ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Σχεδίαση με Η/Υ

Ενότητα 1: Παραμετρικές επιφάνειες

Φίλιππος Αζαριάδης
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Παραμετρικές Επιφάνειες

Φίλιππος Αζαριάδης

Αναπληρωτής Καθηγητής

http://www.syros.aegean.gr/users/azar

Μάθημα: [5153] Σχεδίαση με Η/Υ

Τύποι παραμετρικών επιφανειών

- Για τις ανάγκες του μαθήματος τις χωρίζουμε ανάλογα με την πολυπλοκότητα της μορφής και το σκοπό της κατασκευής τους:
  - Απλής μορφής
  - Ελεύθερης μορφής
  - Παρεμβολής κλειστού συνόρου

Απλής μορφής

- **Επίπεδες επιφάνειες (plane surfaces):** οι απλούστερες επιφάνειες. Ορίζονται από τρία μη συνευθειακά σημεία.
- **Οδηγούμενες επιφάνειες (ruled surfaces):** είναι γραμμικές επιφάνειες. Παρεμβάλλονται γραμμικά μεταξύ δύο οδηγών καμπυλών (τροχιές).
- **Επιφάνειες εκ' περιστροφής (revolved surfaces):** Είναι αξονοσυμμετρικές επιφάνειες. Δημιουργούνται δια της περιστροφής μιας επίπεδης γεωμετρικής οντότητας (πχ. καμπύλης) γύρω από έναν άξονα κατά μια γωνία.
- **Επιφάνειες σαρώσεως (tabulated or extruded surfaces):** Δημιουργούνται από τη μετακίνηση (σάρωση) μιας επίπεδης καμπύλης κατά μήκος μιας διεύθυνσης για συγκεκριμένο διάστημα. Το επίπεδο της καμπύλης είναι κάθετο στη διεύθυνση μετακίνησης.
- κα.

Ελεύθερης μορφής

- **Επιφάνειες Bezier:** Επιφάνειες που προσεγγίζουν συγκεκριμένα σημεία ελέγχου. Είναι σύνθετες επιφάνειες οι οποίες μπορούν να παραστήσουν πολύπλοκη γεωμετρία ελεύθερης μορφής. Επιτρέπεται μόνο ολικός έλεγχος της επιφάνειας.
- **Επιφάνειες B-splines:** Επιφάνειες που προσεγγίζουν συγκεκριμένα σημεία ελέγχου. Είναι σύνθετες επιφάνειες οι οποίες μπορούν να παραστήσουν πολύπλοκη γεωμετρία ελεύθερης μορφής. Επιτρέπεται ο τοπικός έλεγχος της επιφάνειας.
- κα.

Παρεμβολής κλειστού συνόρου

- Τμήματα Coons: Χρησιμοποιούνται για την κατασκευή επιφανειών που περιορίζονται από καμπύλες που σχηματίζουν ένα ενιαίο κλειστό σύνορο στο χώρο.
  - Διγραμμικά ή Δικυβικά τμήματα.

Παραμετρική εξίσωση επιφάνειας

- Οι συντεταγμένες (x, y, z) κάθε σημείου της επιφάνειας εκφράζονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη με τη χρήση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών u, v.

$$P = P(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

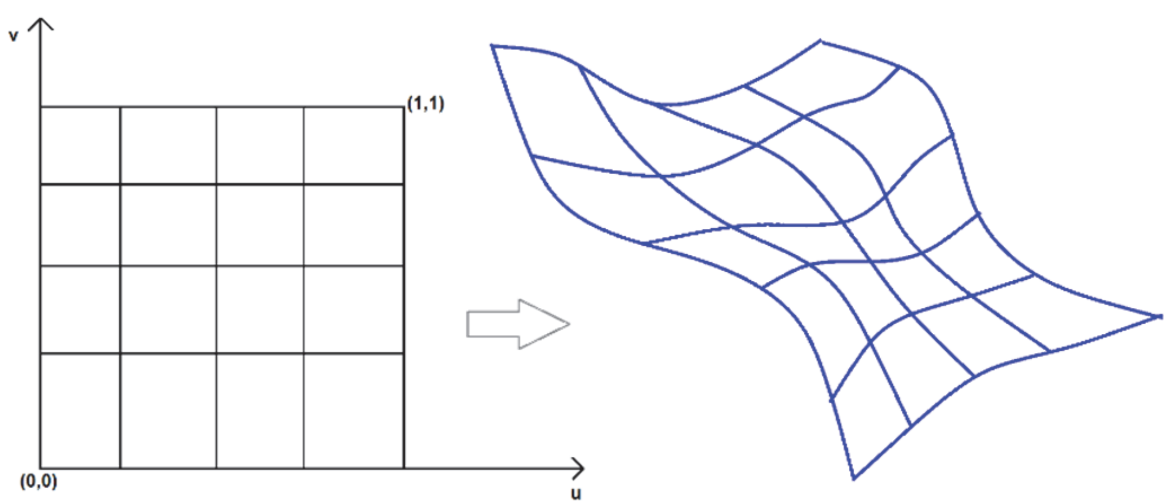
με

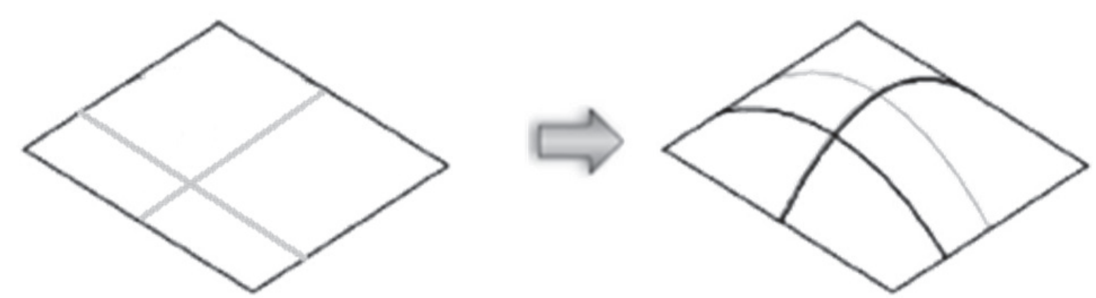
$$u \in [u_{min}, u_{max}] \text{ και } v \in [v_{min}, v_{max}]$$

- Η παραμετρική μορφή επιφανειών εκφράζει μια απεικόνιση του παραμετρικού χώρου E^2 που ορίζεται από το ορθογώνιο $[u_{max} - u_{min}]$x$[v_{max} - v_{min}]$ στην επιφάνεια P στον Καρτεσιανό χώρο E^3.

Εσωτερική Γεωμετρία (1)

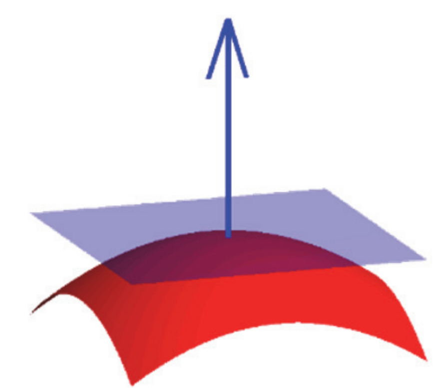
- Παραμετρικές καμπύλες/διευθύνσεις
  - Αν διατηρήσουμε τη μία εκ των δύο παραμέτρων σταθερή και μεταβάλλουμε την άλλη τότε διαγράφεται στην επιφάνεια μια καμπύλη η οποία ονομάζεται u- ή v- ισοπαραμετρική καμπύλη της επιφάνειας αντίστοιχα.
    - v- ισοπαραμετρική καμπύλη $u = u^*$
    - u- ισοπαραμετρική καμπύλη $v = v^*$
  - Κάθε σημείο $P(u, v)$ βρίσκεται στην τομή μιας u- και μιας v- ισοπαραμετρικής καμπύλης της επιφάνειας P.





