Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

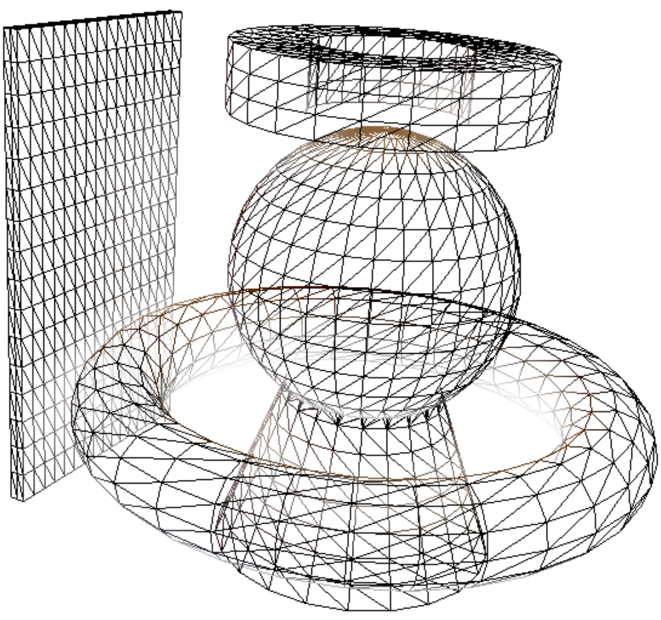
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων
www.syros.aegean.gr

Σημειώσεις στη Σχεδίαση με Η/Υ

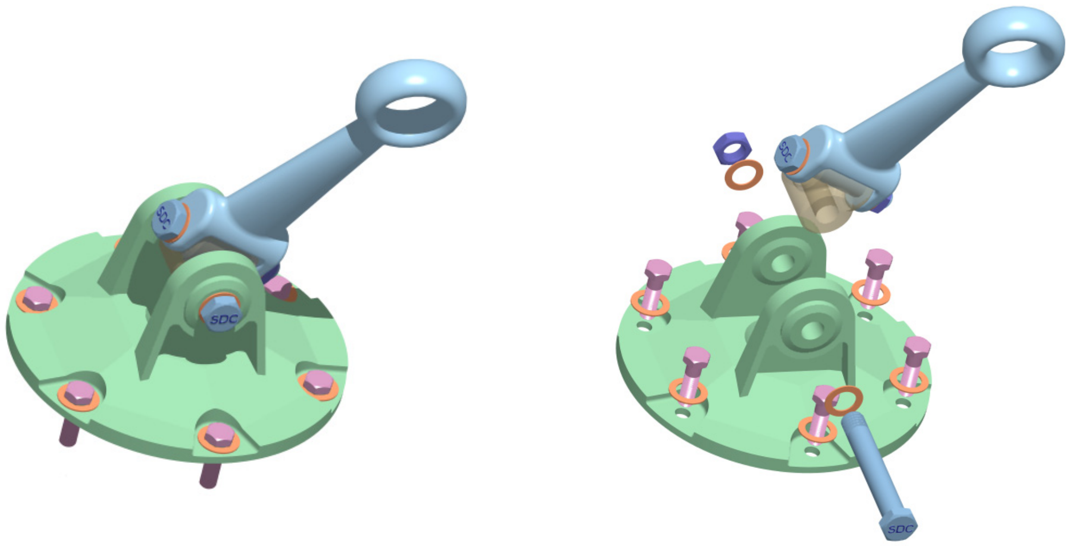
Συμπληρωματικές σημειώσεις στα πλαίσια των μαθημάτων
«Σχεδίαση με Η/Υ», «Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAGD)
«Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAD) – ΠΜΣ»,
«Σχεδίαση & Ανάλυση με Η/Υ (CAD/CAE) – ΠΜΣ»

Ακαδημαϊκό Έτος
2014-2015



Φίλιππος Αζαριάδης
www.syros.aegean.gr/users/azar

Περιεχόμενα



(α) (β)

Σχήμα 5-1 (α) Στερεό μοντέλο. (β) Συναρμολόγηση με στερεά μοντέλα.

5 Στερεά Μοντελοποίηση[1]

Απαραίτητη προϋπόθεση των τεχνολογιών CAD/CAE/CAM είναι η ύπαρξη αποτελεσματικής μεθόδου/τεχνολογίας για τη περιγραφή/μοντελοποίηση διδιάστατων και τριδιάστατων αντικειμένων.

Η μοντελοποίηση διδιάστατων και τριδιάστατων αντικειμένων μπορεί να επιτευχθεί με τρεις βασικούς τρόπους ως: (α) Μοντέλα Ακμών, (β) Μοντέλα Επιφανειών και (γ) Μοντέλα Στερεών. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή των Στερεών Μοντέλων τόσο σε επίπεδο αντικειμένου (στερεού) όσο και σε επίπεδο αναπαράστασης. Πριν προχωρήσουμε γίνεται μια σύντομη περιγραφή των Μοντέλων Ακμών και των Μοντέλων Επιφανειών.

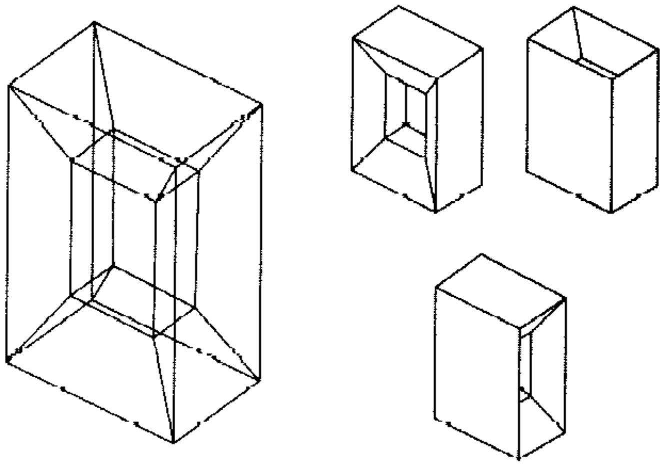
5.1 Μοντέλα Ακμών (wireframe models)

Στα μοντέλα ακμών (Μ.Α.) η περιγραφή του 2Δ ή 3Δ αντικειμένου γίνεται με χρήση των εξής στοιχείων:

- ***Ακμές:*** Ακμή είναι ευθύγραμμο τμήμα ή τμήμα καμπύλης ή κλειστή καμπύλη.
- ***Κορυφές:*** Κορυφή είναι σημείο όπου συναντώνται δύο ακμές.

Το μοντέλο ακμών είναι το απλούστερο είδος γεωμετρικού μοντέλου, το πρώτο που χρησιμοποιήθηκε στα πρώτα συστήματα CAD/CAM της δεκαετίας του 1960. Τα συστήματα αυτά και οι προσφερόμενες λειτουργίες ήταν αποκλειστικά 2Δ, όπου το Μ.Α. είναι πολύ ικανοποιητικό. Το μοντέλο αυτό είναι η κατευθείαν υλοποίηση σε Η/Υ της τεχνικής των «τεχνικών σχεδίων όψεων».

[1] Βασισμένο σε αρχικές σημειώσεις του Καθηγητή κ. Ν. Σαπίδη (nsapidis@uowm.gr)



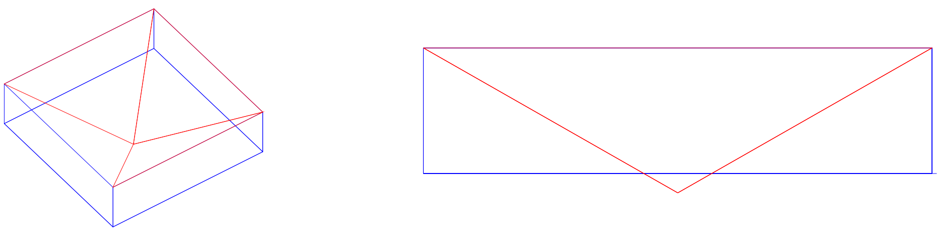
Σχήμα 5-2 Το Μ.Α. (αριστερά) είναι **ασαφές**, διότι μπορεί να αναπαριστά οποιοδήποτε από τα τρία αντικείμενα (δεξιά)

Πλεονεκτήματα:

- Το Μ.Α. είναι απλό όσον αφορά την κατασκευή και την περιγραφή, δηλ., δεν απαιτεί υπολογιστική ισχύ ούτε πολλή μνήμη Η/Υ.
- Χρήση του Μ.Α. δεν προϋποθέτει μακρόχρονη εκπαίδευση χρηστών διότι είναι πολύ παρόμοιο με τον παραδοσιακό τεχνικό σχεδιασμό και χρησιμοποιεί απλά μαθηματικά/υπολογιστικά εργαλεία.

Μειονεκτήματα:

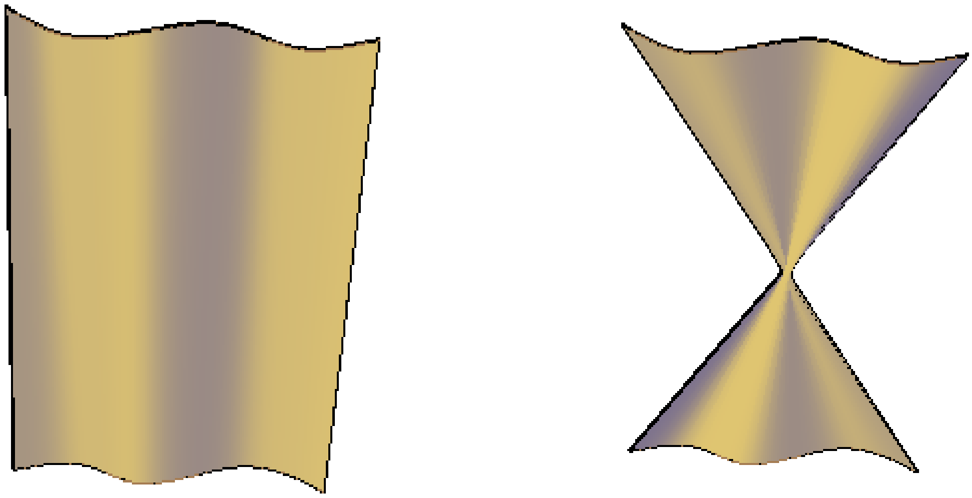
- Για ένα 3Δ αντικείμενο, το αντίστοιχο Μ.Α. είναι πληροφοριακά ατελές, διότι δεν ορίζει πλήρως το σύνορο του αντικειμένου (δεν ορίζει τις έδρες/επιφάνειες του). Αυτό σχετίζεται και με το επόμενο μειονέκτημα.
- Αδυναμία απεικόνισης καμπύλων εδρών 3Δ αντικειμένου.
- Ένα Μ.Α. μπορεί να είναι ασαφές (ambiguous) – δες Σχήμα 5-2.
- Ένα σύστημα που βασίζεται μόνο σε Μ.Α. αδυνατεί να ανιχνεύσει **εσφαλμένα (nonsense)** 3Δ αντικείμενα.



