - \mu(s_1) \\ \vdots \\ z(s_n) - \mu(s_n) \\ \vdots \\ z(s_N) - \mu(s_N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_s}$$

Χρήση μοντέλου ημιβαριογράμματος $\gamma(d)$ για τον καθορισμό των N βαρών.
 Συνήθως, χρησιμοποιείται το μοντέλο συνδιακύμανσης $\sigma(d)$
 για λόγους υπολογιστικής ευκολίας



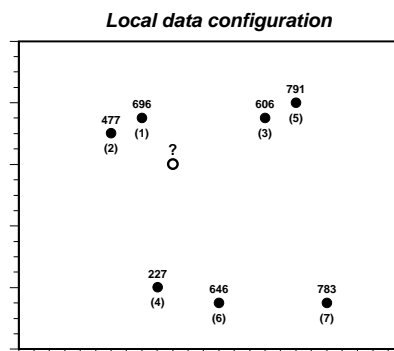
Απαιτούμενη Πληροφορία για Kriging (1)

Αποστάσεις από σημεία πηγής σε σημείο στόχο και μεταξύ σημείων πηγής:

$$\mathbf{d}_m = \begin{bmatrix} d_{1m} \\ \vdots \\ d_{nm} \\ \vdots \\ d_{Nm} \end{bmatrix} \quad \text{ανδ} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & d_{1n'} & \cdots & d_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & d_{nN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & \cdots & d_{Nn'} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ όπως σε οποιαδήποτε άλλη μέθοδο χωρικής παρεμβολής, υπολογίζονται οι αποστάσεις των N σημείων πηγής s_n από το σημείο στόχου t_m , δηλαδή λαμβάνεται υπόψη η σχετική διάταξη των σημείων πηγής και στόχου **Υποσημείωση**: Το διάνυσμα \mathbf{d}_m αλλάζει από ένα σημείο στόχου t_m σε ένα άλλο, εξού και ο δείκτης m
- ▶ σε αντίθεση με άλλες μεθόδους χωρικής παρεμβολής, η μέθοδος Kriging λαμβάνει υπόψη και τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων πηγής, δηλαδή τη διάταξη των σημείων πηγής. **Υποσημείωση**: Στην καθολική (global) παρεμβολή, ο πίνακας \mathbf{D} των αποστάσεων μεταξύ των σημείων πηγής παραμένει ο ίδιος για όλα τα σημεία στόχου

Απαιτούμενη Πληροφορία για Kriging (2)



$(N \times 1)$ διάνυσμα αποστάσεων σημείων πηγής από σημείο στόχου:

$$\mathbf{d}_m = [3.61 \quad 4.47 \quad 6.71 \quad 8.06 \quad 8.94 \quad 9.49 \quad 13.45]^T$$

ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΪΟ n' ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ \mathbf{d}_m ΕΪΝΑΙ d_{nm}

$(N \times N)$ ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΗΜΕΪΩΝ ΠΗΓΗΣ:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.00 & 2.24 & 8.00 & 11.05 & 10.05 & 13.00 & 16.97 \\ 2.24 & 0.00 & 10.05 & 10.44 & 12.17 & 13.04 & 17.80 \\ 8.00 & 10.05 & 0.00 & 13.04 & 2.24 & 12.37 & 12.65 \\ 11.05 & 10.44 & 13.04 & 0.00 & 15.00 & 4.12 & 11.05 \\ 10.05 & 12.17 & 2.24 & 15.00 & 0.00 & 13.93 & 13.15 \\ 13.00 & 13.04 & 12.37 & 4.12 & 13.93 & 0.00 & 7.00 \\ 16.97 & 17.80 & 12.65 & 11.05 & 13.15 & 7.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΪΟ n, n' ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ \mathbf{D} ΕΪΝΑΙ $d_{nn'}$



Απαιτούμενη Πληροφορία για Kriging (3)

Από πίνακες αποστάσεων σε πίνακες μοντέλων συνδιακύμανσης: Οποιαδήποτε τιμή απόστασης d_{nm} και $d_{nn'}$, δηλ. οποιαδήποτε στοιχείο των πινάκων \mathbf{d}_m και \mathbf{D} , μπορεί να μετατραπεί, μέσω του μοντέλου συνδιακύμανσης, σε μια τιμή συνδιακύμανσης $\sigma(d_{nm})$ και $\sigma(d_{nn'})$

Συνδιακυμάνσεις από πηγή σε στόχο και από πηγή σε πηγή:

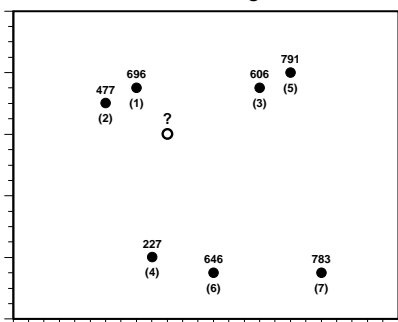
$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma(d_{1m}) \\ \vdots \\ \sigma(d_{nm}) \\ \vdots \\ \sigma(d_{Nm}) \end{bmatrix} \quad \text{ανδ} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(0) & \cdots & \sigma(d_{1n'}) & \cdots & \sigma(d_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(d_{n1}) & \cdots & \sigma(0) & \cdots & \sigma(d_{nN}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(d_{N1}) & \cdots & \sigma(d_{Nn'}) & \cdots & \sigma(0) \end{bmatrix}$$