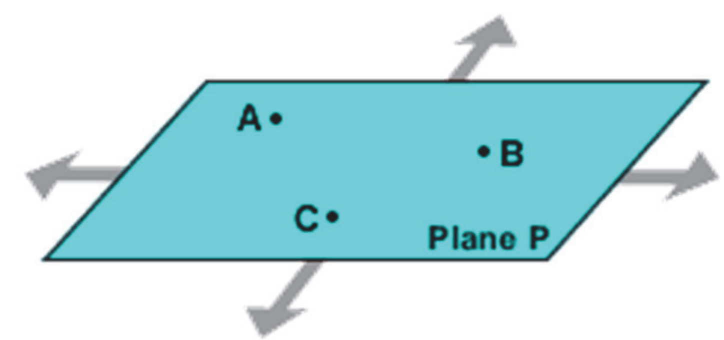
Εσωτερική Γεωμετρία (2)

- Εφαπτόμενο επίπεδο
  - Σε κάθε σημείο $P(u,v)$ της επιφάνειας ορίζονται δύο εφαπτόμενα διανύσματα:
  $$\overrightarrow{P_u}(u,v) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} \text{ και } \overrightarrow{P_v}(u,v) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}$$
  - Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας ορίζεται από το σημείο $P(u,v)$ και τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας στο σημείο αυτό.
- Κάθετο διάνυσμα
  - Σε κάθε σημείο $P(u,v)$ της επιφάνειας ορίζεται κάθετο διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο αυτό:
  $$\overrightarrow{\mathrm{N}}(u,v) = \overrightarrow{P_u}(u,v) \times \overrightarrow{P_v}(u,v)$$



Κατασκευές επιφανειών απλής μορφής (1)

- Επίπεδες Επιφάνειες
  - Μια επίπεδη επιφάνεια ορίζεται από ένα σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους διανύσματα $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$ και $\vec{t}(t_x, t_y, t_z)$:
$$P = P(u, v) = P_0 + u\vec{s} + v\vec{t} \text{ με } u, v \in \mathbb{R}$$
  - Οι παραμετρικές εξισώσεις των συντεταγμένων της επιφάνειας δίνονται ως
$$x(u, v) = x_0 + us_x + vt_x$$
$$y(u, v) = y_0 + us_y + vt_y$$
$$z(u, v) = z_0 + us_z + vt_z$$
$$\text{με } u, v \in \mathbb{R}$$

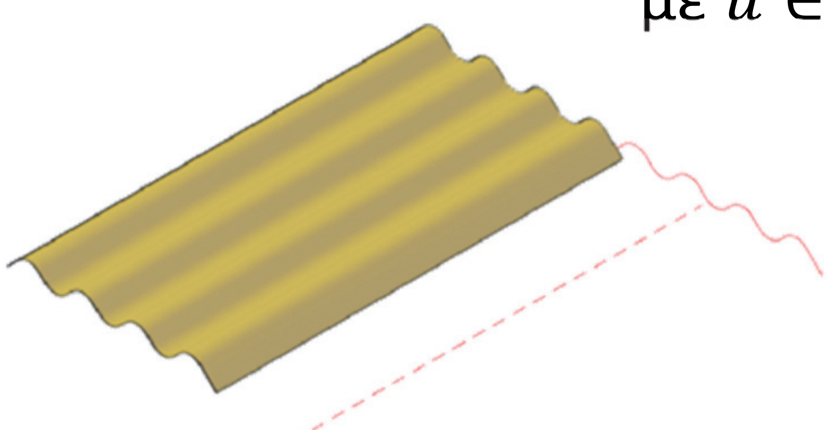


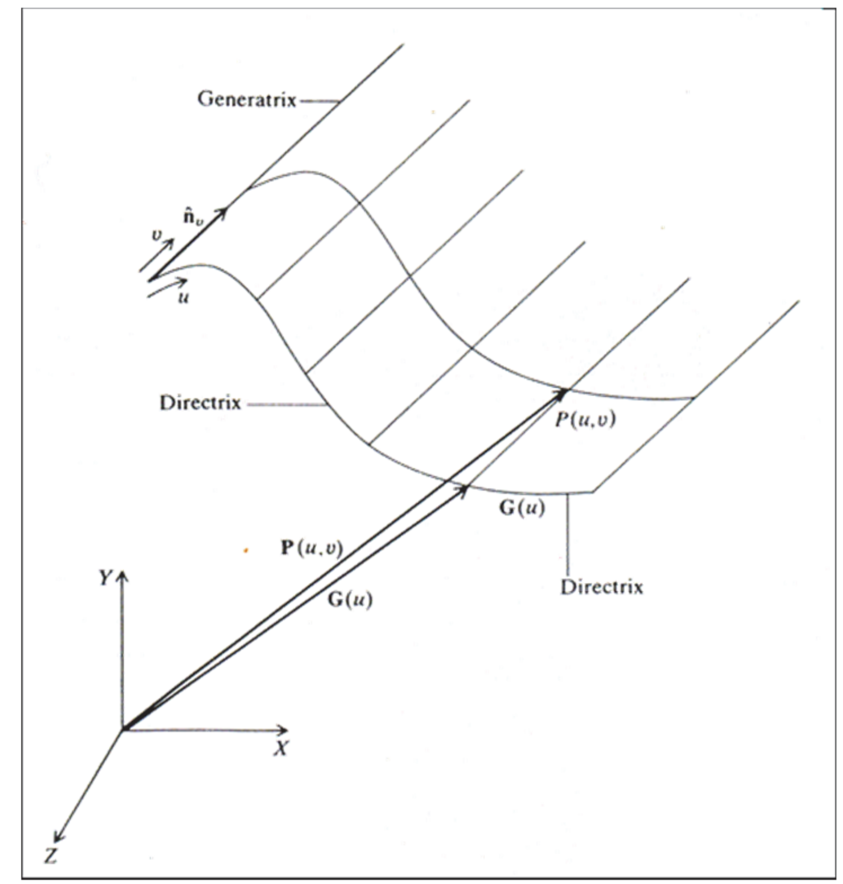
Κατασκευές επιφανειών απλής μορφής (2)

- Επιφάνειες Σάρωσης
  - Μια επιφάνεια σάρωσης προκύπτει είτε από τη μετακίνηση μιας χωρικής καμπύλης (γεννήτορας) σε μία δεδομένη διεύθυνση, είτε από την παράλληλη μετακίνηση μιας ευθείας γραμμής κατά μήκος μιας επίπεδης καμπύλης (οδηγός). Η γενική παραμετρική εξίσωση μιας επιφάνειας σάρωσης είναι:

$$P = P(u, v) = G(u) + v\vec{n}$$

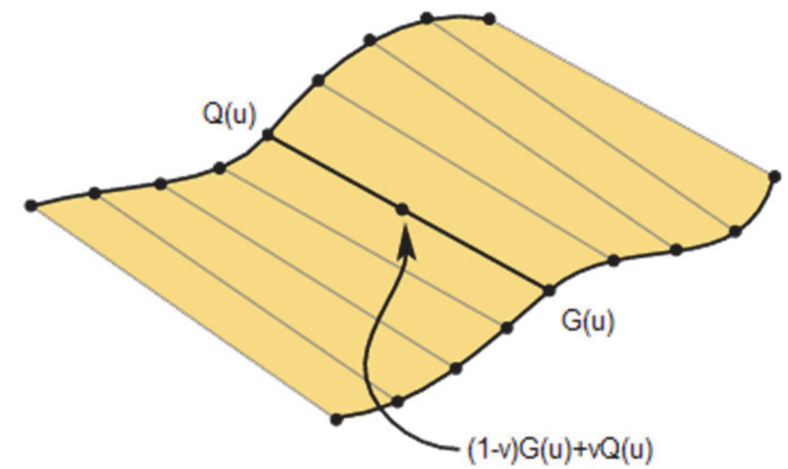
$$\text{με } u \in [a, b], v \in [0, v_{max}]$$