Σχήμα 5-3 Παράδειγμα εσφαλμένου αντικειμένου που τέμνει τον εαυτό του.

- Παρότι ο χρόνος εκπαίδευσης χρήστη είναι μικρός, ο απαιτούμενος χρόνος εργασίας είναι σημαντικός και αυξάνεται σημαντικά σε συνάρτηση με την πολυπλοκότητα του αντικειμένου.

Σημείωση: πολλές φορές η συγκεκριμένη αναπαράσταση καλείται και ως *συρμάτινη αναπαράσταση*.



Σχήμα 5-4 (α) Οδηγούμενη επιφάνεια κατασκευασμένη από δύο καμπύλες οδηγούς με κοινό "προσανατολισμό" (πχ. "από αριστερά προς δεξιά"). (β) Η αντίστοιχη εσφαλμένη επιφάνεια που κατασκευάστηκε από τις ίδιες καμπύλες οδηγούς που έχουν όμως λάθος ("αντίθετο") προσανατολισμό.

5.2 Μοντέλα Επιφανειών

Τα μοντέλα επιφανειών (Μ.Ε.) εκτός από ακμές και κορυφές περιλαμβάνουν και **έδρες**. Επίσης οι ακμές μπορεί να είναι καμπύλες.

Πλεονεκτήματα:

- Το Μ.Ε. είναι σχετικά απλό όσον αφορά την κατασκευή και την περιγραφή. Για τα σημερινά δεδομένα, δεν απαιτεί υπολογιστική ισχύ ούτε πολλή μνήμη Η/Υ.
- Η χρήση του Μ.Ε. προϋποθέτει περιορισμένη εκπαίδευση χρηστών και βασικές γνώσεις των υπολογιστικών εργαλείων.
- Δυνατότητα χρησιμοποίησης εργαλείων «ελεύθερης σχηματοποίησης» (ή free-form surfacing) για τα οποία όμως χρειάζεται επιπλέον εκπαίδευση.
- Το Μ.Ε. δεν είναι ασαφές και περιγράφει ένα μοναδικό αντικείμενο.

Μειονεκτήματα:

- Ένα σύστημα που βασίζεται μόνο σε Μ.Ε. αδυνατεί να ανιχνεύσει **εσφαλμένα (nonsense)** 3Δ αντικείμενα (Σχήμα 5-4).
- Έλλειψη τοπολογικών πληροφοριών: για ένα αντικείμενο με γνωστό το μοντέλο επιφανειών του και για ένα σημείο στον χώρο, δεν υπάρχει η δυνατότητα επαλήθευσης αν το σημείο αυτό ανήκει στο εσωτερικό του αντικειμένου ή όχι.

5.3 Στερεά Μοντέλα

Στερεά μοντέλα (Σ.Μ.) είναι πλήρη ως προς τα πληροφοριακά δεδομένα που διατηρούν για κάθε αντικείμενο. Ένα στερεό μοντέλο ενός αντικειμένου είναι μια αναπαράσταση η οποία διατηρεί γεωμετρικές **και** τοπολογικές πληροφορίες για αυτό προσφέροντας τη δυνατότητα της αυτοματοποίησης μεγάλου πλήθους διαδικασιών που υπάρχουν σε ένα σύστημα CAD/CAM/CAE. Για παράδειγμα, ένα στερεό μοντέλο ενός αντικειμένου φέρει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες ώστε να εφαρμοστούν αυτόματα (χωρίς μεσολάβηση του χρήστη) αλγόριθμοι εύρεσης μάζας, κέντρου βάρους, υπολογισμού ροπών, κοκ.

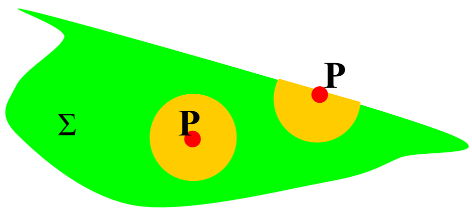
Στη τρέχουσα βιβλιογραφία επικρατούν δύο αναπαραστάσεις στερεών: (α) η **συνολοθεωρητική μοντελοποίηση (Constructive Solid Geometry-CSG)** και (β) η **συνοριακή μοντελοποίηση (Boundary representation – B-rep)**. Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των μεθόδων αναπαράστασης στερεών μοντέλων είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε τις έννοιες *«στερεό»* και *«στερεά μοντελοποίηση»* εξετάζοντας τις ιδιότητές τους.

5.3.1 Ιδιότητες «Στερεού»

Επιθυμούμε την ανάπτυξη λογισμικών συστημάτων τα οποία δεν βασίζονται στον χρήστη για τον έλεγχο ορθότητας ενός αντικειμένου. Η εξασφάλιση ορθότητας από το ίδιο το λογισμικό προϋποθέτει τον πλήρη ορισμό των εννοιών «στερεό» και «στερεό μοντέλο».

Για την ανάπτυξη των ιδιοτήτων θα βασιστούμε στους παρακάτω μαθηματικούς ορισμούς:

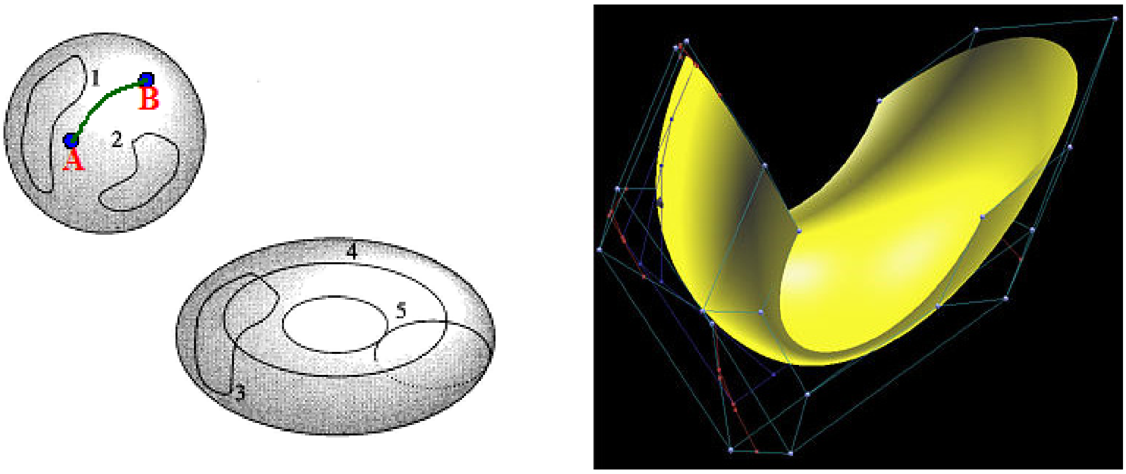
Γειτονιά σημείου:
(A) Για το σημείο $\mathbf{P}$ του 3Δ χώρου, η γειτονιά $\Gamma(\mathbf{P})$ του $\mathbf{P}$ είναι **σφαίρα** με κέντρο το $\mathbf{P}$ και ακτίνα $R \to 0$.
(B) Για το σημείο $\mathbf{P}$ του 3Δ σημειοσυνόλου Σ (δείτε σχήμα), η γειτονιά $\Gamma_\Sigma(\mathbf{P})$ του $\mathbf{P}$ ως προς το Σ είναι το **τμήμα σφαίρας**, με κέντρο το $\mathbf{P}$ και ακτίνα $R \to 0$, που περιέχεται στο Σ.



Σχήμα 5-5 Σημεία των οποίων η γειτονιά $\Gamma_\Sigma(\mathbf{P})$ ανήκει ολόκληρη ή τμήμα της στο Σ.

Κλειστό σύνολο:
Ορισμός 1: Αν Σ είναι ένα 2Δ ή 3Δ σημειοσύνολο μέσα στον 2Δ ή 3Δ «κόσμο» (universe) Ω αντίστοιχα, τότε το σύνολο $\Omega - \Sigma$ ονομάζεται «συμπλήρωμα του Σ» και συμβολίζεται με $c\Sigma$.
Ορισμός 2: Οριακά σημεία του Σ ονομάζονται τα σημεία των οποίων η γειτονιά τέμνει και το Σ και το $c\Sigma$.
Ορισμός 3: **Κλειστό** ονομάζεται το σημειοσύνολο Σ όταν αυτό περιέχει τα οριακά του σημεία. Τότε, το σύνολο των οριακών σημείων του Σ ονομάζεται **σύνορο** $b\Sigma$ του Σ, και γράφουμε $\Sigma = i\Sigma \cup b\Sigma$.

Λαμβάνοντας υπόψη τους ανωτέρω ορισμούς οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί ένα «στερεό» είναι οι εξής:



(α) (β)

Σχήμα 5-6 (α) Καμπύλες επάνω σε επιφάνειες σφαίρας και σπείρας, και σύνδεση των σημείων **A** και **B** με μια καμπύλη που βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. (β) Παράδειγμα επιφάνειας που δεν είναι κλειστή, δηλ., έχει σύνορο που ορίζεται από καμπύλες.