- ▶ δiάνυσμα συνδιακύμανσης από σημεία πηγής σε σημεία στόχου σ_m : $(N \times 1)$ δiάνυσμα με τιμές μοντέλου συνδιακύμανσης $\sigma(d_{nm})$ ανάμεσα σε N σημεία πηγής και t_m σημεία στόχου
- ▶ πίνακας συνδιακύμανσης ανάμεσα σε σημεία πηγής Σ : $(N \times N)$ πίνακας με τιμές μοντέλου συνδιακύμανσης $\sigma(d_{nn'})$ ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σημεία πηγής που βρίσκονται σε απόσταση $d_{nn'}$

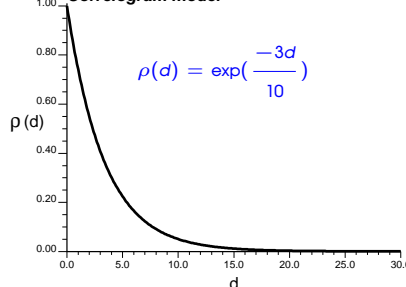
Απαιτούμενη Πληροφορία για Kriging (4)



Local data configuration



Correlogram model



$$\begin{bmatrix} 3.61 \\ 4.47 \\ 6.71 \\ 8.06 \\ 8.94 \\ 9.49 \\ 13.45 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \begin{bmatrix} \exp(-3 \times 3.61/10) \\ \exp(-3 \times 4.47/10) \\ \exp(-3 \times 6.71/10) \\ \exp(-3 \times 8.06/10) \\ \exp(-3 \times 8.94/10) \\ \exp(-3 \times 9.49/10) \\ \exp(-3 \times 13.45/10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.26 \\ 0.13 \\ 0.09 \\ 0.07 \\ 0.06 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

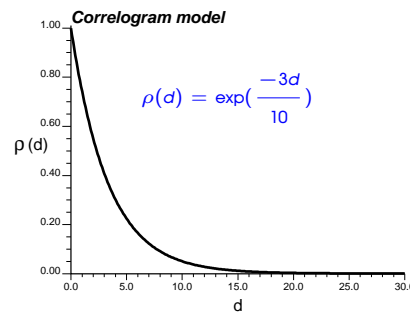
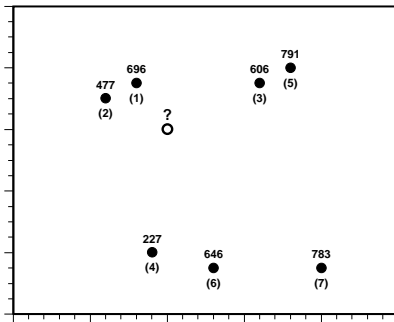
\mathbf{d}_m $\sigma_m = \text{sill} \exp(-3\mathbf{d}_m/\text{range})$

Αυτές θα ήταν οι τιμές των βαρών,
αν δεν είχε ληφθεί υπόψη η συσχέτιση μεταξύ δεδομένων πηγής



Απαιτούμενη Πληροφορία για Kriging (5)

Local data configuration



0.00	2.24	8.00	11.05	10.05	13.00	16.97	1.00	0.51	0.09	0.04	0.05	0.02	0.01
2.24	0.00	10.05	10.44	12.17	13.04	17.80	0.51	1.00	0.05	0.04	0.03	0.02	0.00
8.00	10.05	0.00	13.04	2.24	12.37	12.65	0.09	0.05	1.00	0.02	0.51	0.02	0.02
11.05	10.44	13.04	0.00	15.00	4.12	11.05	0.04	0.04	0.02	1.00	0.01	0.29	0.04
10.05	12.17	2.24	15.00	0.00	13.93	13.15	0.05	0.03	0.51	0.01	1.00	0.02	0.02
13.00	13.04	12.37	4.12	13.93	0.00	7.00	0.02	0.02	0.02	0.29	0.02	1.00	0.12
16.97	17.80	12.65	11.05	13.15	7.00	0.00	0.01	0.00	0.02	0.04	0.02	0.12	1.00

D → $\Sigma = \text{sill} \exp(-3D/\text{range})$

Ο πίνακας Σ ποσοτικοποιεί την αλληλεπίδραση (πλεονασμό) μεταξύ των δεδομένων πηγής

Απαιτούμενη Πληροφορία για Kriging (6)



Συνδιακύμανση από πηγή σε στόχο και από πηγή σε πηγή:

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma(d_{1m}) \\ \vdots \\ \sigma(d_{nm}) \\ \vdots \\ \sigma(d_{Nm}) \end{bmatrix} \quad \text{ανδ} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(0) & \cdots & \sigma(d_{1n'}) & \cdots & \sigma(d_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(d_{n1}) & \cdots & \sigma(0) & \cdots & \sigma(d_{nN}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(d_{N1}) & \cdots & \sigma(d_{Nn'}) & \cdots & \sigma(0) \end{bmatrix}$$