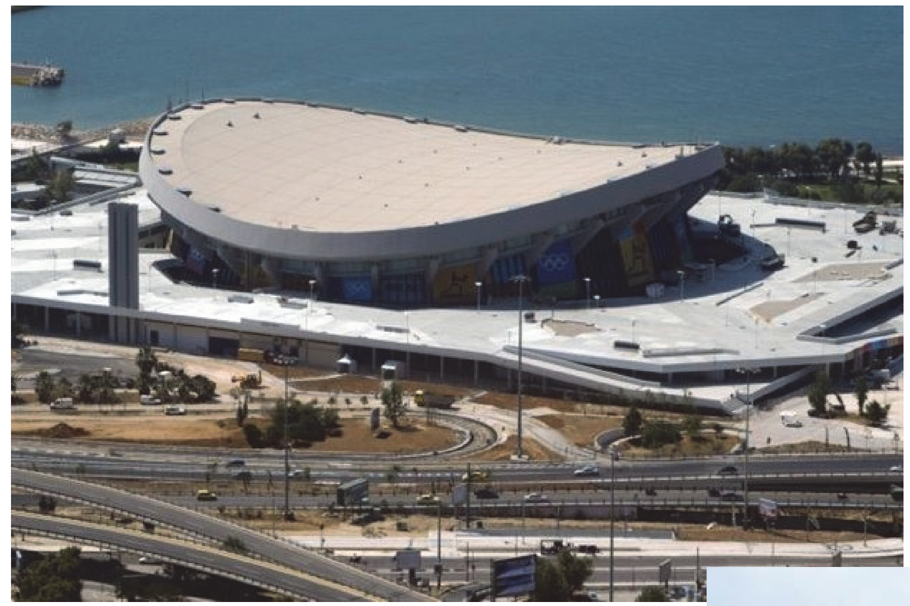
Κατασκευές επιφανειών απλής μορφής (3)

- Οδηγούμενες Επιφάνειες
  - Μια οδηγούμενη επιφάνεια δημιουργείται αν ενώσουμε γραμμικά αντίστοιχα σημεία σε δύο χωρικές καμπύλες (τροχιές) $G(u)$ και $Q(u)$ θέτοντας το u ως κοινή παράμετρο . Η γενική παραμετρική εξίσωση μιας οδηγούμενης επιφάνειας σάρωσης είναι:
  $$P = P(u,v) = (1-v)G(u) + vQ(u)$$
  με $u \in [a,b], v \in [0,1]$
  - Οι οδηγούμενες επιφάνειες χρησιμοποιούνται εκτενώς στην αρχιτεκτονική κτηρίων λόγω της δυνατότητα που παρέχουν για «συμβατικό» τρόπο κατασκευής.



Κατασκευές επιφανειών απλής μορφής (4)

Didcot Parkway Station (UK)

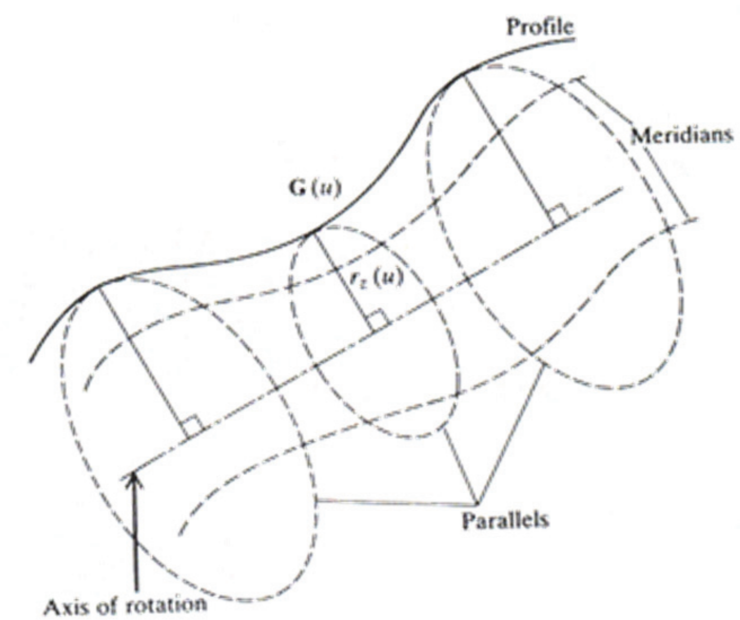


Στάδιο Ειρήνης & Φιλίας

Warszawa-Ochota railway station

Κατασκευές επιφανειών απλής μορφής (5)

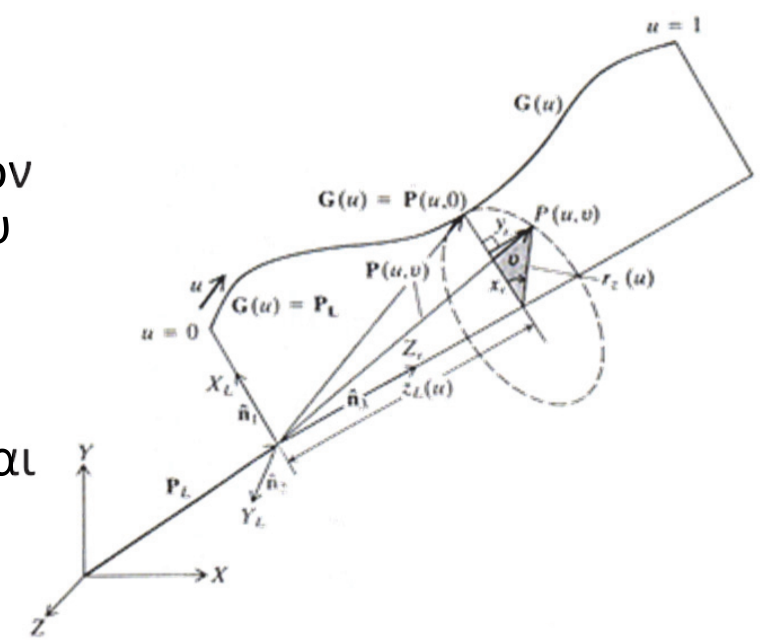
- Επιφάνειες εκ' περιστροφής
  - Είναι οι επιφάνειες που δημιουργούνται από την περιστροφή μιας επίπεδης καμπύλης $G(u)$ γύρω από έναν άξονα περιστροφής ο οποίος ανήκει στο επίπεδο της καμπύλης. Κάθε σημείο της καμπύλης σχηματίζει μέσω της περιστροφής του έναν κύκλο με κέντρο πάνω στον άξονα περιστροφής και ακτίνα $r_z(u)$. Η επίπεδη καμπύλη ονομάζεται *κατατομή* (προφίλ), οι κύκλοι *παράλληλοι* και οι διάφορες θέσεις της κατατομής γύρω από τον άξονα περιστροφής καλούνται *μεσημβρινοί.*