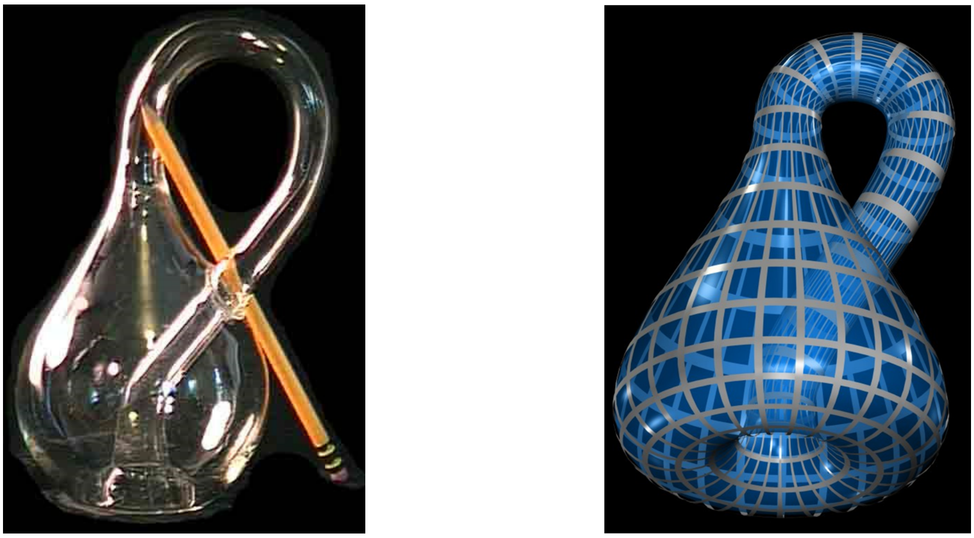
1. Φραγμένο (bounded): ορίζεται σε πεπερασμένο χώρο.
2. Κλειστό (closed): Το στερεό περιλαμβάνει το σύνορό του.
3. Συνεκτικό (connected): Για κάθε ζεύγος σημείων **A**, **B** του στερεού (αντιστ. *σημειοσυνόλου*) Σ, υπάρχει καμπύλη που τα συνδέει και η οποία ανήκει στο Σ.

Σε συνέχεια των παραπάνω τριών βασικών ιδιοτήτων, το σύνορο του στερεού είναι επιφάνεια που έχει τις εξής ιδιότητες:

4. Το σύνορο είναι συνεκτικό: Για κάθε ζεύγος σημείων **A**, **B** του συνόρου, υπάρχει καμπύλη που τα συνδέει η οποία κείται εξ' ολοκλήρου πάνω στο σύνορο.
5. Το σύνορο είναι προσανατολισμένο: σε κάθε σημείο του υπάρχει διεύθυνση «προς τα μέσα» και διεύθυνση «προς τα έξω».
6. Το σύνορο δεν τέμνει τον εαυτό του.
7. Το σύνορο είναι ***κλειστό***: δηλ., το σύνορο είναι επιφάνεια χωρίς σύνορο.
8. Το σύνορο εφάπτεται στο εσωτερικό του στερεού: δηλ., για κάθε σημείο του συνόρου, η γειτονιά του τέμνει το εσωτερικό του στερεού.

Ο A. Requicha (1977,1980) κατέγραψε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει ένα τριδιάστατο Σ.Μ. για να εξυπηρετεί τις τυπικές εφαρμογές CAD/CAE/CAM. Κατ'αρχήν, **συμπλήρωσε** τις ιδιότητες που έχουν τα στερεά με τις εξής [Zeid p. 347]:

9. Αναλλοίωτη Μορφή (Rigidity): Ένα στερεό έχει αναλλοίωτες γεωμετρικές ιδιότητες, που δεν αλλάζουν με την αλλαγή θέσης ή/και προσανατολισμού στο χώρο.
10. Ομογενώς Τριδιάστατο: **Δεν** περιλαμβάνει τμήματα 2Δ (dangling faces) ή 1Δ (dangling edges).
11. *Κλειστότητα* σε σχέση με στερεούς μετασχηματισμούς και κανονικοποιημένες πράξεις συνόλων: όταν σε <u>στερεά</u> εφαρμόζω τα παραπάνω το <u>αποτέλεσμα</u> είναι πάντα ένα ή περισσότερα (ορθά) <u>στερεά.</u>
12. Πεπερασμένη περιγραφή: Η περιγραφή του Σ.Μ. θα πρέπει να ολοκληρώνεται μετά από πεπερασμένο σύνολο «βημάτων».



Σχήμα 5-7 Παράδειγμα μη προσανατολισμένου κλειστού συνόρου (Klein Bottle)

13. Boundary Determinism: Το σύνορο προσδιορίζει σαφώς και κατά τρόπο μοναδικό το εσωτερικό του στερεού, δηλ., το σύνορο αποτελεί πλήρη περιγραφή του στερεού.

5.3.2 Ιδιότητες Μεθόδου Στερεάς Μοντελοποίησης

Έστω μέθοδος R(Σ) μέσω της οποίας κατασκευάζεται ένα στερεό μοντέλο Σ. Για να εξυπηρετεί η R(Σ) τις τυπικές εφαρμογές ενός συστήματος CAD/CAE/CAM θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες [Mortenson p. 429, Zeid p. 348]:

1. Επαρκώς ευρύ Πεδίο Αναπαράστασης (representation domain): Η μέθοδος R(Σ) μπορεί να περιγράψει όλα τα είδη αντικειμένων που ενδιαφέρουν μια συγκεκριμένη εργασία.
2. Σαφήνεια (unambiguousness): Κάθε μέθοδος R(Σ) αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς στερεό Σ.
3. Ελέγξιμη Ορθότητα Μοντέλου (Validity): Είναι δυνατή η ανάπτυξη μεθόδου για τον έλεγχο της ορθότητας R(Σ).
4. Κάθε μέθοδος R(Σ) ορίζει ομογενώς-τριδιάστατο στερεό Σ με σύνορο.
5. Η περιγραφή R(Σ) είναι πεπερασμένη και ορίζει πεπερασμένο στερεό Σ.
6. Πληρότητα: Δυνατότητα υποστήριξης όλων των εφαρμογών.

Επιθυμητές ιδιότητες οι οποίες <u>δεν</u> είναι απαραίτητες για την ορθότητα της R(Σ):
7. Ακρίβεια: Το σφάλμα προσέγγισης του στερεού Σ από τη μέθοδο R(Σ) είναι μηδενικό.
8. Μοναδικότητα: Κάθε στερεό Σ αντιστοιχεί ακριβώς σε μια μέθοδο R(Σ).

5.4 Συνολοθεωρητικά Μοντέλα Στερεών

Στα συνολοθεωρητικά μοντέλα στερεών ορίζεται μια σειρά από στοιχειώδη στερεά και ένα σύνολο επιτρεπτών πράξεων. Στη συνέχεια κάθε στερεό κατασκευάζεται εφαρμόζοντας τις επιτρεπτές πράξεις μεταξύ δύο υπαρχόντων στερεών τα οποία μπορεί να είναι είτε στοιχειώδη στερεά είτε στερεά που έχουν προκύψει με την σειρά τους από πράξεις στοιχειωδών στερεών.

5.4.1 Στοιχειώδη Στερεά (Primitives)

Είναι απλά στερεά που κατασκευάζονται (ορίζονται), π.χ., με μέθοδο Αναλυτικής Γεωμετρίας σε κατάλληλο Σύστημα Συντεταγμένων Στερεού (ΣΣΣ) ή στο «Παγκόσμιο» Σύστημα Συντεταγμένων (WCS ή ΠΣΣ). Τα συνηθέστερα στοιχειώδη στερεά είναι τα εξής:

Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο (Box ή Block):

Περίπτωση Α (χρήση ΣΣΣ). Ως προς το ΣΣΣ $\mathbf{P}xyz$, το παραλ/δο ορίζεται με αρχή το $\mathbf{P}(0,0,0)$ και μήκος $L // \mathbf{P}x$, πλάτος $W // \mathbf{P}y$, και ύψος $H // \mathbf{P}z$. Ο χρήστης εισάγει τα απαραίτητα στοιχεία για τον ορισμό του ΣΣΣ ως προς το ΠΣΣ και τα αριθμητικά στοιχεία L, W, H για τον γεωμετρικό ορισμό του παραλ/δου.

Περίπτωση Β (χρήση ΠΣΣ). Ο χρήστης εισάγει τα απαραίτητα στοιχεία ορισμού *θέσεως* και *προσανατολισμού* του παραλ/δου και τα αριθμητικά στοιχεία L, W, H για τον γεωμετρικό ορισμό του.

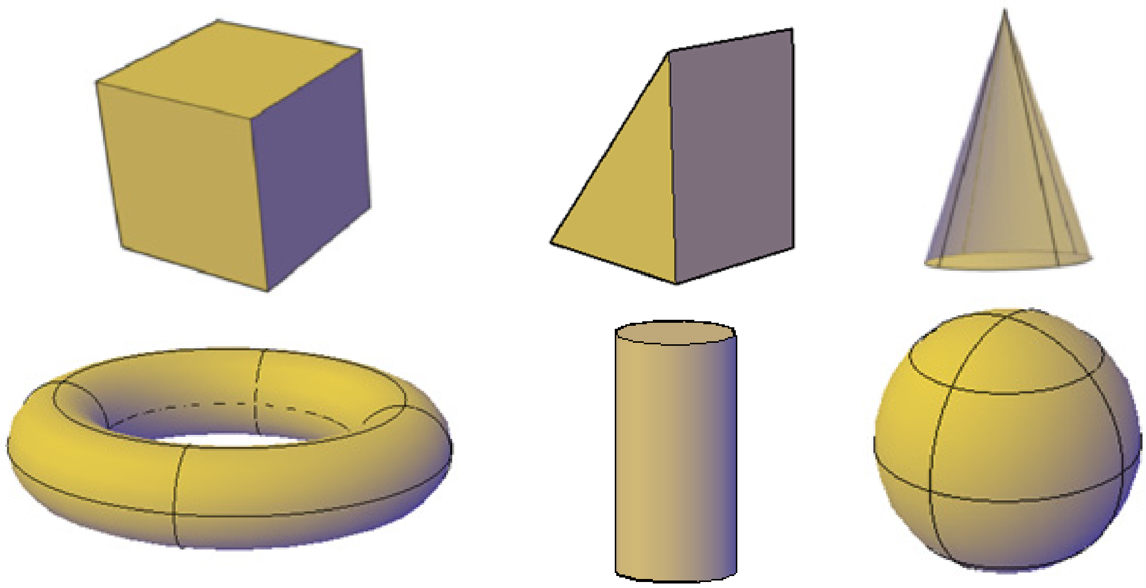
Κάθε σύστημα CAD προσφέρει τη δική του τεχνική κατασκευής του παραλ/δου στα πλαίσια της χρησιμοποιούμενης μεθόδου για διάλογο με τον χρήστη. Από σύστημα σε σύστημα διαφέρει:

- η χρήση ΣΣΣ ή ΠΣΣ,
- η σειρά προσδιορισμού παραμέτρων,
- το είδος των ζητούμενων στοιχείων,
- οι τυχόν προτεινόμενες «προκαθορισμένες (default) τιμές» για τις παραμέτρους, κ.α.