- ▶ διάνυσμα συνδιακύμανσης μεταξύ σημείων πηγής και στόχου σ_m : περιγράφει τη στατιστική "εγγύτητα" (συσχέτιση) μεταξύ δεδομένων πηγής και αγνώστων τιμών στόχου $z(t_m)$. Η συσχέτιση αυτή είναι συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των σημείων πηγής και στόχου και όχι της της πραγματικής (άγνωστης) τιμής στόχου $z(t_m)$. Όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές του διανύσματος σ_m , τόσο ισχυρότερη είναι η προβλεπτική ικανότητα των δεδομένων πηγής (στην περίπτωση που κάθε δεδομένο πηγής έχει εξεταστεί ξεχωριστά)
- ▶ πίνακας συνδιακύμανσης μεταξύ σημείων πηγής Σ : περιγράφει τον πλεονασμό των δεδομένων πηγής. Για θετική χωρική αυτοσυσχέτιση ισχύει ότι όσο πιο ομαδοποιημένα (clustered) είναι τα σημεία πηγής, τόσο πιο πλεονάζοντα είναι τα δεδομένα τους (λιγότερη περιεχόμενη πληροφορία). Μια ομαδοποιημένη διάταξη των σημείων πηγής μεταφράζεται σε μεγαλύτερες τιμές στον πίνακα Σ



Σύστημα Εξισώσεων Απλού Kriging (1)

$$\begin{bmatrix} \sigma(s_1) & \cdots & \sigma(s_1, s_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(s_N, s_1) & \cdots & \sigma(s_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m(s_1) \\ \vdots \\ w_m(s_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(s_1, t_m) \\ \vdots \\ \sigma(s_N, t_m) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma \mathbf{w}_m = \boldsymbol{\sigma}_m$$

- ▶ ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους (τα βάρη \mathbf{w}_m) για την πρόβλεψη τιμών στο σημείο t_m . Υπάρχουν M τέτοια συστήματα για M σημεία στόχου, εφόσον το $\boldsymbol{\sigma}_m$ αλλάζει από ένα σημείο στόχου σε ένα άλλο
- ▶ μια εκδοχή του συστήματος κανονικών εξισώσεων που χρησιμοποιείται σε αρκετές εφαρμογές γραμμικής παλινδρόμησης. Για το Kriging, η εξαρτημένη μεταβλητή αντιστοιχεί στο σημείο στόχου t_m και υπάρχουν N προβλεπτικές μεταβλητές (με χωρική υστέρηση) που αντιστοιχούν στα N σημεία πηγής
- ▶ η μέθοδος Kriging είναι επίσης γνωστή με διάφορα ονόματα σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, π.χ., collocation στις αποτυπώσεις, Yule-Walker εξισώσεις σε μοντέλα χρονοσειρών, Wiener πρόβλεψη στην ηλεκτρική μηχανική, αντικειμενική παρεμβολή στις ατμοσφαιρικές επιστήμες
- ▶ κατά τη 2ου-βαθμού στασιμότητα: $\sigma(s_n) = \sigma(0)$, $\sigma(s_n, s_{n'}) = \sigma(0)\rho(d_{nn'})$ και

$$\sigma(s_n, t_m) = \sigma(0)\rho(d_{nm}), \text{ και προκύπτει ότι τα βάρη δεν εξαρτώνται από την οροφή } \sigma(0)$$

Φ. Κυριακίδης (Παν. Αιγαίου)

Χωρική Ανάλυση

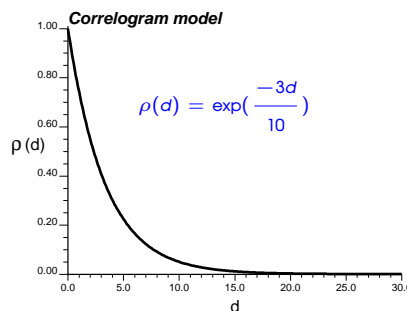
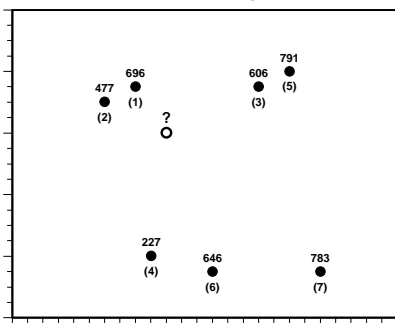
Χωρική Παρεμβολή με Απλό Kriging

17 / 30

Σύστημα Εξισώσεων Απλού Kriging (2)