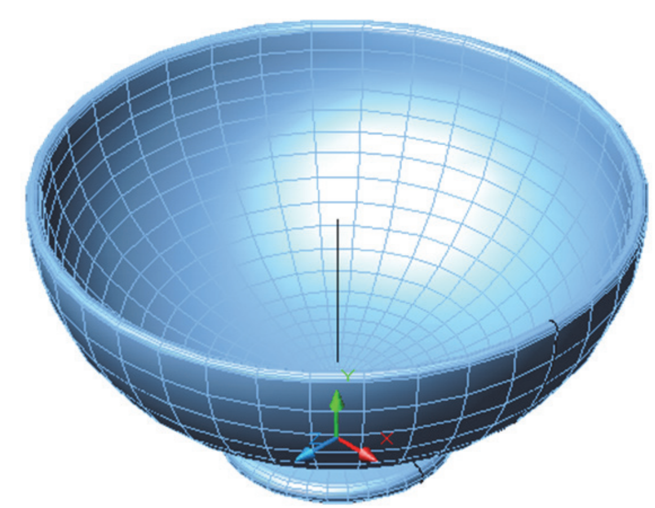


Κατασκευές επιφανειών απλής μορφής (6)

- Παραμετρική εξίσωση επιφάνειας εκ' περιστροφής:
  - Για να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση μιας επιφάνειας εκ' περιστροφής, θεωρούμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων με τον z-άξονα να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Η αρχή $P_L(u)$ του τοπικού συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο σημείο που προβάλλεται το $G(0)$ στον άξονα περιστροφής.
  - Έστω $\overrightarrow{n_3}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα περιστροφής, $\overrightarrow{n_1}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που ανήκει στο επίπεδο της καμπύλης και είναι κάθετο στο $\overrightarrow{n_3}$, και $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_3}$.
  - Έστω $r_z(u)$ η ακτίνα περιστροφής του τυχαίου σημείου $G(u)$ και $z_L(u)$ απόσταση της μετατόπισης στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής.
  - Η εξίσωση της επιφάνειας εκ' περιστροφής δίνεται από τη σχέση:

$$P = P(u,v) = P_L(u) + [r_z(u)cosv]\overrightarrow{n_1} + [r_z(u)sinv]\overrightarrow{n_2} + z_L(u)\overrightarrow{n_3}$$
$$\text{με } u \in [0,1], v \in [0,2\pi]$$



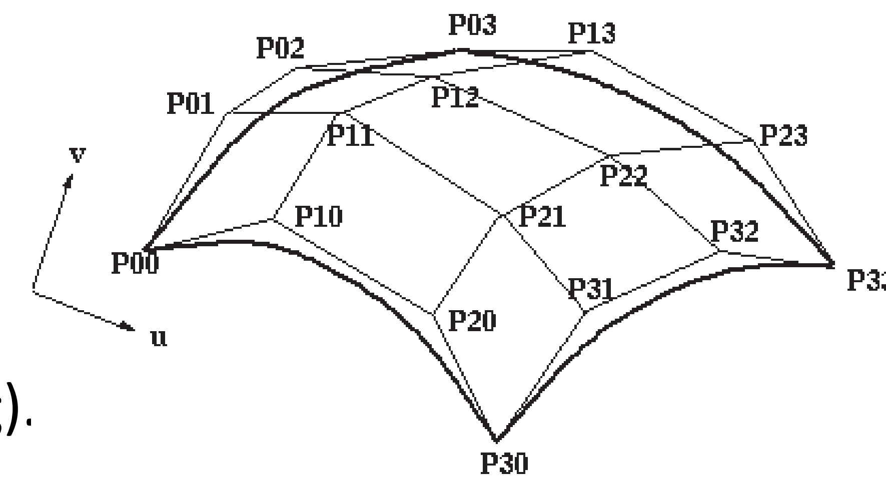


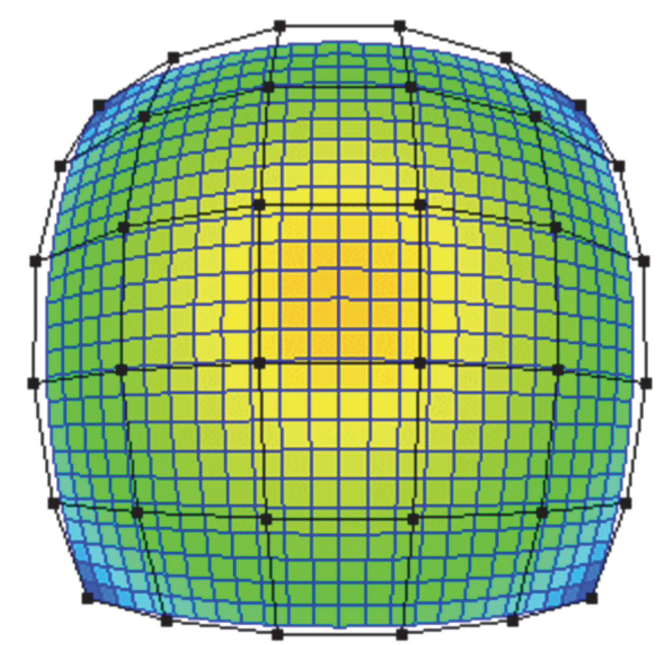
Παραμετρικές επιφάνειες ελεύθερης μορφής (1)

- Πλεονεκτήματα:
  - Παρέχουν τη δυνατότητα αναπαράστασης πολύπλοκων γεωμετρικών μορφών.
  - Εύκολος χειρισμός μέσω σημείων ελέγχου.
  - Ομαλότητα / Τοπικός έλεγχος (σε ορισμένες περιπτώσεις).
- Παραμετρικές Επιφάνειες Bezier:
  - Η παραμετρική εξίσωση μιας επιφάνειας Bezier δίνεται ως εξής:

    $P^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v)\, P_{i,j}$ με $u, v \in [0,1]^2$

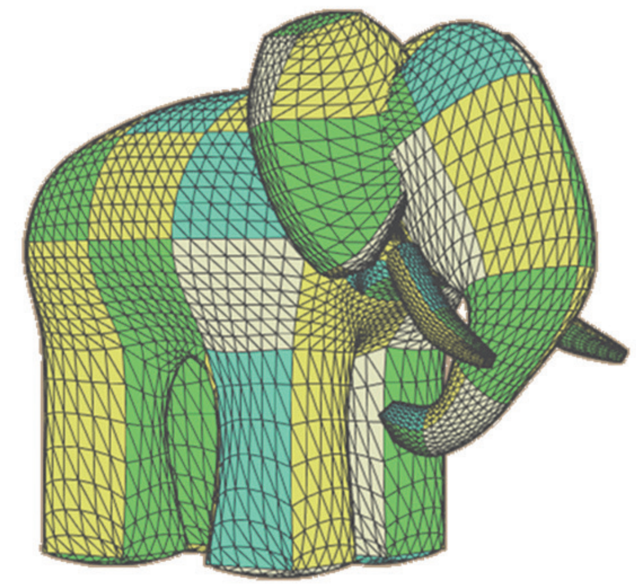
    όπου, $B_i^m(u)$ και $B_j^n(v)$ είναι τα πολυώνυμα Bernstein m, n βαθμού αντίστοιχα και $P_{i,j}$ είναι τα σημεία ελέγχου.
- Ο βαθμός της επιφάνειας είναι (m, n)