Π.χ., είναι δυνατόν το σύστημα CAD_1 να ορίζει το παραλ/δο στο ΠΣΣ και να ζητά από τον χρήστη ορισμό προσανατολισμού του παραλ/δου, ενώ άλλο σύστημα CAD_2 που επίσης ορίζει το παραλ/δο στο ΠΣΣ να μη ζητά αυτή τη πληροφορία διότι πάντα ορίζει το αντικείμενο σε “standard προσανατολισμό” (παράλληλα στους άξονες του ΠΣΣ). Στη δεύτερη περίπτωση, ο χρήστης διορθώνει τον προσανατολισμό του παραλ/δου μετά τον ορισμό του.

Τα ίδια ισχύουν για όλα τα στοιχειώδη στερεά, γι’αυτό παρακάτω αναφέρουμε μόνο τις παραμέτρους γεωμετρικού ορισμού:

- **Κύλινδρος (Cylinder):** Ακτίνα R ή διάμετρος D κυκλικής βάσεως και ύψος/μήκος H.
- **Κώνος (Cone):** Ακτίνα R ή διάμετρος D κυκλικής βάσεως R και ύψος/μήκος H.
- **Σφαίρα (Sphere):** Ακτίνα R ή διάμετρος D. Συνήθως, τα συστήματα CAD δεν ζητούν προσδιορισμό κέντρου και κατασκευάζουν σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ του χρησιμοποιούμενου ΣΣ.



Σχήμα 5-8 Στοιχειώδη στερεά.

- **Σφήνα (Wedge):** Ορίζεται από ορθογώνιο τρίγωνο μήκους L και ύψους H κατά πλάτος W.
- **Σπείρα (Torus):** Βάσει της μεθόδου κατασκευής με κυκλικό δίσκο που περιστρέφεται γύρω από άξονα, οι παράμετροι είναι η ακτίνα R_1 του κυκλικού δίσκου και η ακτίνα R_2 της κυκλικής τροχιάς. Εναλλακτικά, το ίδιο αντικείμενο ορίζεται από την «εσωτερική ακτίνα» R_I και την αντίστοιχη «εξωτερική ακτίνα» R_O.

5.4.2 Συνολοθεωρητικό Μοντέλο Στερεού

Πρωτογενές Συνολοθεωρητικό (ΣΘ) μοντέλο: Το στερεό Α κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας δύο υπάρχοντα στερεά, το Β και το Γ, ως εξής:

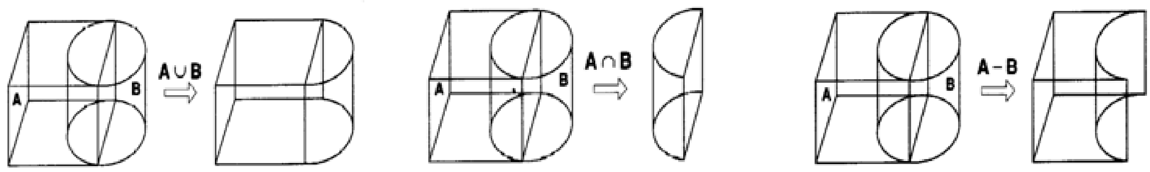
Α = Β **<Π>** Γ **,**

όπου η ΣΘ πράξη <Π> μπορεί να είναι η «**ένωση συνόλων** $\cup$», η «**τομή συνόλων** $\cap$» ή η «**διαφορά συνόλων -**» (δες Σχήμα 5-9 και Σχήμα 5-10).

- **Ένωση δύο συνόλων Β και Γ :** Το αποτέλεσμα είναι σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του Β και όλα τα στοιχεία του Γ. Ισχύει ότι: $Β \cup Γ = Γ \cup Β$.
- **Τομή δύο συνόλων Β και Γ :** Περιλαμβάνει μόνο εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν και στο Β και στο Γ. Ισχύει ότι: $Β \cap Γ = Γ \cap Β$.
- **Διαφορά Β - Γ :** Περιλαμβάνει τα στοιχεία του Β που δεν περιέχονται στο Γ. Προφανώς, ισχύει ότι: $Β - Γ \neq Γ - Β$.

Βεβαίως, στο Α = Β <Π1> Γ είναι δυνατό τα Β, Γ να μην είναι στοιχειώδη στερεά αλλά και αυτά να ορίζονται με χρήση του ίδιου ΣΘ μοντέλου. Έτσι προκύπτει το **γενικό ΣΘ μοντέλο**:

Α = (Δ <Π2> Ε) <Π1> (Ζ <Π3> Η) =
= ([Θ <Π> Ι] <Π2> [Κ <Π> Λ]) <Π1> ([Μ <Π> Ν]<Π3> Η) = ...



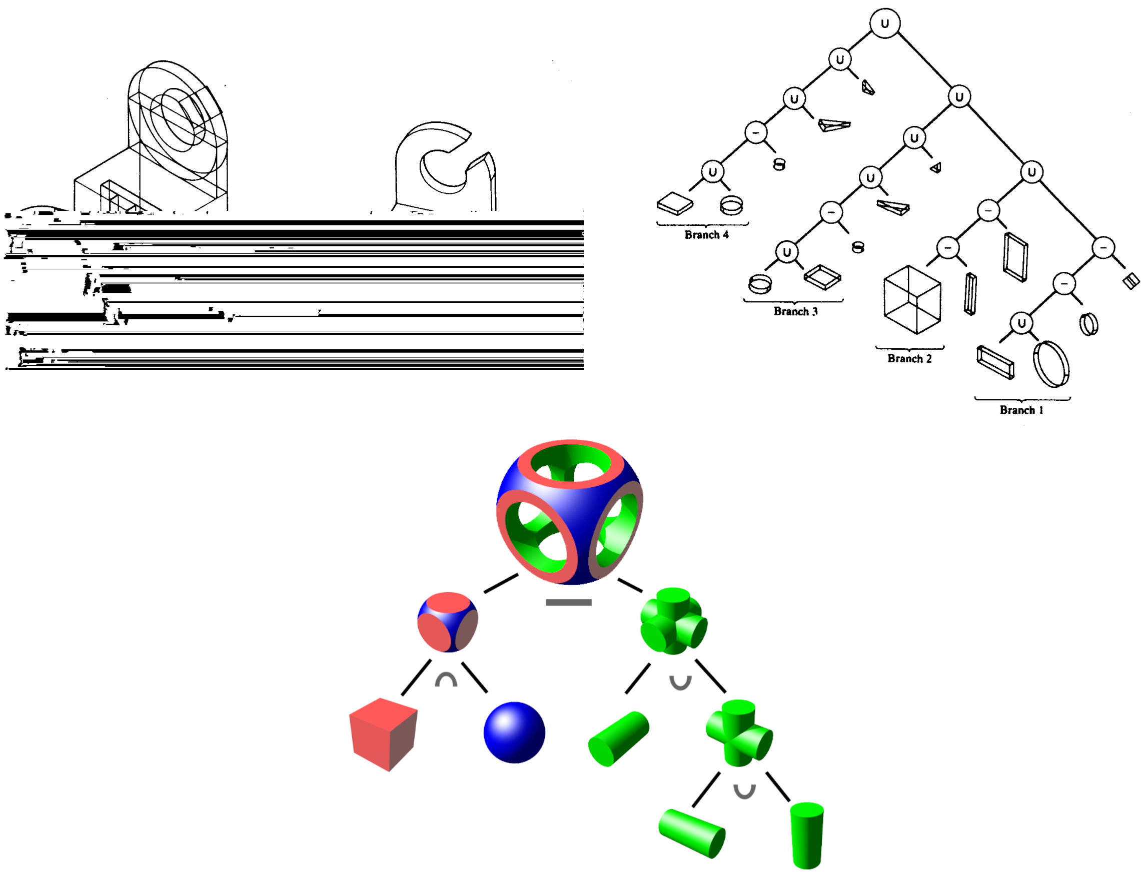
Ένωση *Τομή* *Αφαίρεση*

Σχήμα 5-9 Πράξεις συνόλων.

για το οποίο ***προφανώς*** η περιγραφή με «μαθηματικές πράξεις/εξισώσεις» δεν είναι αποτελεσματική. Καλύτερη περιγραφή προσφέρει ένα directed graph και πιο συγκεκριμένα η δομή **"δυαδικό δένδρο"** (binary tree). Η συγκεκριμένη δομή, περιλαμβάνει **κόμβους (nodes)** που συνδέονται μεταξύ τους με **κλάδους (branches)**. Κάθε κόμβος έχει έναν ακριβώς **πατέρα** (με άλλα λόγια: έναν ακριβώς **εισερχόμενο κλάδο**) εκτός από τη **ρίζα** που δεν έχει πατέρα. Κάθε πατέρας έχει ακριβώς δύο *διατεταγμένα* παιδιά ή κανένα εάν είναι τερματικός κόμβος ή **φύλο**.

Στο ΣΘ-γράφο: οι τερματικοί κόμβοι αντιπροσωπεύουν *στοιχειώδη στερεά (primitives)* ενώ οι άλλοι κόμβοι αντιπροσωπεύουν *ΣΘ πράξεις.*

Παρατήρηση: Το μοντέλο ΣΘ-γράφου ΣΘ(Σ) του στερεού Σ είναι **διαδικαστικό (procedural)** και είναι **unevaluated.** Πράγματι, δεν μας προσδιορίζει ούτε ένα σημείο (x,y,z) που ανήκει στο στερεό Σ. Αντί μιας περιγραφής των σημείων του Σ, έχουμε μια μέθοδο κατασκευής του Σ.



