Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός 0.0.1. *Έστω ένα μη κενό σύνολο V. Εσωτερική πράξη ονομάζεται κάθε απεικόνιση της μορφής*

$$* : V \times V \to V$$

Ορισμός 0.0.2. *Έστω δύο με κενό σύνολα V, F. Εξωτερική πράξη ονομάζεται κάθε απεικόνιση της μορφής*

$$\cdot : F \times V \to V$$

Παράδειγμα 0.0.3.

1. *Όταν στην εξωτερική πράξη έχουμε $F = \mathbb{R}$ η πράξη ονομάζεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός.*
2. *Τα στοιχεία του συνόλου F ονομάζονται συντελεστές, ενώ τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται διανύσματα.*
3. *Για το συμβολισμό της εσωτερικής πράξης θα χρησιμοποιήσουμε για ευκολία το σύμβολο της πρόσθεσης, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι εννοούμε την πράξη της πρόσθεσης αναγκαστικά, βλέπε παράδειγμα ...Ενώ για τον συμβολισμό της εξωτερικής πράξης για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού, βλέπε Άσκηση 0.0.7.*

Ορισμός 0.0.4. *Έστω ένα μη κενό σύνολο V στο οποίο έχει ορισθεί μια εσωτερική πράξη $+$ και μια εξωτερική πράξη $\cdot$ επί του συνόλου $F = \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

1. $u + v = v + u$ *(αντιμεταθετική ιδιότητα),*
2. $(u + v) + z = u + (v + z)$ *(προσεταιριστική ιδιότητα),*
3. $\exists 0_F \in V : \forall u \ V, \ u + 0_F = 0_F + u = u$ *(ουδέτερου στοιχείου),*
4. $\forall u \in V, \exists u' \in V : u + u' = 0_F$ *(αντίθετου στοιχείου),*
5. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u, \forall \lambda, \mu \in F = \mathbb{R}, u \in V,$
6. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \forall \lambda \ F = \mathbb{R}, u \in V,$
7. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u, \forall \lambda, \mu \in F = \mathbb{R}, u \in V,$
8. $1 \cdot u = u, \forall u \in V$ *όπου το* 1 *είναι το μοναδιαίο στοιχείο του συνόλου* $F = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 0.0.5.

1. *Το μοναδιαίο στοιχείο είναι η μονάδα αφού ως σύνολο F έχουμε επιλέξει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.*
2. *Ως συντομία συνήθως γράφεται ο διανυσματικός χώρος ως $(V, +, \cdot)$.*
3. *Οι ιδιότητες από το 1-4 αφορού την εσωτερική πράξη, ενώ οι ιδιότητες από το 5-8 αφορού την εξωτερική πράξη.*

4. *Οι πιο σημαντικοί (για εμάς!) διανυσματικοί χώροι είναι οι* $\mathbb{R}$, *για παράδειγμα* $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, .., \mathbb{R}^5, .., \mathbb{R}^n$, *όπου κάθε χώρος αποτελείται απο μια συλλογή πραγματικών διανυσμάτων με συντεταγμένες όσες αναφέρει η δύναμη στην οποία είναι υψωμένος ο* $\mathbb{R}$, *π.χ. ο* $\mathbb{R}^5$ *έχει διανύσματα της μορφής* (x, y, z, w, k).

5. *Άλλα παραδείγματα διανυσματικών χώρων είναι ο χώρος των πινάκων διαστάσεων* m*-γραμμών και* n*-στηλών που συμβολίζεται ως* $\Pi_{m\times n}$, *ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων που συμβολίζεται ως* $C[a, b]$ *που είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα* $[a, b]$ *και ο χώρος* $\mathbb{O}$ *που αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα. Ο χώρος αυτός είναι ο μικρότερος διανυσματικός χώρος και περιέχει μόνο ένα στοιχείο. Αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα το κυριότερο στοιχείο για οποιοδήποτε χώρο αφού κάθε σύνολο για να ονομάζεται διανυσματικός χώρος πρέπει να περιέχει το ουδέτερο στοιχείο σύμφωνα με την ιδιότητα 3 του Ορισμού 0.0.4. Ο χώρος αυτός είναι μηδενικής διάστασης.*

Πρόταση 0.0.6. *Έστω* V *διανυσματικός χώρος και* F *σύνολο συντελεστών τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\forall\ \lambda\ \in F, \lambda \cdot 0_V = 0_V$,