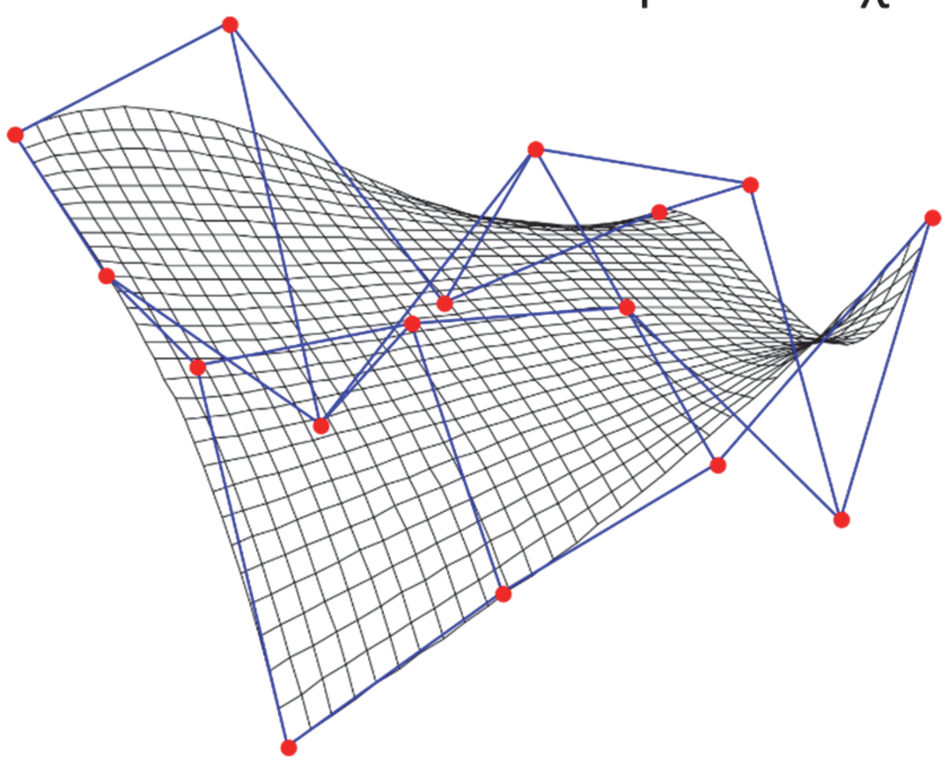


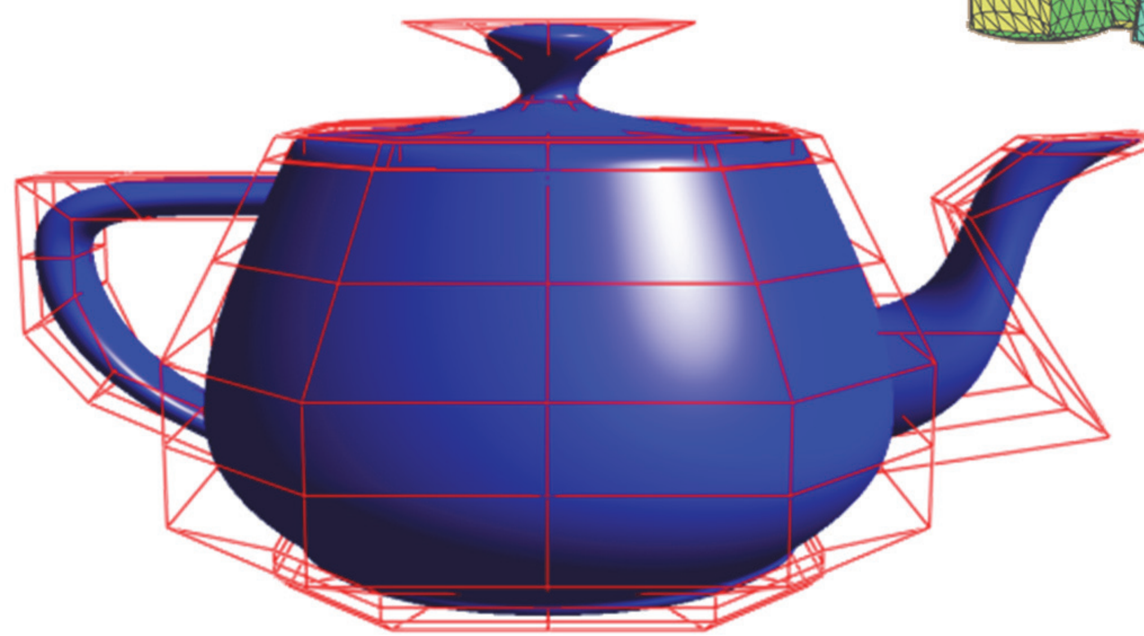


Παραμετρικές επιφάνειες ελεύθερης μορφής (2)

- Βασικές ιδιότητες παραμετρικών επιφανειών Bezier:
  - Παρεμβολή ακραίων σημείων
  - Κυρτή περιβάλλουσα
  - Ψευδοτοπικός έλεγχος
  - Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς





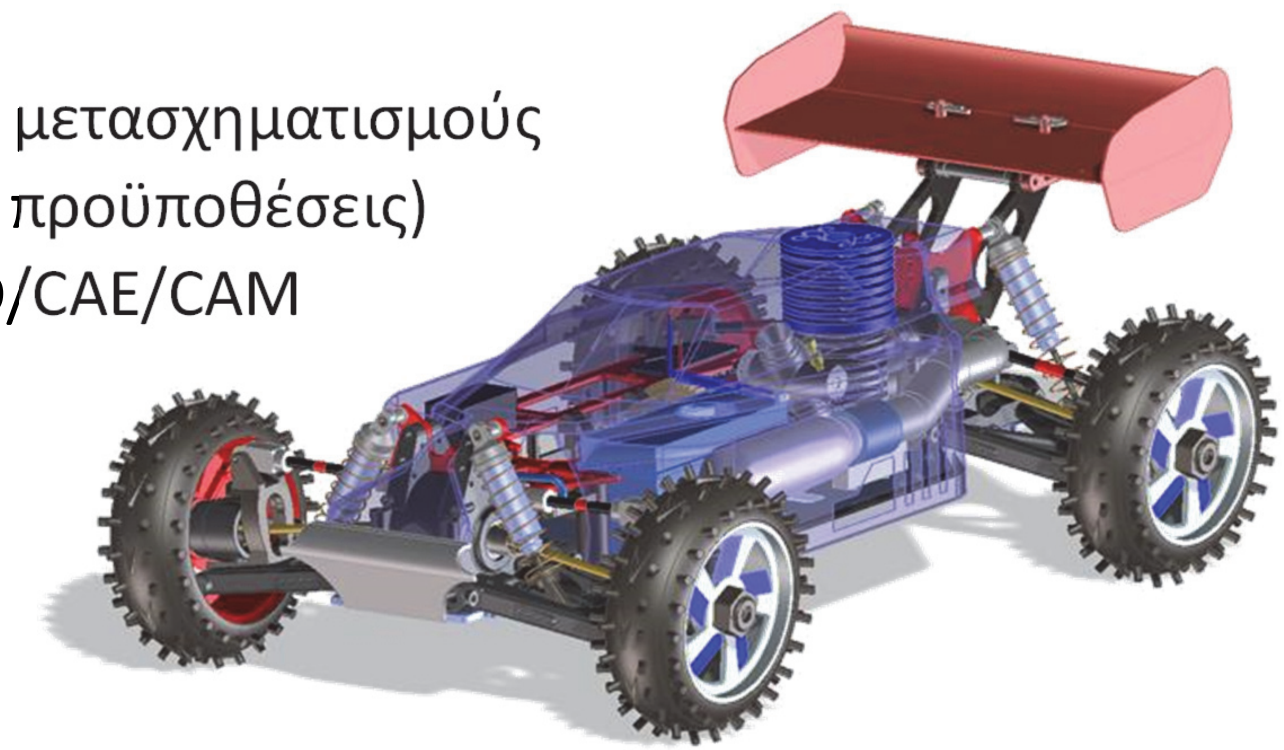


Παραμετρικές επιφάνειες ελεύθερης μορφής (3)