Σχήμα 5-10 Παραδείγματα Συνολοθεωρητικών Μοντέλων

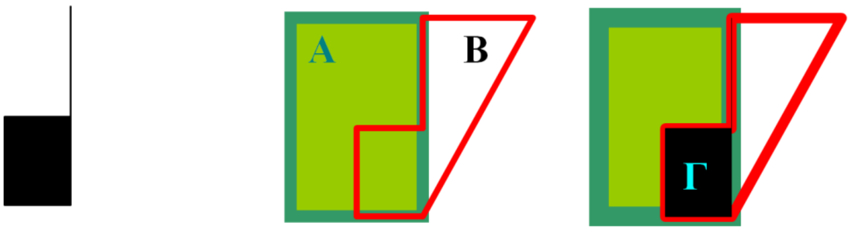
5.5 Κανονικοποιημένες Συνολοθεωρητικές (ΣΘ) Πράξεις

Οι κλασικές πράξεις της Θεωρίας Συνόλων δεν εγγυώνται ότι το αποτέλεσμα (στερεό) έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες (βλ. ενότητα ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ «ΣΤΕΡΕΟΥ»).

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1:</u> Οι κλασικές ΣΘ πράξεις **δεν** εγγυώνται ότι τα κατασκευαζόμενα στερεά έχουν την ιδιότητα **7** (κλειστό σύνορο).

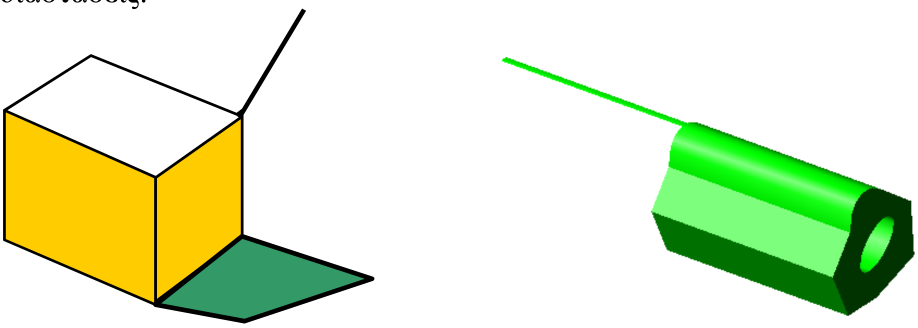
Παράδειγμα: Τα 2Δ σημειοσύνολα (επίπεδα «χωρία») A και B έχουν όλες τις ιδιότητες του «διδιάστατου στερεού», όμως η τομή τους **δεν** είναι **«ομογενώς 2Δ χωρίο».**

$A \cap B = \Gamma$, όπου το χωρίο Γ είναι:



Σχήμα 5-11 Παράδειγμα μη ομογενούς 2Δ χωρίου

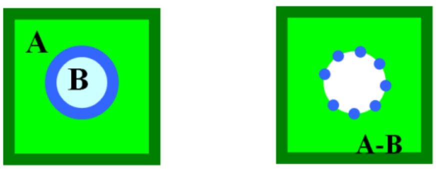
Στις τρεις διαστάσεις:



Σχήμα 5-12 Παράδειγμα μη ομογενούς 3Δ χωρίου

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2:</u> Οι κλασικές ΣΘ πράξεις **δεν** εγγυώνται ότι το αποτέλεσμα είναι πάντα ένα κλειστό σημειοσύνολο.

Παράδειγμα: Το A είναι ορθογώνιο παραλ/δο και το B κύλινδρος που χρησιμοποιείται για άνοιγμα οπής. Το σημειοσύνολο $A-B$ έχει οπή και τα σημεία στην περιφέρεια της οπής **δεν** ανήκουν στο $A-B$. Τα σημεία της περιφέρειας της οπής είναι ***οριακά σημεία*** του $A-B$ και δεν ανήκουν σε αυτό, άρα το $A-B$ δεν είναι κλειστό. Η περιφέρεια της οπής δεν είναι τμήμα του συνόρου του $A-B$.



Σχήμα 5-13 Παράδειγμα μη κλειστού 2Δ σημειοσυνόλου

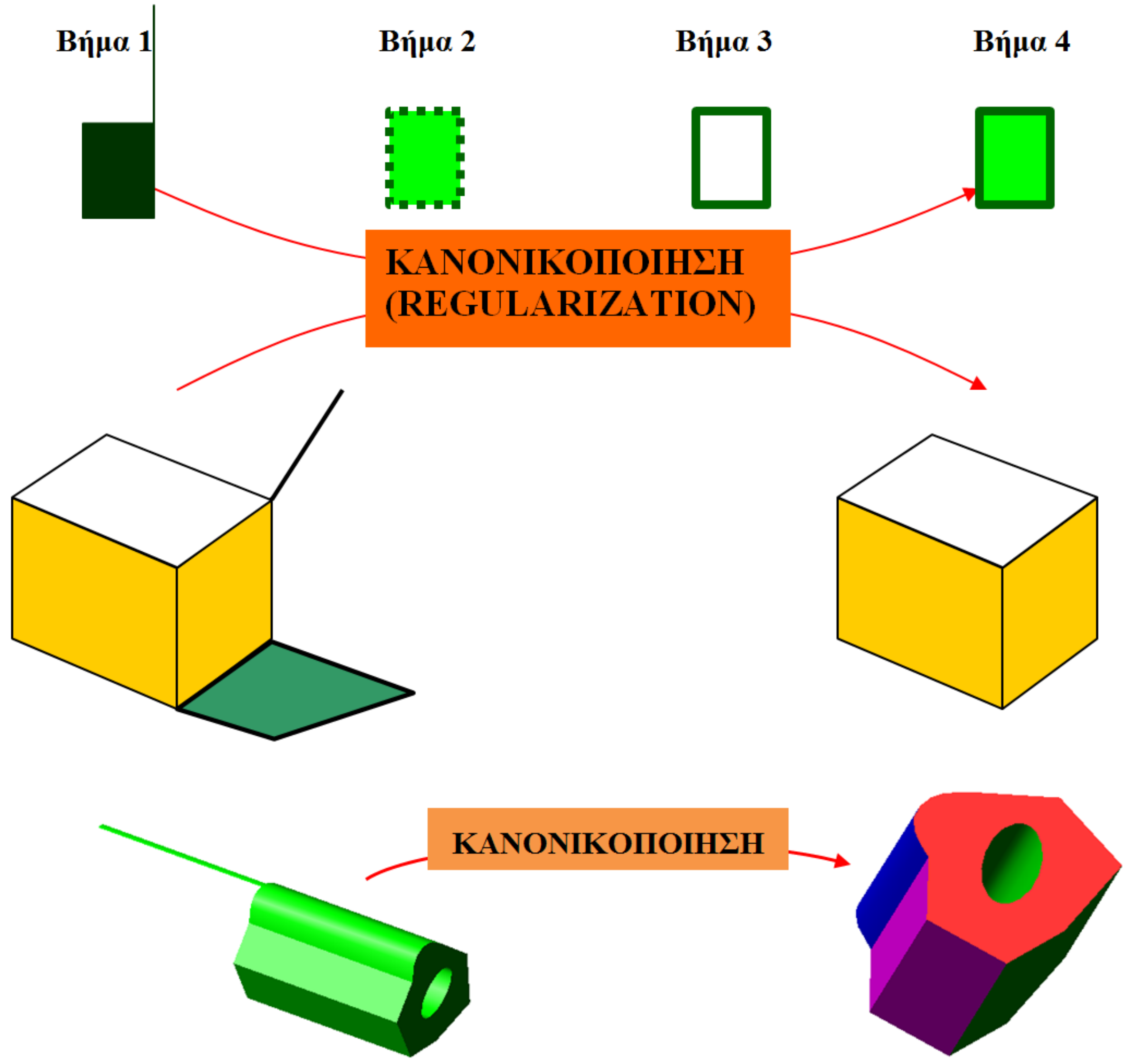
Κανονικοποιημένες πράξεις:

Για να επιλυθούν τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω εφαρμόζεται η παρακάτω διαδικασία.

Βήμα 1. Υπολογίζω το αποτέλεσμα της πράξης $\Phi = A \;\mathbf{<\Pi>}\; B$.
Βήμα 2. Υπολογίζω το εσωτερικό $i\Phi$.
Βήμα 3. Υπολογίζω το όριο (δηλ., το σύνολο των οριακών σημείων) του $i\Phi$, έστω $oi\Phi$.
Βήμα 4. Υπολογίζω το σημειοσύνολο $ki\Phi = i\Phi \cup oi\Phi$.

- Στον μαθηματικό κλάδο της Τοπολογίας, το $ki\Phi$ ονομάζεται **«κέλυφος (closure) του** $i\Phi$ **»**.
- Στη στερεά μοντελοποίηση το $ki\Phi$ ονομάζεται «**κανονικοποιημένο** Φ» ή «**κανονικοποίηση του** Φ» και συμβολίζεται με το Φ^*.

Παράδειγμα:



Σχήμα 5-14 Σχηματική αναπαράσταση της κανονικοποίησης 2Δ και 3Δ χωρίων

Άρα, η κανονικοποιημένη ένωση $A \cup B$ είναι το σύνολο $ki(A \cup B)$. Συμβολίζουμε την κανονικοποιημένη ένωση ως $A \cup^* B$. Άρα, εξ ορισμού:

$$A \cup^* B \;=\; ki(A \cup B)$$

Αντίστοιχα ορίζουμε την κανονικοποιημένη τομή:

$$A \cap^* B \;=\; ki(A \cap B)$$

και την κανονικοποιημένη διαφορά σημειοσυνόλων:

$$A -^* B \;=\; ki(A - B)$$

Στην διεθνή βιβλιογραφία στερεάς μοντελοποίησης και στις αντίστοιχες τεχνολογίες λογισμικού, το μοντέλο «ΣΘ-γράφος με κανονικοποιημένες πράξεις» ονομάζεται: Constructive Solid Geometry (CSG).