Local data configuration



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.00 & 0.51 & 0.09 & 0.04 & 0.05 & 0.02 & 0.01 \\ 0.51 & 1.00 & 0.05 & 0.04 & 0.03 & 0.02 & 0.00 \\ 0.09 & 0.05 & 1.00 & 0.02 & 0.51 & 0.02 & 0.02 \\ 0.04 & 0.04 & 0.02 & 1.00 & 0.01 & 0.29 & 0.04 \\ 0.05 & 0.03 & 0.51 & 0.01 & 1.00 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.29 & 0.02 & 1.00 & 0.12 \\ 0.01 & 0.00 & 0.02 & 0.04 & 0.02 & 0.12 & 1.00 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} w_m(s_1) \\ w_m(s_2) \\ w_m(s_3) \\ w_m(s_4) \\ w_m(s_5) \\ w_m(s_6) \\ w_m(s_7) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.26 \\ 0.13 \\ 0.09 \\ 0.07 \\ 0.06 \\ 0.02 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_m}$$

το στοιχείο n, n' του πίνακα Σ είναι $\sigma_{nn'} = 1 \times \exp(-3 \times d_{nn'} / 10)$



Επίλυση Συστήματος Εξισώσεων Απλού Kriging (1)

$$\begin{bmatrix} w_m(s_1) \\ \vdots \\ w_m(s_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(s_1) & \cdots & \sigma(s_1, s_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(s_N, s_1) & \cdots & \sigma(s_N) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma(s_1, t_m) \\ \vdots \\ \sigma(s_N, t_m) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{w}_m = \Sigma^{-1} \boldsymbol{\sigma}_m}$$

- ▶ το διάνυσμα βαρών \mathbf{w}_m προκύπτει από την επίλυση ενός διαφορετικού συστήματος για κάθε σημείο στόχου t_m , εφόσον τα στοιχεία του $\boldsymbol{\sigma}_m$ αλλάζουν από το ένα σημείο στόχου στο άλλο
- ▶ το σύστημα έχει μια μοναδική λύση (υπάρχει ένα και μόνο ένα διάνυσμα βαρών \mathbf{w}_m) αν και μόνο αν ο πίνακας συνδιακύμανσης μεταξύ σημείων πηγής Σ είναι θετικά ορισμένος. Για 2ης-τάξης στασιμότητα, αυτό σημαίνει ότι ένα έγκυρο μοντέλο συνδιακύμανσης $\sigma(d; \theta)$, π.χ., εκθετικό, με θ να περιέχει την οροφή και το εύρος, χρησιμοποιείται για τη συμπλήρωση του Σ : σε αυτήν την περίπτωση το $\sigma(d; \theta) = \sigma(0)\rho(d; \theta)$ και τα βάρη δεν εξαρτώνται από την οροφή $\sigma(0)$:

$$\begin{bmatrix} w_m(s_1) \\ \vdots \\ w_m(s_N) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma(0)} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho(d_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(d_{N1}) & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \sigma(0) \begin{bmatrix} \rho(d_{1m}) \\ \vdots \\ \rho(d_{Nm}) \end{bmatrix}$$

Φ. Κυριακίδης (Παν. Αιγαίου)

Χωρική Ανάλυση

Χωρική Παρεμβολή με Απλό Kriging

19 / 30

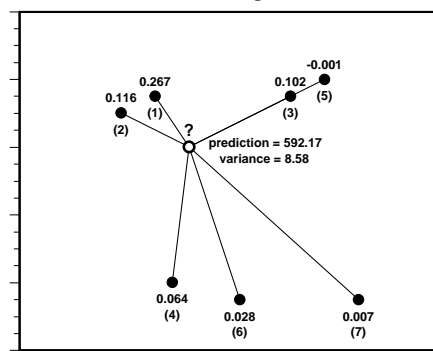
Χωρική Παρεμβολή με τη Μέθοδο Kriging

Επίλυση Συστήματος Εξισώσεων Απλού Kriging (2)



$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_m(s_1) \\ w_m(s_2) \\ w_m(s_3) \\ w_m(s_4) \\ w_m(s_5) \\ w_m(s_6) \\ w_m(s_7) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.36 & -0.69 & -0.09 & -0.02 & 0.00 & 0.00 & -0.01 \\ -0.69 & 1.35 & 0.00 & -0.02 & 0.00 & -0.01 & 0.01 \\ -0.09 & 0.00 & 1.36 & -0.01 & -0.69 & -0.01 & -0.01 \\ -0.02 & -0.02 & -0.01 & 1.09 & 0.00 & -0.32 & -0.01 \\ 0.00 & 0.00 & -0.69 & 0.00 & 1.35 & -0.01 & -0.01 \\ 0.00 & -0.01 & -0.01 & -0.32 & -0.01 & 1.11 & -0.12 \\ -0.01 & 0.01 & -0.01 & -0.01 & -0.01 & -0.12 & 1.02 \end{bmatrix}}_{\Sigma^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.26 \\ 0.13 \\ 0.09 \\ 0.07 \\ 0.06 \\ 0.02 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_m}$$

SK weights



αρχικό διάνυσμα βαρών ($\mathbf{w}_m = \boldsymbol{\sigma}_m$) τροποποιημένο από τον πίνακα Σ^{-1} που εμπεριέχει τον πλεονασμό των δεδομένων π.χ., $w_m(s_1) = 0.27$ αντί $\rho(d_{1m}) = 0.34$