2. $\forall\ u\ \in V, 0 \cdot u = 0_V$,

3. $\forall\ u\ \in V, \lambda\ \in F, \lambda \cdot u = 0_V \Rightarrow \lambda = 0$ *ή* $u = 0_V$,

4. $\forall\ \lambda\ \in F, u\ \in V, (-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u)$,

5. $\forall\ \lambda, \mu\ \in F, u\ \in V, \lambda \cdot u = \mu \cdot v$, *(νόμος διαγραφής)*

6. $\forall\ \lambda\ \in F, u, v\ \ \in V, \lambda \cdot u = \lambda \cdot v$, *(νόμος διαγραφής)*

Απόδειξη. Αφού το σύνολο είναι διανυσματικός χώρος τότε ισχύουν οι 8 ιδιότητες επομένως:

1. από την ιδιότητα 6 έχουμε ότι $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ που όμως εαν πάρουμε το $v = 0_V$ τότε έχουμε $\lambda \cdot (u + 0_V) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot 0_V$ επομένως $\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + \lambda \cdot 0_V$ αφού ισχύει ότι $u + 0_V = u$ και άρα $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

2. από την ιδιότητα 5 έχουμε ότι $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ που όμως εαν πάρουμε $\mu = 0_F$ τότε έχουμε ότι $(\lambda + 0_F) \cdot u = \lambda \cdot u + 0_F \cdot u$ όμως $\lambda + 0_F = \lambda$ άρα $\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_F \cdot u$ που τελικά δίνει ότι $0_F \cdot u = 0_V$.

3. Ομόιως αποδεικνύονται οι υπόλοιπες.

□

Άσκηση 0.0.7. *Έστω το μη κενό σύνολο* V *με εσωτερική πράξη* $+$ *και εξωτερική πράξη* $\cdot$ *με* $F = \mathbb{R}$ *για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις*

$\forall\ u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)\ \in\ V, u+v = (x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$,

και

$$\forall\ \lambda\ \in\ F, u\ \in V, \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, y_1).$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο V *δεν είναι διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι ο χώρος V είναι διανυσματικός χώρος πρέπει να ισχύουν οι 8 ιδιότητες. Παρατηρούμε ότι οι ιδίοτητες που σχετίζονται με την εσωτερική πράξη ισχύουν, (αναμενόμενο αφού η εσωτερική πράξη είναι η πρόσθεση διανυσμάτων όπως την γνωρίζουμε) επομένως προχωράμε στις ιδίοτητες της εξωτερικής πράξης. Άρα για $\lambda, \mu \in F$ και $u, v \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 + x_2), y_1 + y_2)) \\
&= (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2, y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

το δεξί σκέλος της ιδιότητας αυτής όμως μας δίνει

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot u + \lambda \cdot v &= \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2) \\
&= (\lambda \cdot x_1, y_1) + (\lambda \cdot x_2, y_2) \\
&= (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2, y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

επομένως ισχύει. Στη συνέχεια

$$(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda + \mu) \cdot (x_1, y_1) = ((\lambda + \mu) \cdot x_1, y_1)) = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_1, y_1)$$

το δεξί σκέλος της ιδιότητας αυτής όμως μας δίνει

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot u + \mu \cdot u &= \lambda \cdot (x_1, y_1) + \mu \cdot (x_1, y_1) \\
&= (\lambda \cdot x_1, y_1) + (\mu \cdot x_1, y_1) \\
&= (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_1, 2 \cdot y_1)
\end{aligned}$$

Για να ισχύει η ιδιότητα πρέπει

$$y_1 = 2y_1$$

Που σημαίνει ότι $y_1 = 0_V$. Επομένως για $y_1 \neq 0_V$ η ιδιότητα δεν ισχύει και άρα το σύνολο δεν είναι διανυσματικός χώρος επί του F. □

Διανυσματικοί Υπόχωροι

Ορισμός 0.0.8. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $F = \mathbb{R}$. Ένα μη κενό σύνολο E υποσύνολο του V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V αν είναι εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις με το V και είναι διανυσματικός χώρος με $F = \mathbb{R}$.*

Ορισμός 0.0.9. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και E ένα μη κενό υποσύνολό του. Το σύνολο E ονομάζεται γραμμικός ή διανυσματικός υπόχωρος του V όταν το E είναι διανυσματικός χώρος και ισχύουν οι πράξεις*

$$\begin{aligned}
e_1 + e_2 &\in E \\
\lambda e &\in E
\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $e_1, e_2, e \in E$. Δηλαδή έχουμε κλειστότητα στο σύνολο E ως προς τις πράξεις της διανυσματικής πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Και η παραπάνω πρόταση και αυτή που ακολουθεί χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου είναι διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 0.0.10. *Έστω $F = \mathbb{R}$ το σύνολο των συντελεστών και V ένας διανυσματικός χώρος. Ένα μη κενό σύνολο $E \subset V$ είναι διασυσματικός υπόχωρος του V αν και μόνο αν για κάθε $e_1, \ e_2 \ \in E$ και $\lambda, \mu \ \in F$ έχουμε*

$$\lambda e_1 + \mu e_2 \ \in E$$

Παρατήρηση 0.0.11.