5.6 Στερεά Μοντέλα Συνόρου (B-rep)

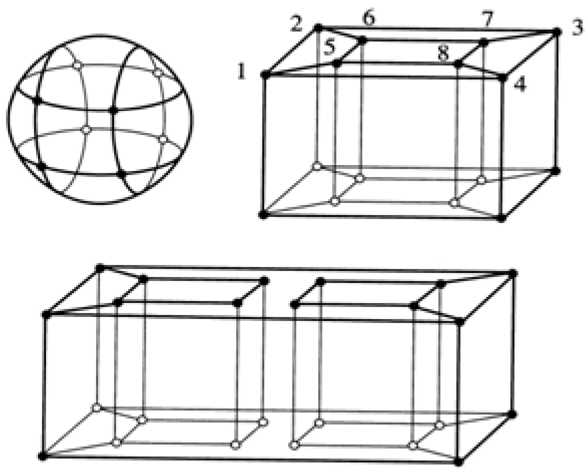
Πρόκειται για μοντέλα που παρέχουν μια πληροφοριακά πλήρη περιγραφή του **συνόρου** του στερεού, αντί περιγραφής αυτού καθ'εαυτού του στερεού.

Οι **βασικές ιδιότητες** ενός ορθού συνόρου όπως έχουν αναλυθεί στην αρχή του κεφαλαίου είναι:

1. Κλειστό.
2. Προσανατολισμένο ή προσανατολίσιμο.
3. Το σύνορο δεν τέμνει τον εαυτό του.
4. Συνεκτικό.

Δομή συνόρου:

- **Έδρες.** Η κάθε έδρα είναι τμήμα προσανατολισμένης επιφάνειας. Το *σύνορο* της έδρας είναι (δείτε και σχήμα παρακάτω):
  - **i.** ένα σύνολο από **ακμές** ή
  - **ii.** ένα σύνολο από **ακμές** και ένα σύνολο από **κορυφές.**
- **Ακμές.** Η κάθε ακμή είναι τμήμα καμπύλης και το σύνορό της είναι **δύο κορυφές.**



Σχήμα 5-15 Παραδείγματα στερεών μοντέλων συνόρου

Ιδιότητες εδρών:

1. Ο αριθμός τους πρέπει να είναι πεπερασμένος.
2. Κάθε έδρα είναι υποσύνολο του συνόρου.
3. Το σύνορο Σ είναι ίσο με την ένωση όλων των εδρών:

$$\Sigma = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_N$$

4. Κάθε έδρα έχει πεπερασμένη επιφάνεια και είναι **ομογενώς διδιάστατη**.

5.6.1 Βασικά στοιχεία του Μοντέλου Συνόρου (ΜΣ)

1. **Κατασκευαστικά Στοιχεία,** π.χ., οι στοιχειώδεις επιφάνειες από τις οποίες κατασκευάζονται οι έδρες. Μπορεί να πει κανείς ότι αυτές οι στοιχειώδεις επιφάνειες είναι

το αντίστοιχο των στοιχειωδών στερεών του ΣΘ μοντέλου. Οι στοιχειώδεις επιφάνειες προσδιορίζονται από το Πεδίο Αναπαράστασης που πρέπει να έχει το σύστημα CAD/CAM/CAE.

2. **Τελεστές** (πράξεις, συναρτήσεις) που συνθέτουν στοιχειώδεις επιφάνειες και δημιουργούν το σύνορο του επιδιωκόμενου στερεού.
3. **Δομή δεδομένων** για αποθήκευση όλων των σχετικών στοιχείων/πληροφοριών.

5.6.2 Κατασκευαστικά Στοιχεία ΜΣ

1. **Κορυφή:** Σημείο.
2. **Ακμή:** πεπερασμένο τμήμα καμπύλης, δεν τέμνει τον εαυτό της, είναι προσανατολισμένη (έχει φορά διαγραφής), τα άκρα της ορίζονται από δύο κορυφές.
3. **Έδρα:** πεπερασμένο, συνεκτικό, τμήμα προσανατολισμένης επιφάνειας που δεν τέμνει τον εαυτό της και έχει ως σύνορο έναν ή περισσότερους **βρόχους** ακμών.

Παρατήρηση: Επειδή μια έδρα μπορεί να έχει πολλές οπές (δείτε παράδειγμα στο Σχήμα 5-15), δεν αρκεί η έννοια «ακμή» για την αποτελεσματική περιγραφή του συνόρου μιας έδρας – είναι απαραίτητη η εισαγωγή και της έννοιας «βρόχος» ή «δακτύλιος» (loop): Κάθε έδρα έχει έναν εξωτερικό βρόχο ακμών και 0/1/2/3 .... εσωτερικούς βρόχους (δακτύλιους).

4. **Βρόχος:** κλειστή ακολουθία όπου ακμές εναλλάσσονται με κορυφές. Η ακολουθία αυτή δεν τέμνει τον εαυτό της.
5. **Στερεό:** Σύνολο εδρών που ορίζουν ένα συνεκτικό, κλειστό και ομογενώς-3Δ σημειοσύνολο.

5.6.3 Στερεό Μοντέλο Συνόρου: Αναλυτική Περιγραφή

1. **Κορυφή.**

Γεωμετρικές ιδιότητες: Σημείο του 3Δ χώρου. Ορίζεται από διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x, y, z).

Τοπολογικές ιδιότητες: Ανήκει σε ορισμένες έδρες (βρόχους) και σε ορισμένες ακμές.

2. **Ακμή**

Γεωμετρικές ιδιότητες: Τμήμα καμπύλης που ξεκινά από την αρχική κορυφή και καταλήγει στην τελική κορυφή. Περιγράφεται από

- εξίσωση, π.χ., $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = 2 + t$, $t \in [0,1]$, ή
- τομή επιφανειών, δηλ., των επιφανειών στις οποίες ανήκουν οι έδρες που περιλαμβάνουν αυτή την ακμή, ή
- πολυγωνική προσέγγιση.

Τοπολογικές ιδιότητες:

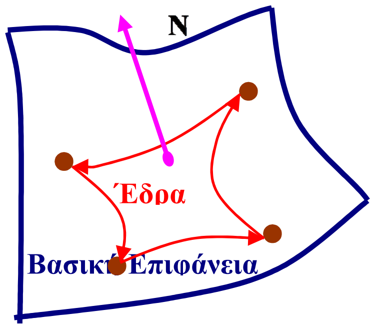
(2.α) Αρχική κορυφή και τελική κορυφή,

(2.β) Βρόχοι στους οποίους ανήκει η ακμή,

(2.γ) Ακμές με ίδιες κορυφές, κλπ, κλπ.

3. Έδρα.

Γεωμετρικές ιδιότητες:



Σχήμα 5-16 Τμήμα έδρας που κείται σε μια βασική επιφάνεια

(3.α) Μαθηματικό μοντέλο για <u>Τμήμα Επιφάνειας</u> (με σύνορο ίδιο με αυτό της έδρας) ή <u>Βασική (εκτεταμένη) Επιφάνεια</u> που περιέχει την έδρα, όπως στο Σχήμα 5-16.

(3.β) Κάθετο διάνυσμα (στην επιφάνεια) $\mathbf{N}$ ορισμένο σε κάθε σημείο της έδρας.

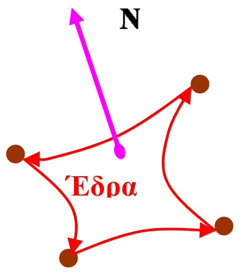
Τοπολογικές ιδιότητες:

(3.γ) Ακέραιος δείκτης $\delta = \pm 1$ ώστε το διάνυσμα $\delta\mathbf{N}$ να δείχνει προς το εξωτερικό (ή προς το εσωτερικό – ανάλογα με την χρησιμοποιούμενη σύμβαση) του στερεού.

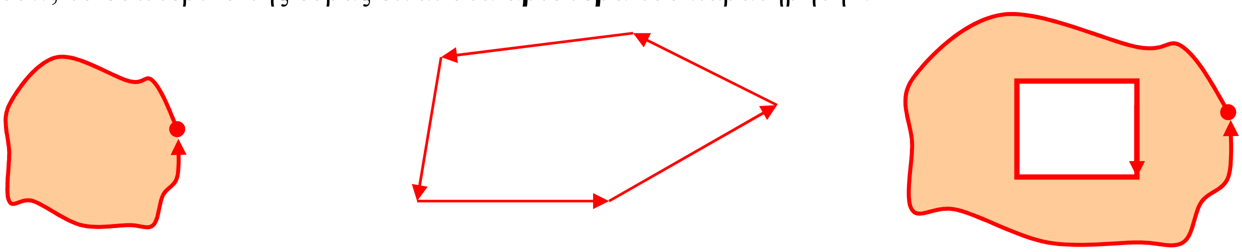
(3.δ) **Βρόχοι** που ορίζουν το εξωτερικό σύνορο και τα εσωτερικά σύνορα της έδρας.

4. Βρόχος.

Τοπολογικές ιδιότητες: Ακολουθία ακμών που εναλλάσσονται με κορυφές. Συνήθως, οι βρόχοι (και οι αντίστοιχες ακμές) είναι προσανατολισμένοι. Αυτός ο προσανατολισμός και μια δεδομένη σύμβαση επιτρέπουν τον προσδιορισμό του εσωτερικού της αντίστοιχης έδρας.



Παράδειγμα σύμβασης: «Για παρατηρητή κατά το διάνυσμα $\delta\mathbf{N}$, διατρέχοντας τον εξωτερικό βρόχο της έδρας (δείτε παραπάνω εικόνα) κατά φορά αντίθετη με τους δείκτες του ρολογιού ή **ccw**, το εσωτερικό της έδρας είναι στα ***αριστερά*** του παρατηρητή».



Άλλα παραδείγματα: Είναι προφανές (δείτε τρίτο παράδειγμα στο παραπάνω σχήμα) ότι είναι δυνατόν οποιαδήποτε τέτοια σύμβαση να επεκταθεί και στους εσωτερικούς βρόχους, οι οποίοι πρέπει να προσανατολίζονται ***αντίθετα*** από τον εξωτερικό.