Οριακές Τιμές Βαρών Απλού Kriging

$$\begin{bmatrix} w_m(s_1) \\ \vdots \\ w_m(s_N) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma(0)} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho(d_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(d_{N1}) & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \sigma(0) \begin{bmatrix} \rho(d_{1m}) \\ \vdots \\ \rho(d_{Nm}) \end{bmatrix}$$

- ▶ αν οι αποστάσεις μεταξύ σημείων πηγής $d_{nn'}$ είναι μεγαλύτερες από το εύρος του συσχετογράμματος, τότε $\rho(d_{nn'}) = 0$, και $\Sigma = \sigma(0)\mathbf{I}$, ο $(N \times N)$ μοναδιαίος πίνακας διαβαθμισμένος κατά $\sigma(0)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $w_m(s_n) = \rho(d_{nm})$, δηλ., βάρη = συσχετίσεις μεταξύ πηγών και στόχου
- ▶ γενικά, $\Sigma \neq \sigma(0)\mathbf{I}$, π.χ., οι αποστάσεις μεταξύ σημείων πηγής είναι μικρότερες του εύρους του συσχετογράμματος, συνεπώς ο πίνακας Σ^{-1} μεταβάλλει τα αρχικά βάρη σ_m . Π.χ., η επιρροή (βάρη) σημείων πηγής σε συστάδες μειώνεται
- ▶ για σημεία πηγής "απομακρυσμένα" (πέραν του εύρους του συσχετογράμματος) από τα σημεία στόχο t_m , $\rho(d_{nm}) = 0$ και $w_m(s_n) = 0, \forall n$. Δηλ., όλα τα βάρη είναι ίσα με 0
- ▶ για πρόβλεψη σε σημείο πηγής, $t_m \equiv s_n$, το διάνυσμα πηγής στόχου σ_m είναι το ίδιο με τη n -ιοστή στήλη σ_n του πίνακα Σ . Έτσι προκύπτει $w_m(s_n) = 1$ αν $s_n \equiv t_m$, και $w_m(s_n) = 0$ διαφορετικά. Δηλ., μόνο το σημείο πηγής που συμπίπτει με το σημείο στόχο λαμβάνει μη μηδενικό (= 1) βάρος

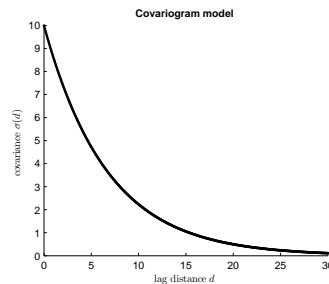
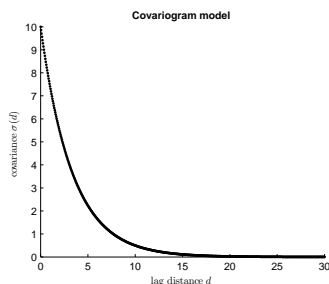
Μοντέλα Συνδιακύμανσης και Βάρη Απλού Kriging (1)



Δύο μοντέλα συνδιακύμανσης με διαφορετικό εύρος:

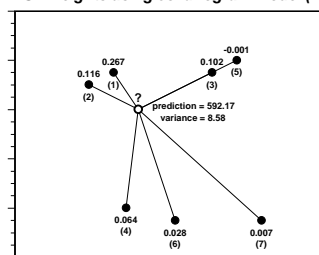
A: $\sigma(d) = 10 \exp\left(\frac{-3d}{10}\right)$

B: $\sigma(d) = 10 \exp\left(\frac{-3d}{20}\right)$

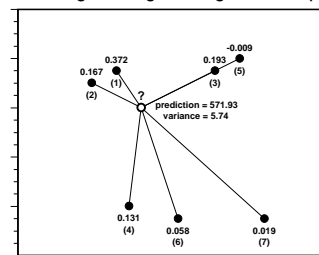


Δύο σύνολα βαρών Simple Kriging:

SK weights using covariogram model (A)



SK weights using covariogram model (B)



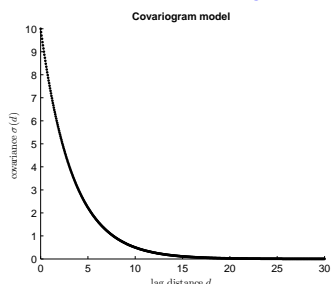
για μικρότερο εύρος (αριστερά) τα βάρη τείνουν στο 0



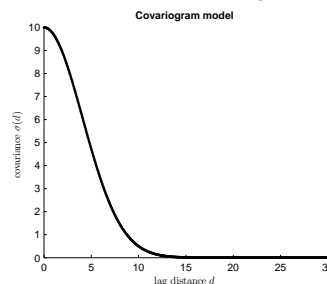
Μοντέλα Συνδιακύμανσης και Βάρη Απλού Kriging (2)