- Παραμετρικές επιφάνειες B-Splines:
  - Η παραμετρική εξίσωση μιας επιφάνειας B-Spline δίνεται ως εξής:
    $$Q^{k,l}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_i^k(u) N_j^l(v)\, P_{i,j}$$
    με $u \in [u_k, \dots, u_{m+1}]$ και $v \in [v_l, \dots, v_{l+1}]$
    όπου, $N_i^k(u)$ και $N_j^l(v)$ είναι οι συναρτήσεις B-Splines k, l βαθμού αντίστοιχα και $P_{i,j}$ είναι τα σημεία ελέγχου.
  - Κομβικά διανύσματα:
    $U = \{u_0, \dots, u_k, \dots, u_i, \dots, u_{m+k+1}\}$
    $V = \{v_0, \dots, v_l, \dots, v_j, \dots, u_{l+n+1}\}$
  - Ο βαθμός της επιφάνειας είναι (k, l) και **είναι ανεξάρτητος από το πλήθος των σημείων ελέγχου.**

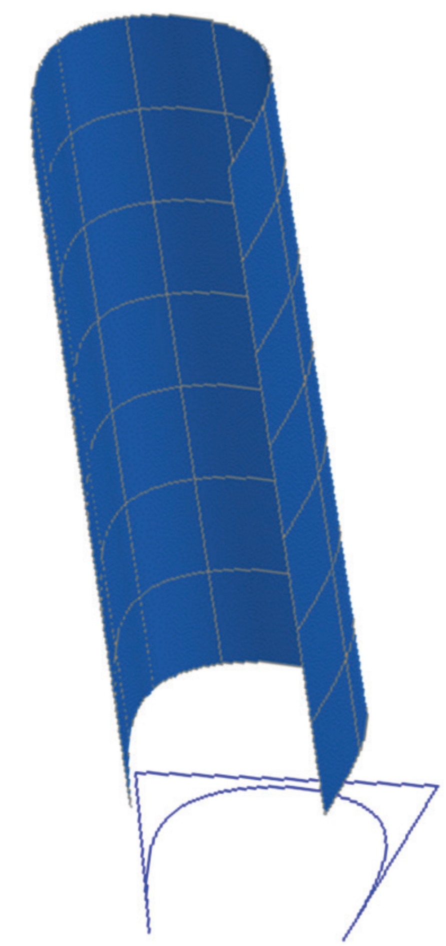
Παραμετρικές επιφάνειες ελεύθερης μορφής (4)

- Βασικές ιδιότητες παραμετρικών επιφανειών B-Splines:
  - Γενίκευση επιφανειών Bezier
  - Τοπικός έλεγχος
  - Ισχυρή κυρτή περιβάλλουσα
  - Αναλλοίωτη στους συσχετισμένους μετασχηματισμούς
  - Παρεμβολή ακραίων σημείων (υπό προϋποθέσεις)
  - Υψηλή ακρίβεια σε εφαρμογές CAD/CAE/CAM



Αναπαραστάσεις B-Splines Βασικών Τύπων Επιφανειών (1)

- Επιφάνειες σάρωσης (extruded surfaces):
  - Δίνεται καμπύλη προφίλ σε μορφή B-Spline:
    $Q^k(u) = \sum_{i=0}^{m} N_i^k(u) P_i, \; u \in \{u_0, \dots, u_{m+k+1}\}$
    η οποία μετακινείται κατά τη διεύθυνση διανύσματος $\mathbf{n}$
  - Η παραγόμενη επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση:
    $$Q^{k,1}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{1} N_i^k(u) N_j^1(v)\, \mathrm{B}_{i,j}$$
    με $u \in \{u_0, \dots, u_{m+k+1}\}$ και $v \in \{0,0,1,1\}$
  - Τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας είναι:
    $\mathrm{B}_{i,0} = P_i$ και $\mathrm{B}_{i,1} = P_i + \delta\mathbf{n}$, όπου δ το μήκος της σάρωσης (εξώθησης).



Αναπαραστάσεις B-Splines Βασικών Τύπων Επιφανειών (2)

- Οδηγούμενες Επιφάνειες (ruled surfaces):
  - Δίνονται δύο χωρικές καμπύλες προφίλ σε μορφή B-Spline:

$$G^k(u) = \sum_{i=0}^{m} N_i^k(u) G_i$$

$$Q^k(u) = \sum_{i=0}^{m} N_i^k(u) Q_i$$

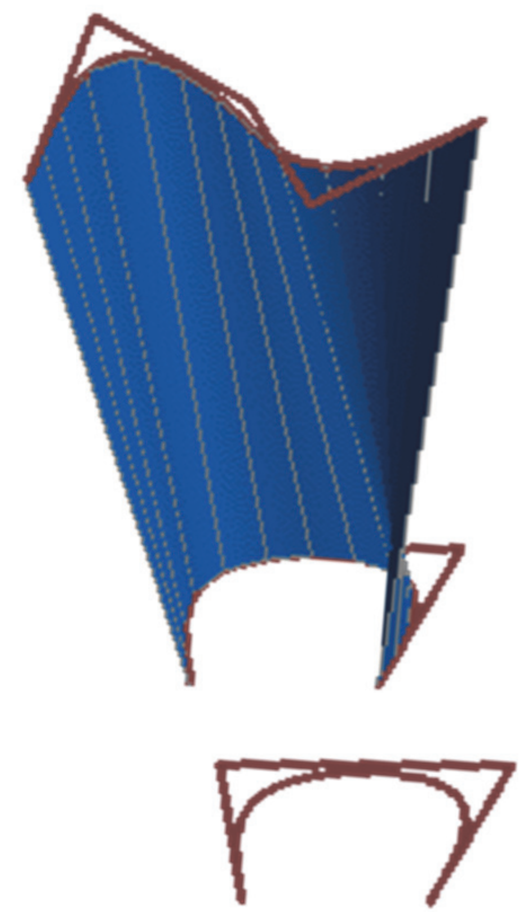
  με κοινό βαθμό k και κομβικό διάνυσμα $u \in \{u_0, \dots, u_{m+k+1}\}$

  - Η παραγόμενη επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση:

$$Q^{k,1}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{1} N_i^k(u) N_j^1(v)\, \mathrm{B}_{i,j}$$

  με $u \in \{u_0, \dots, u_{m+k+1}\}$ και $v \in \{0,0,1,1\}$

  - Τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας είναι: $\mathrm{B}_{i,0} = \mathrm{G}_i$ και $\mathrm{B}_{i,1} = Q_i$.