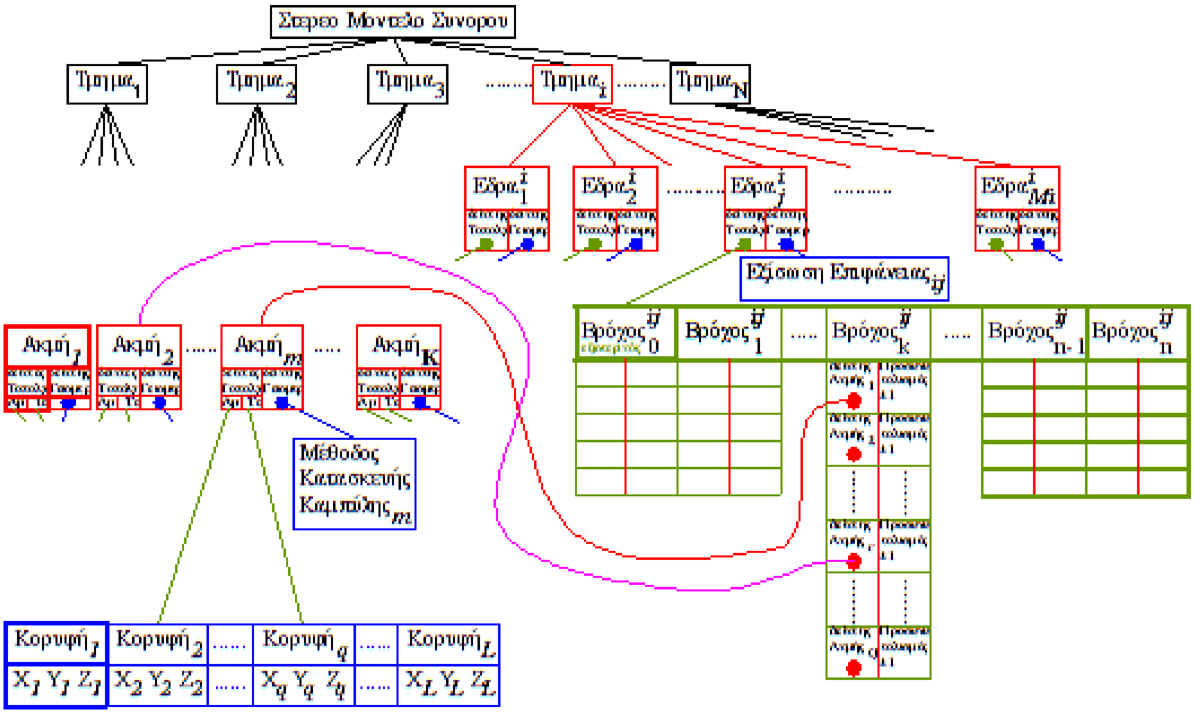
5. **Ακριβές Μοντέλο Συνόρου:** Περιλαμβάνει όλα τα παραπάνω **και** τις εξισώσεις των καμπυλών των ακμών και των επιφανειών των εδρών.

5.6.4 Αναγκαία Συνθήκη για Ορθότητα («Τοπολογική Ορθότητα») Στερεού Σώματος

Νόμος του **Euler (1752): $F - E + V - L = 2(B - G)$**

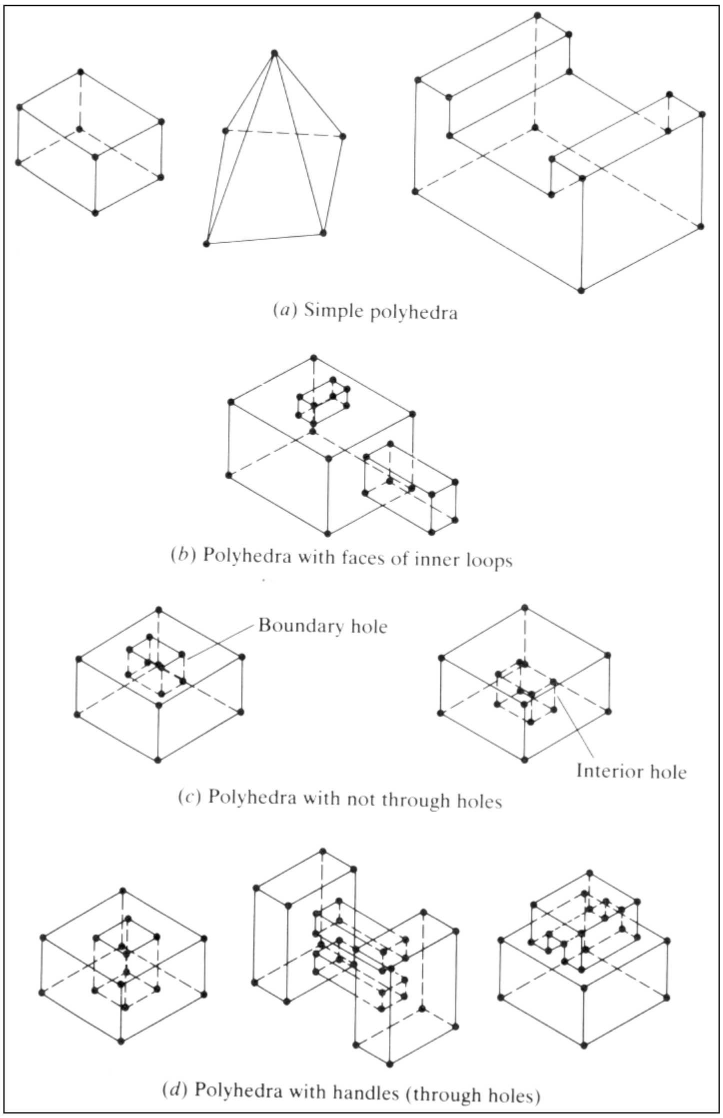
F: αριθμός εδρών,
E: αριθμός ακμών,
V: αριθμός κορυφών,
L: αριθμός βρόχων,
B: αριθμός στερεών τμημάτων,
G: αριθμός διαμπερών οπών στερεού [Γένος (Genus)].

5.6.5 Στερεό Μοντέλο Συνόρου: Γράφος Συνόρου



Σχήμα 5-17 Σχηματική αναπαράσταση στερεού μοντέλου με B-rep

5.6.6 Παραδείγματα Πολυεδρικών Στερεών Μοντέλων



(*a*) Simple polyhedra

(*b*) Polyhedra with faces of inner loops

(*c*) Polyhedra with not through holes

(*d*) Polyhedra with handles (through holes)

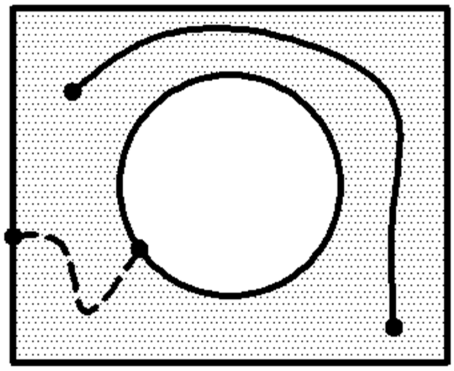
$$\boxed{F - E + V - L = 2(B - G)}$$

Object number	*F*	*E*	*V*	*L*	*B*	*G*
1	6	12	8	0	1	0
2	5	8	5	0	1	0
3	10	24	16	0	1	0
4	16	36	24	2	1	0
5	11	24	16	1	1	0
6	12	24	16	0	2	0
7	10	24	16	2	1	1
8	20	48	32	4	1	1
9	14	36	24	2	1	1

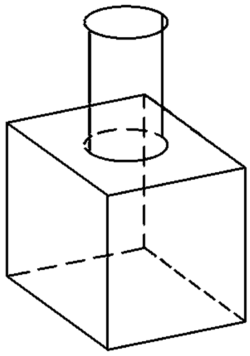
5.7 Λυμένα παραδείγματα

5.7.1 Υπάρχει 2Δ στερεό που να είναι συνεκτικό και το σύνορό του να είναι μη-συνεκτικό;

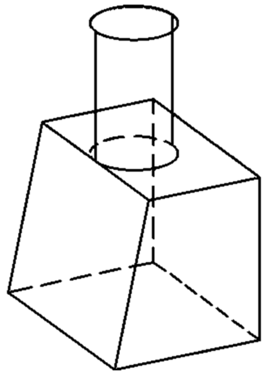
Απάντηση: Ναι, υπάρχει. Για παράδειγμα ένα ορθογώνιο με κυκλική οπή. Το στερεό είναι συνεκτικό γιατί οποιοδήποτε ζεύγος σημείων στο εσωτερικό του ενώνεται με καμπύλη που κείται εξ' ολοκλήρου στο στερεό. Όμως το σύνορό του δεν είναι συνεκτικό, αφού αν πάρω ένα σημείο στο ορθογώνιο σύνορο και ένα στο κυκλικό δεν υπάρχει καμπύλη που να τα ενώνει και να κείται εξ' ολοκλήρου στο σύνορο.