Δύο μοντέλα συνδιακύμανσης με διαφορετική μορφή:

$$\mathbf{A}: \sigma(d) = 10 \exp\left(\frac{-3d}{10}\right)$$

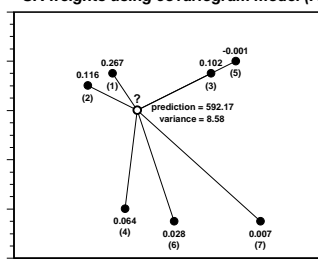


$$\mathbf{B}: \sigma(d) = 10 \exp\left(\frac{-3d^2}{10^2}\right)$$

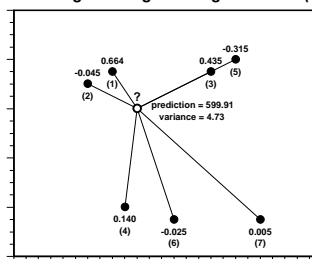


Δύο σύνολα βαρών Simple Kriging:

SK weights using covariogram model (A)



SK weights using covariogram model (B)



Τα Gaussian μοντέλα συνδιακύμανσης αποδίδουν μεγαλύτερα βάρη σε γειτονικά δεδομένα.

Είναι πιθανή η εμφάνιση αρνητικών βαρών

Προβλεπόμενη Τιμή και Διακύμανση Kriging (1)



Εφόσον τα βάρη του Απλού Kriging υπολογιστούν ως $\mathbf{w}_m = \Sigma^{-1} \sigma_m$, χρησιμοποιούνται στη συνέχεια στις παρακάτω εξισώσεις για να υπολογιστεί η πρόβλεψη $\hat{z}(t_m)$ και η σχετική διακύμανση $\hat{\sigma}(t_m)$ σφάλματος πρόβλεψης (αβεβαιότητα)

Προβλεπόμενη τιμή:

$$\hat{z}(t_m) = \mu(t_m) + \mathbf{w}_m^T \mathbf{r}_s = \mu(t_m) + [w_m(s_1) \cdots w_m(s_N)] \begin{bmatrix} z(s_1) - \mu(s_1) \\ \vdots \\ z(s_N) - \mu(s_N) \end{bmatrix}$$

Διακύμανση σφάλματος πρόβλεψης:

$$\hat{\sigma}(t_m) = \sigma(t_m) - \mathbf{w}_m^T \sigma_m = \sigma(t_m) - [w_m(s_1) \cdots w_m(s_N)] \begin{bmatrix} \sigma(s_1, t_m) \\ \vdots \\ \sigma(s_N, t_m) \end{bmatrix}$$

$$\hat{z}(t_m) = \mu(t_m) + \sum_{n=1}^N w_m(s_n) [z(s_n) - \mu(s_n)] \text{ αν}\delta \hat{\sigma}(t_m) = \sigma(t_m) - \sum_{n=1}^N w_m(s_n) \sigma(s_n, t_m)$$



Προβλεπόμενη Τιμή και Διακύμανση Kriging (2)

Κατά τη 2-ης τάξης στασιμότητα, όπου $\mu(s_n) = \mu = \mu(t_m), \forall n, m$

Προβλεπόμενη τιμή:

$$\begin{aligned}\hat{z}(t_m) &= \mu + \sum_{n=1}^N w_m(s_n)[z(s_n) - \mu] = \mu + \sum_{n=1}^N w_m(s_n)z(s_n) - \sum_{n=1}^N w_m(s_n)\mu \\ &= \sum_{n=1}^N w_m(s_n)z(s_n) + [1 - \sum_{n=1}^N w_m(s_n)]\mu\end{aligned}$$

σταθμισμένο άθροισμα N δεδομένων πηγής + σταθμισμένη αναμενόμενη τιμή μ
βάρος αναμενόμενης τιμής $\mu =$ συμπληρωματική του 1 του αθροίσματος των βαρών

Διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης:

$$\hat{\sigma}(t_m) = \sigma(0) - [w_m(s_1) \cdots w_m(s_N)] \begin{bmatrix} \sigma(d_{1m}) \\ \vdots \\ \sigma(d_{Nm}) \end{bmatrix} = \sigma(0) - \sum_{i=1}^N w_m(s_i)\sigma(d_{im})$$

το οποίο μπορεί επίσης να γραφτεί ως: $\hat{\sigma}(t_m) = \sigma(0) \left[1 - \sum_{n=1}^N w_m(s_n)\rho(d_{nm}) \right]$

Οριακές Τιμές Προβλεπόμενης Τιμής και Διακύμανσης Kriging



$$\hat{z}(t_m) = \mu(t_m) + \sum_{n=1}^N w_m(s_n)[z(s_n) - \mu(s_n)] \quad \hat{\sigma}(t_m) = \sigma(t_m) - \sum_{n=1}^N w_m(s_n)\sigma(s_n, t_m)$$