Αναπαραστάσεις B-Splines Βασικών Τύπων Επιφανειών (3)

- Επιφάνειες σάρωσης μεταβλητής τροχιάς (translationally swept surfaces):
  - Δίνεται γεννέτηρα καμπύλη (προφίλ) σε μορφή B-Spline:

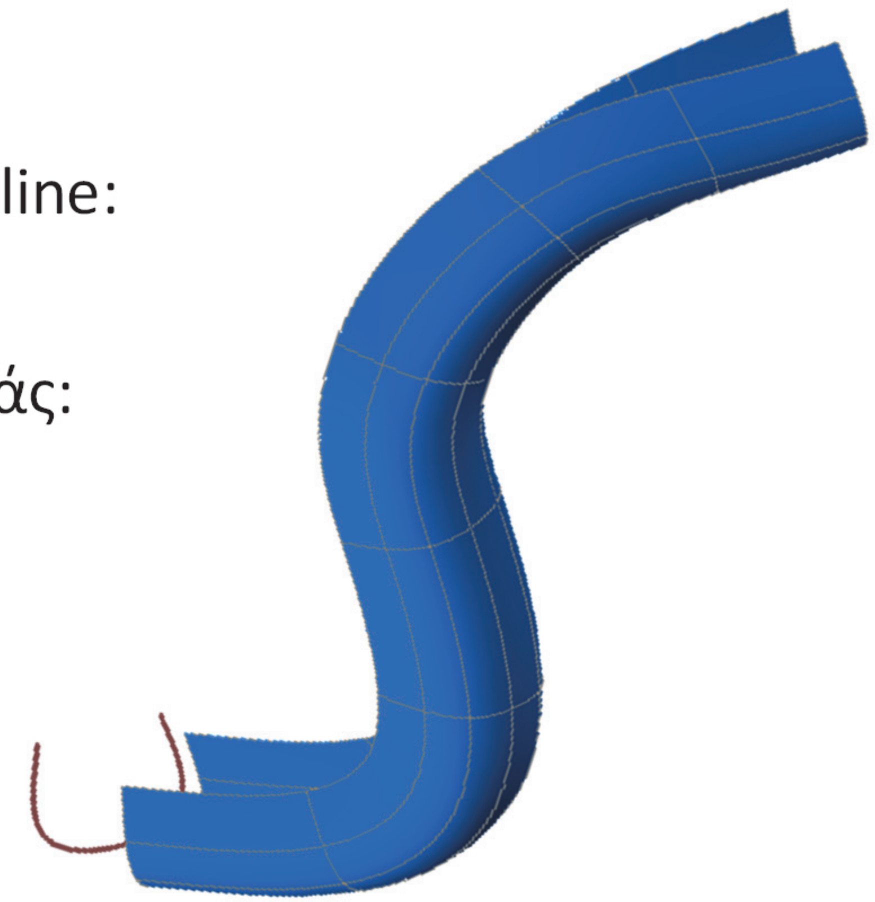
    $Q^k(u) = \sum_{i=0}^{m} N_i^k(u) Q_i,\ u \in \{u_0, \dots, u_{m+k+1}\}$

    η οποία μετακινείται κατά μήκος μιας καμπύλης τροχιάς:

    $C^l(v) = \sum_{j=0}^{n} N_j^l(v) C_i,\ v \in \{v_0, \dots, v_{n+l+1}\}$
  - Η παραγόμενη επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση:

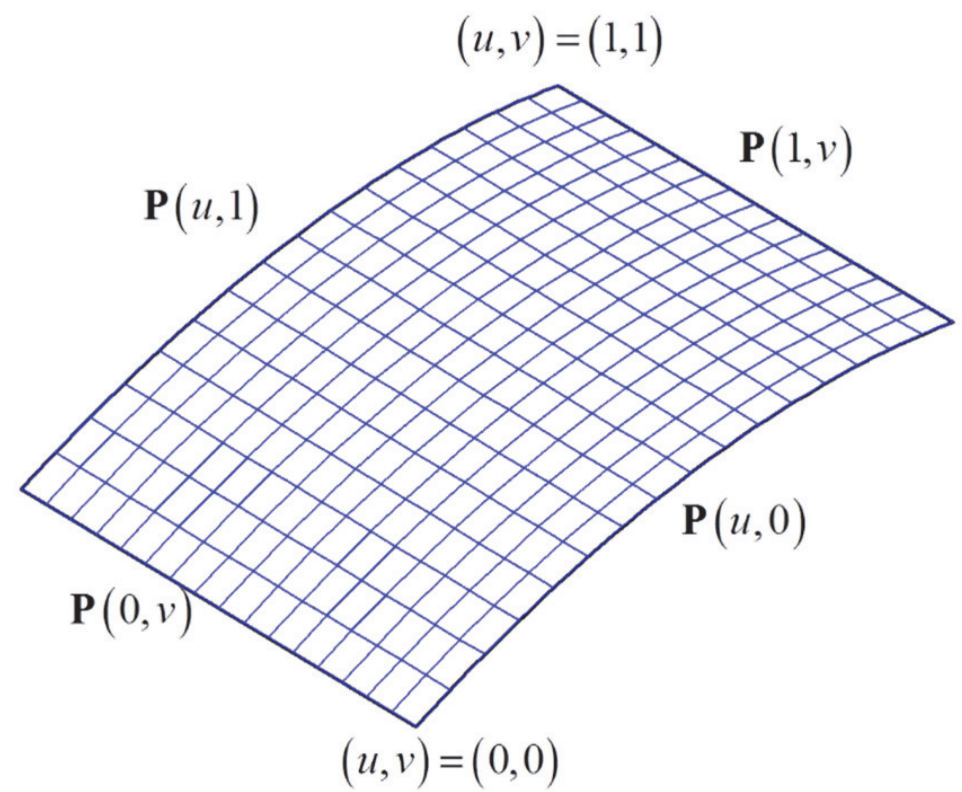
$$Q^{k,l}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{l} N_i^k(u) N_j^l(v)\, \mathrm{B}_{i,j}$$

    με $u \in \{u_0, \dots, u_{m+k+1}\}$ και $v \in \{v_0, \dots, v_{n+l+1}\}$
  - Τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας είναι: $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{Q}_i + C_j$.



Παραμετρικά Τμήματα Coons (1)

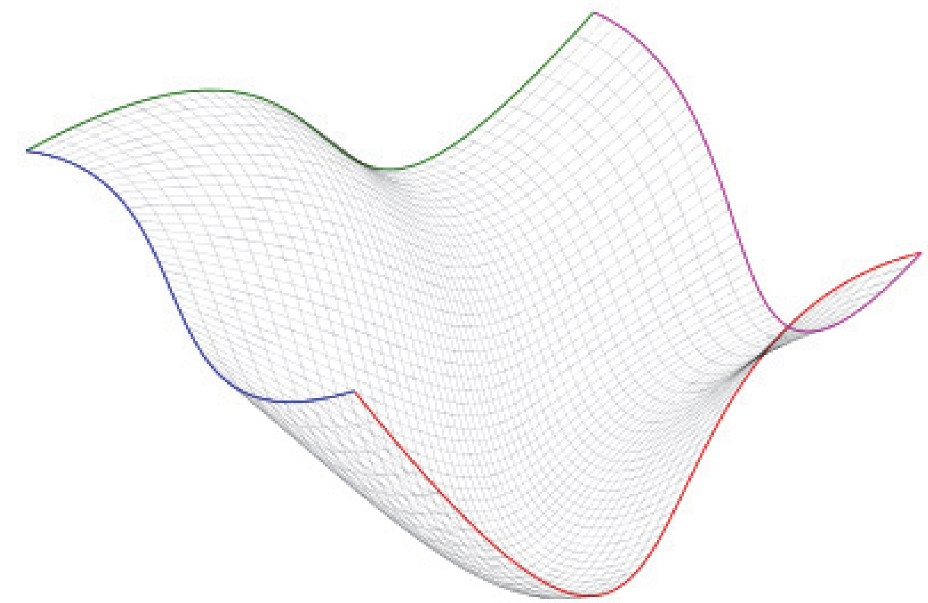
- Οι επιφάνειες (ή τμήματα) Coons αναπτύχθηκαν από τον Steven Coons το 1966.
- Βασικό πρόβλημα: δεδομένων τεσσάρων συνοριακών καμπυλών $P(u,0), P(u,1)$ και $P(0,v), P(1,v)$ οι οποίες σχηματίζουν ένα κλειστό σύνορο τοπολογικά ισοδύναμο με τετράπλευρο και με $u \in [0,1], v \in [0,1]$, να υπολογιστεί μια επιφάνεια $P(u,v)$ η οποία να παρεμβάλει στα όριά της τις τέσσερις καμπύλες.
- Οι συνοριακές καμπύλες έχουν ανά δύο κοινή παράμετρο u ή v αντίστοιχα.