5.7.2 (α) Να κατασκευαστεί μοντέλο συνόρου για το στερεό μοντέλο του σχήματος

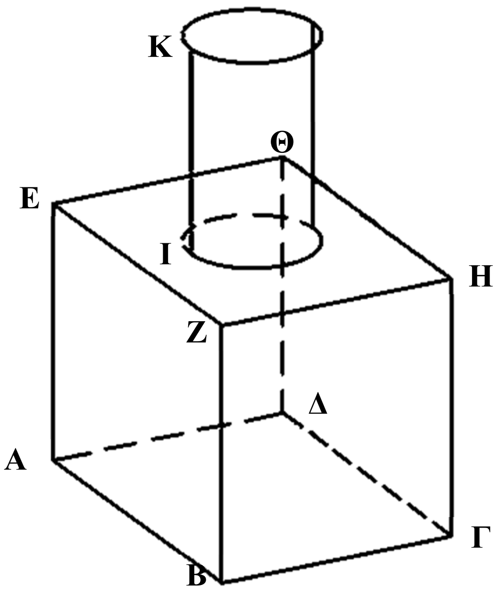


(β) Αν περιστραφεί η μία έδρα του κουτιού έτσι ώστε η ακμή να συμπέσει με την ακμή του κυλίνδρου το μοντέλο συνόρου εξακολουθεί να είναι σωστό;



Απάντηση

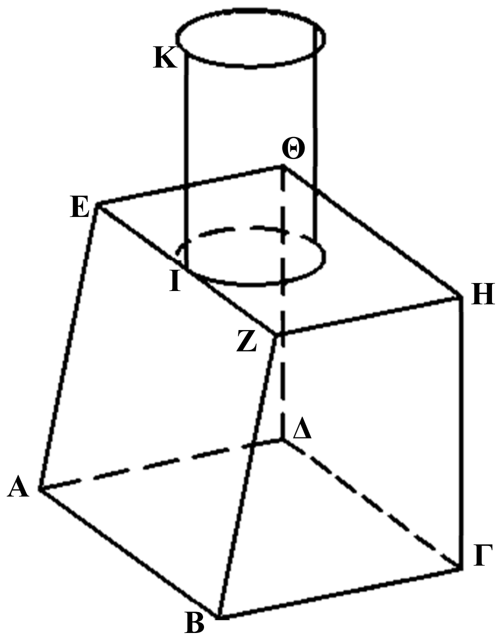
(α) Κατασκευάζω μοντέλο συνόρου που αποτελείται από τις κορυφές, ακμές και έδρες που φαίνονται παρακάτω:



Έχουμε:
V= 10 κορυφές
E= 12 (κουτί) + 3 (κύλινδρος) = 15 ακμές
F= 6 (κουτί) + 2 (κύλινδρος) = 8 έδρες
L= 1 βρόχο (για την κάτω βάση του κυλίνδρου)

Άρα από Euler έχουμε: 8-15+10-1=2(1-0) ή 2=2. Ισχύει!

(β) Αν μετά τη περιστροφή η ακμή ΕΖ «χτυπήσει» την κορυφή Ι τότε το παραπάνω μοντέλο συνόρου δεν είναι σωστό αφού τέμνει τον εαυτό του. Για να το διορθώσω κάνω τα εξής:

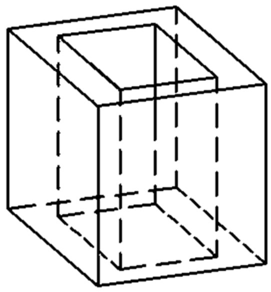


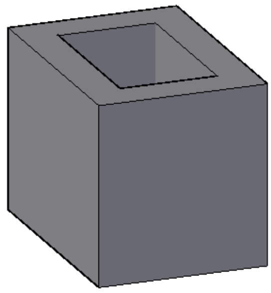
Η ακμή ΕΖ φεύγει και στη θέση της μπαίνουν δύο ακμές, η ΕΙ και η ΙΖ. Άρα σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο συνόρου έχουμε:

V΄= V = 10 κορυφές
E΄= E +1 = 16 ακμές
L΄= 0 (Η άνω έδρα του κουτιού δεν έχει πια εσωτερικό βρόχο!)
F΄ = F = 8

Άρα από Euler έχουμε: 8-16+10-0=2(1-0) ή 2=2. Ισχύει!

5.7.3 (α) Να κατασκευαστεί μοντέλο συνόρου για το στερεό μοντέλο του σχήματος.

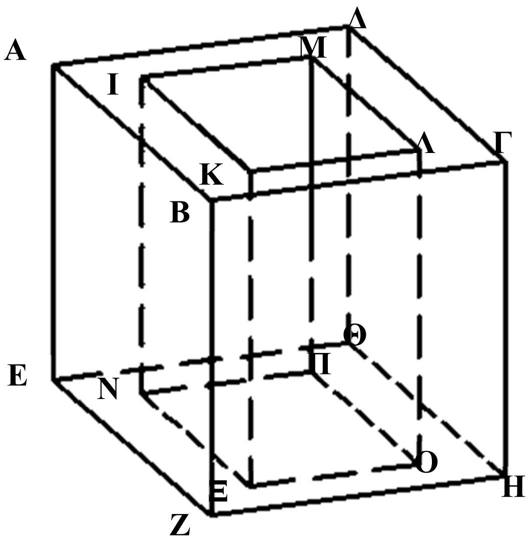




(β) Υπάρχει μοντέλο συνόρου για το παραπάνω στερεό χωρίς να περιλαμβάνει εσωτερικό βρόχο;

Απάντηση

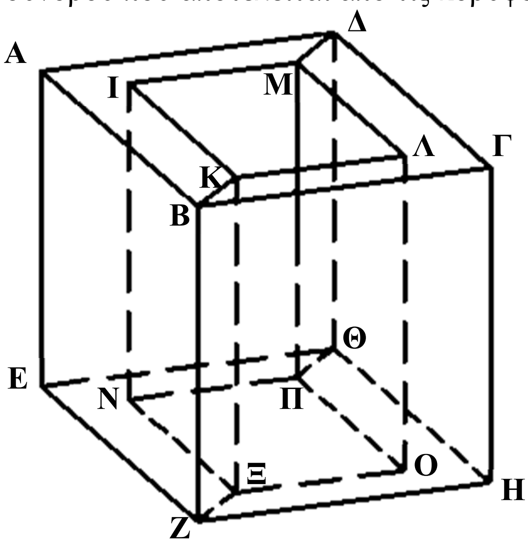
(α) Κατασκευάζω μοντέλο συνόρου που αποτελείται από τις κορυφές, ακμές και έδρες που φαίνονται παρακάτω:



Έχουμε:
V = 16 κορυφές
E = 24 ακμές
F = 10 έδρες
L = 2 βρόχους
G = 1 γένος

Άρα από Euler έχουμε: 10-24+16-2=2(1-1) ή 0=0. Ισχύει!

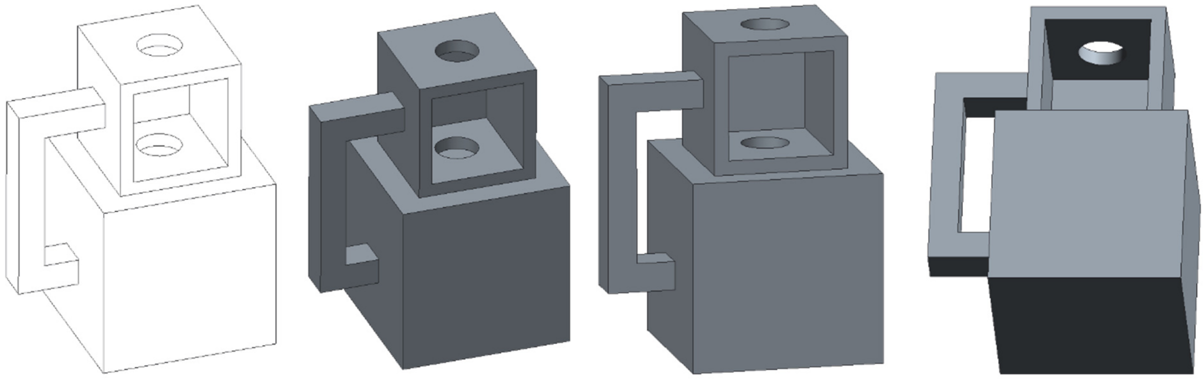
(β) Ενώνω τις κορυφές Β, Κ και Μ, Δ και Ζ, Ξ και Π, Θ με ακμές και κατασκευάζω μοντέλο συνόρου που αποτελείται από τις κορυφές, ακμές και έδρες που φαίνονται παρακάτω:



Σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο συνόρου έχουμε:
V΄ = V = 16 κορυφές
E΄ = E + 4 = 28 ακμές
F΄ = F +2 = 12 έδρες
L΄ = 0 βρόχους!!
G΄ = G = 1 γένος

Άρα από Euler έχουμε: 12-28+16-0=2(1-1) ή 0=0. Ισχύει!

5.7.4 Κατασκευάστε ορθό μοντέλο συνόρου για το στερεό του παρακάτω σχήματος



Απάντηση

Το παραπάνω μοντέλο αποτελείται από 4 βασικά στοιχεία: το μεγάλο κύβο (ΜΚ) της κάτω βάσης, το μικρό κύβο (μκ) με το άνοιγμα ο οποίος εδράζεται πάνω στο μεγάλο κύβο, το χερούλι (χερ) και τις δύο κυλινδρικές οπές (οπ). Το μοντέλο συνόρου δίνεται ως εξής:

F = 6 (ΜΚ) + 4 (χερ) + 10 (μκ) + 2 (οπ) = 22
E = 12 (ΜΚ) + 20 (χερ) + 24 (μκ) + 6 (οπ) = 62
V = 8 (ΜΚ) + 16 (χερ) + 16 (μκ) + 4 (οπ) = 44
L= 2 (χερ) + 1 (βάση έδρασης μκ) + 1 (άνοιγμα μκ) + 4 (οπ) = 8.
B = 1
G = 1 (χερ) + 1 (οπ) + 1 (χερ + οπ) = 3

Συνεπώς 22 – 62 + 44 – 8 = 2(1-3) ή -4 = -4. Ισχύει!

Στη συγκεκριμένη άσκηση θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή σε δύο σημεία: στον υπολογισμό των εσωτερικών βρόγχων και στον υπολογισμό του γένους. Ειδικά ως προς το δεύτερο θα πρέπει να γίνει κατανοητό πως ενώ φαινομενικά υπάρχουν μόνο δύο διαμπερές οπές (χερούλι και άνω οπή) υπάρχει παρόλαυτά και μια τρίτη διαμπερής οπή η οποία περνάει από την άνω οπή και από το χερούλι.

5.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Κατασκευάστε για το μοντέλο της άσκησης 5.7.4 ορθό συνολοθεωρητικό (CSG) μοντέλο.

Άσκηση 2: Μπορεί ένα μοντέλο συνόρου να παραβιάζει το νόμο του Euler, να παραβιάζει τουλάχιστον έναν από τους κανόνες της στερεάς μοντελοποίησης και παρ’όλα αυτά να εξακολουθεί να περιγράφει ακριβώς ένα στερεό; Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.