- ▶ για σημεία πηγής "απομακρυσμένα" (πέραν του εύρους συσχέτισης) από το σημείο στόχο t_m , όλα τα βάρη ισούνται με 0. Σ' αυτήν την περίπτωση, $\hat{r}(t_m) = 0$, συνεπώς $\hat{z}(t_m) = \mu(t_m)$ και $\hat{\sigma}(t_m) = \sigma(0)$: η πρόβλεψη στο σημείο στόχου ισούται με τη γνωστή αναμενόμενη τιμή $\mu(t_m)$ και η διακύμανση ισούται με τη γνωστή αβεβαιότητα $\sigma(t_m)$. Κατά της 2-ης τάξης στασιμότητα, $\hat{z}(t_m) = \mu$ και $\hat{\sigma}(t_m) = \sigma(0) = \sigma^2$
- ▶ για πρόβλεψη σε σημείο πηγής, $t_m \equiv s_n$, $\hat{z}(s_n) = z(s_n)$ και $\hat{\sigma}(s_n) = 0$: η πρόβλεψη αναπαράγει τις γνωστές τιμές των σημείων πηγής και η διακύμανση είναι μηδέν (εφόσον δεν υπάρχει σφάλμα μέτρησης). Το Απλό Kriging είναι μια μέθοδος ακριβούς χωρικής παρεμβολής
- ▶ για όλα τα υπόλοιπα σημεία στόχους, οι προβλέψεις εξαρτώνται από τη διάταξη των σημείων πηγής και τις τιμές τους, ενώ οι διακυμάνσεις εξαρτώνται μόνο από τη διάταξη των σημείων πηγής. Τόσο οι προβλέψεις όσο και οι διακυμάνσεις εξαρτώνται από το μοντέλο συνδιακύμανσης που χρησιμοποιείται: $\sigma(d; \theta)$, στην περίπτωση της 2ης-τάξης στασιμότητας



Διαδικασία Χωρικής Παρεμβολής Απλού Kriging

1. 1-ου βαθμού επιδράσεις (αναμενόμενες τιμές ή "κλιματολογίες") θεωρούνται γνωστές: υπολογισμός διαταράξεων στα σημεία πηγής
2. υπολογισμός ημιβαριογράμματος διαταράξεων και προσαρμογή ενός θεωρητικού μοντέλου. Μετατροπή μοντέλου ημιβαριογράμματος σε μοντέλο συνδιακύμανσης
3. υπολογισμός του πίνακα \mathbf{D} των $(N \times N)$ αποστάσεων μεταξύ σημείων πηγών, και μετατροπή του \mathbf{D} , μέσω του μοντέλου συνδιακύμανσης, σε πίνακα Σ με τιμές συνδιακύμανσης μεταξύ σημείων πηγής
4. εξετάζουμε ένα σύνολο M σημείων στόχου $\{t_m, m = 1, \dots, M\}$ στους κόμβους κανονικής καννάβου ή όχι
5. για κάθε σημείο στόχο t_m :
 - 5.1 υπολογισμός του $(N \times 1)$ διάνυσματος \mathbf{d}_m αποστάσεων μεταξύ t_m και όλων των N σημείων πηγής, και μετατροπή στο $(N \times 1)$ διάνυσμα σ_m τιμών συνδιακύμανσης μεταξύ σημείων πηγής και σημείου στόχου
 - 5.2 επίλυση του σύστηματος και υπολογισμό N βάρων. Υπολογισμός της προβλεπόμενης τιμής $\hat{z}(t_m)$ και της διακύμανσης $\hat{\sigma}(t_m)$ του σφάλματος πρόβλεψης
6. μετάβαση σε ένα άλλο σημείο στόχο $t_{m'}$ και επανάληψη των βημάτων 5.1 και 5.2

Απλό Kriging με Τοπική Γειτονία



Ίδια διαδικασία όπως και πριν αλλά: σε κάθε σημείο στόχο t_m , χρησιμοποιούμε μόνο τα πλησιέστερα $N_m \ll N$ δεδομένα πηγής $\{z(s_n), n = 1, \dots, N_m\}$ που εμπίπτουν σε μία γειτονία του σημείου t_m για να υπολογίσουμε τον $(N_m \times N_m)$ πίνακα συνδιακυμάνσεων Σ μεταξύ γειτονικών σημείων πηγής και το $(N_m \times 1)$ διάνυσμα συνδιακυμάνσεων γειτονικών σημείων πηγής και στόχου σ_m

Υπέρ:

- ▶ δεν χρειάζεται να αποθηκεύσουμε και να αντιστρέψουμε ένα μεγάλο $(N \times N)$ πίνακα Σ στην περίπτωση μεγάλου N (πολλά σημεία πηγής), παρά μόνο έναν πολύ μικρότερο $(N_m \times N_m)$ υπο-πίνακα του Σ
- ▶ εστιάζοντας σε μια τοπική γειτονία μπορεί κανείς να συμπεριλάβει στην πρόβλεψη μόνο τα σχετικά με το σημείο t_m δεδομένα πηγής

Κατά:

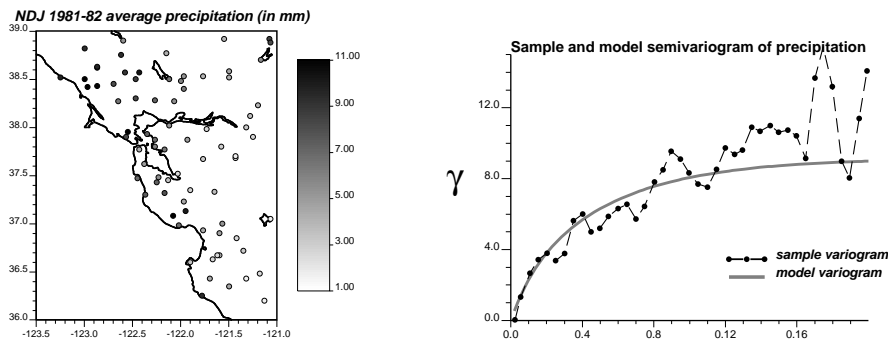
- ▶ πρέπει να οριστούν κανόνες για τον καθορισμό της γειτονίας αναζήτησης. Δεν είναι δύσκολο: κύκλος με ακτίνα \sim εύρος του μοντέλου ημιβαριογράμματος
- ▶ με πολύ μικρή γειτονία αναζήτησης μειώνεται ο αριθμός N_m δεδομένων πηγής που συμπεριλαμβάνονται στην πρόβλεψη, και αυξάνεται η σχετική αβεβαιότητα

Kriging τοπικής γειτονίας χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές της γεωστατιστικής

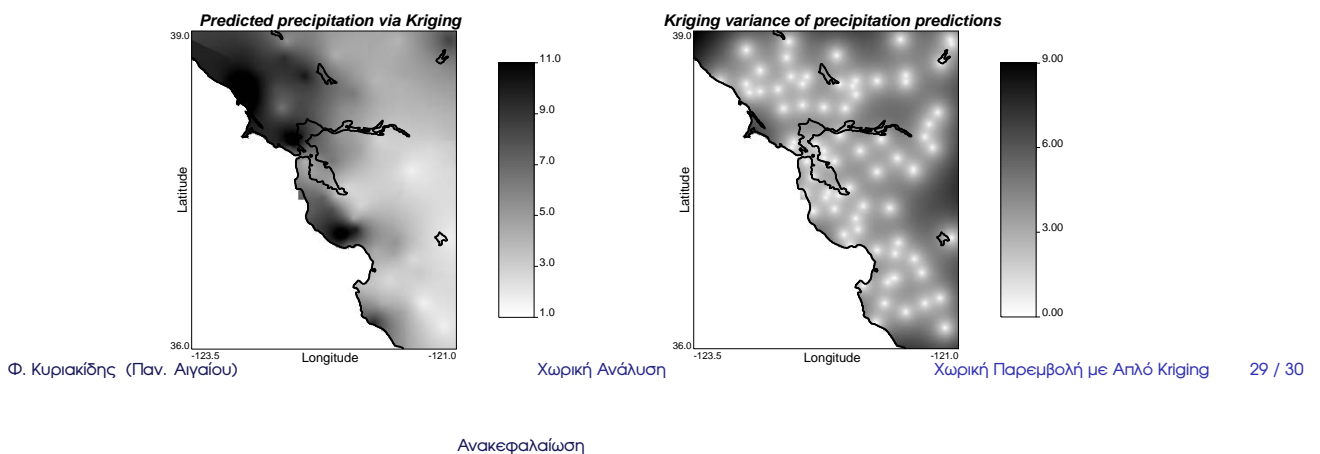


Παράδειγμα Χωρικής Παρεμβολής Kriging

Δεδομένα βροχόπτωσης και ημιβαριόγραμμα:



Παρεμβολή Kriging και επιφάνεια διακυμάνσεων σφάλματος παρεμβολής:



Ανακεφαλαίωση



Γεωστατιστική χωρική εκτίμηση με χρήση Απλού Kriging:

- ▶ γνωστή αναμενόμενη τιμή ("κλιματολογία") σε οποιαδήποτε σημείο
- ▶ στατιστική εγγύτητα (συσχέτιση) μεταξύ σημείων/δεδομένων πηγής και στόχου
- ▶ ο πλεονασμός (συσχέτιση) μεταξύ δεδομένων πηγής αναδιανέμει τα βάρη των γειτονικών σημείων (μειώνει τα βάρη σημείων πηγής σε clusters)

Βασικές διαφορές από άλλες μεθόδους:

- ▶ όλα εξαρτώνται από το μοντέλο συνδιακύμανσης (το οποίο συνήθως δημιουργείται από ένα μοντέλο ημιβαριογράμματος), γεγονός που αντικατοπτρίζει την αντίληψη ότι τα βάρη παρεμβολής πρέπει να αντιπροσωπεύουν την υφή (τραχύτητα ή ομαλότητα) της χωρικής κατανομής των διαταράξεων μιας μεταβλητής
- ▶ το αποτέλεσμα του Kriging είναι ένα σύνολο παρεμβαλλόμενων τιμών, καθώς και ένα σύνολο μέτρων αξιοπιστίας για τις προβλεπόμενες τιμές. Τα μέτρα αυτά κωδικοποιούνται σε διακυμάνσεις σφαλμάτων πρόβλεψης, τα οποία είναι ανεξάρτητα από τις πραγματικές τιμές των δεδομένων και εξαρτώνται μόνο από τη διάταξη των μετρήσεων και το μοντέλο της συνδιακύμανσης. Οι διακυμάνσεις σφάλματος του Kriging χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές σχεδιασμού δειγματοληψίας