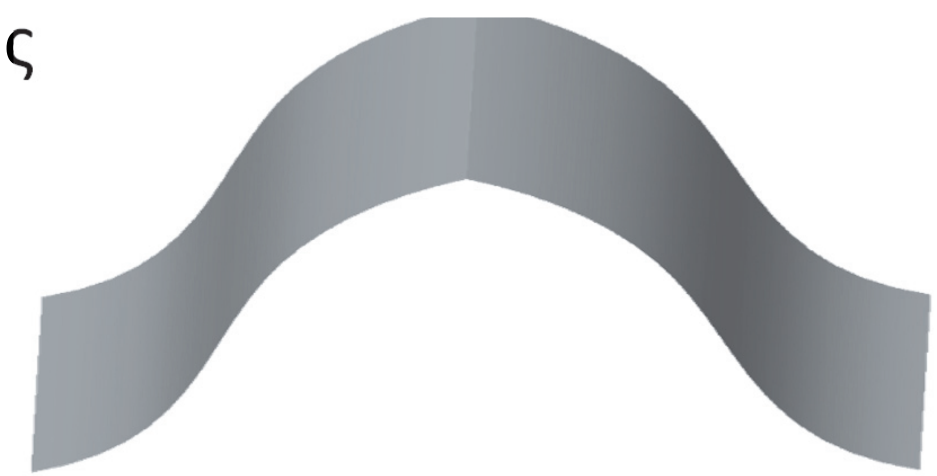
Παραμετρικά Τμήματα Coons (2)

- Η επιθυμητή επιφάνεια ονομάζεται **διγραμμικό τμήμα Coons** και έχει εξίσωση:

$$\mathbf{P}(u,v) = -\begin{bmatrix} -1 & (1-u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}(u,0) & \mathbf{P}(u,1) \\ \mathbf{P}(0,v) & \mathbf{P}(0,0) & \mathbf{P}(0,1) \\ \mathbf{P}(1,v) & \mathbf{P}(1,0) & \mathbf{P}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

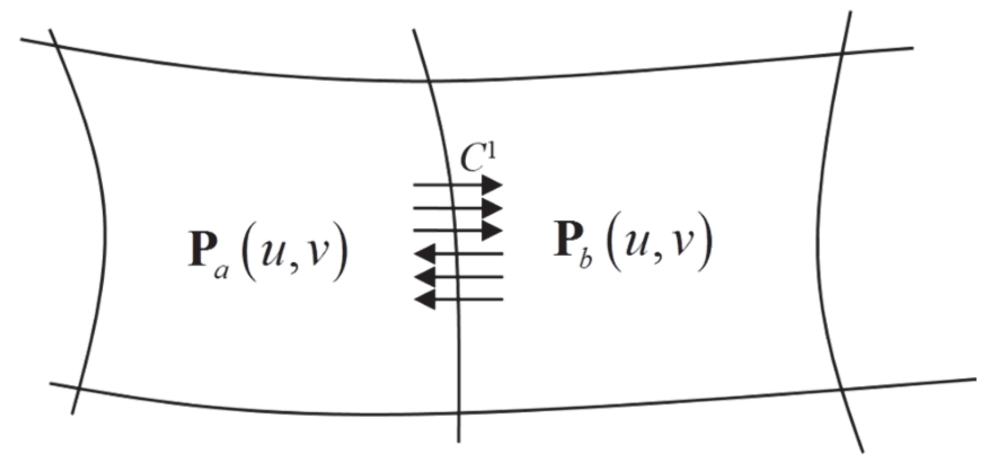


- Βασικό πρόβλημα της παραπάνω μορφής είναι πως δεν διατηρείται συνέχεια μεγαλύτερη από C^0 σε περιπτώσεις συνένωσης περισσοτέρων από ένα διγραμμικών τμημάτων.



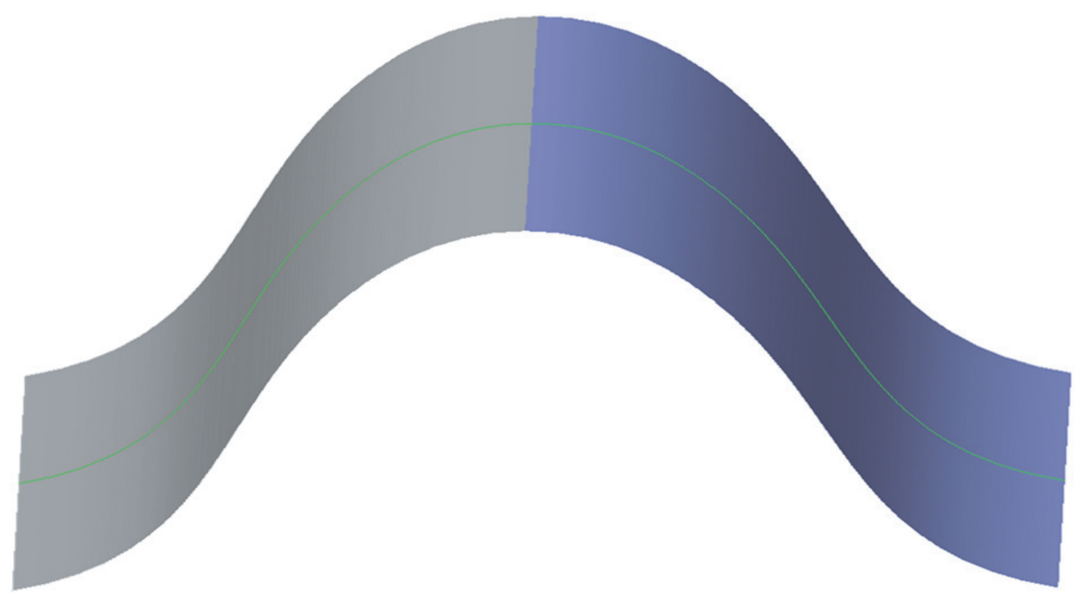
Παραμετρικά Τμήματα Coons (3)

- Η επιθυμητή επιφάνεια ονομάζεται **δικυβικό τμήμα Coons** και έχει εξίσωση:



$$\mathbf{P}(u,v) = -\begin{bmatrix} -1 & F_1(u) & F_2(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}(u,0) & \mathbf{P}(u,1) \\ \mathbf{P}(0,v) & \mathbf{P}(0,0) & \mathbf{P}(0,1) \\ \mathbf{P}(1,v) & \mathbf{P}(1,0) & \mathbf{P}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ F_1(v) \\ F_2(v) \end{bmatrix}$$

όπου, $F_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $F_2(x) = -2x^3 + 3x^2$
(πολυώνυμα Hermite)



Παραμετρικά Τμήματα Coons (4)