1. *Έστω V διανυσματικός χώρος και E υποσύνολό του. Τότε αυτό που μας λέει η παραπάνω πρόταση είναι ότι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί δύο στοιχείων του E συνεχίζουν να είναι στοιχεία του E, δηλαδή είναι κλειστό ως προς την εσωτερική και την εξωτερική πράξη. Οι πράξεις αυτές στο E ικανοποιούν και τις 8 ιδιότητες του διανυσματικού χώρου V αυτόματα αρκεί να αποδείξει κανείς μόνο την πρόταση 0.0.10(ή την πρόταση 0.0.9).*

2. *Κάθε υποσύνολο για να είναι διανυσματικός υπόχωρος πρέπει να περιέχει το ουδέτερο στοιχείο. (Φυσικά! αφού είναι η ιδιότητα 3 του Ορισμού 0.0.4) Για αυτό το λόγο στις αποδείξεις της πρότασης 0.0.10 πάντα ξεκινάμε με το αν το ουδέτερο στοιχείο ανήκει στο υποσύνολο. Για παράδειγμα για ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ πρέπει να αποδείξουμε ότι το (0,0,0) είναι στοιχείο του και άρα το υποσύνολο είναι μη κενό.*

Παράδειγμα 0.0.12. *Έστω ένα συνόλο $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$. Να αποδείξετε ότι είναι διανυσματικός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει η πρόταση 0.0.10. Επειδή το σύνολο μας είναι ο $\mathbb{R}^3$ πρέπει το (0,0,0) να ανήκει στο A, το οποίο ισχύει καθώς $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0$ άρα $A \neq \emptyset$. Έστω ότι $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \ \in A$ και επίσης $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\lambda v_1 + \mu v_2 \ &\in A \Leftrightarrow \\
\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) \ &\in A \Leftrightarrow \\
(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \ &\in A \Leftrightarrow \\
2(\lambda x_1 + \mu x_2) + 3(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) = 0 \ &\in A \Leftrightarrow \\
\lambda(2x_1 + 3y_1 - z_1) + \mu(2x_2 + 3y_2 - z_2) = 0 &
\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει γιατί τα διανύσματα v_1, v_2 ανήκουν στο A. □

Παράδειγμα 0.0.13.

1. *Έστω $\mathbb{R}^2$ διανυσματικός χώρος. Τότε το σύνολο*

$$V = \{\lambda x, x = (x_1, x_2), \lambda \ \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ και παριστάνει την ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και περιέχει το διάνυσμα x. Ενώ το σύνολο

$$V = \{\lambda x + \mu y, x, y \ \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \ \in \mathbb{R}\}$$

όπου $x, y \neq 0$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και παριστάνει επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και περιέχει τα διανύσματα x, y.

2. *Έστω η εξίσωση $x+3y-z=0$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και παριστάνει ένα επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων. Ενώ το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $x+3y-z=3$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (το $(0,0,0)$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση).*

Άσκηση 0.0.14. *Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+5z=0\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.*

Παρατήρηση 0.0.15.

1. *Αν $V\subset W$ τότε ο V ονομάζεται γνήσιος υπόχωρος.*

2. *Το υποσύνολο $\{0\}$ του V ονομάζεται μηδενικός υπόχωρος και είναι ο μικρότερος δυνατός υπόχωρος του V. (βλέπε το 5 από το Παράδειγμα 0.0.5)*

3. *Το V είναι ο μεγαλύτερος δυνατός υπόχωρος του εαυτού του.*

4. *Έστω V_1, V_2 διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε το σύνολο*

$$V_1+V_2=\{v_1+v_2 : v_1\ \in V_1,\ v_2\ \in V_2\}$$

   ονομάζεται άθροισμα των υποχώρων και μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Η πρόταση αυτή ισχύει και για περισσότερους από δύο υποχώρους του V.

5. *Έστω V_1, V_2 διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε*

$$V_1\subseteq V_1+V_2,\ \text{και}\ V_2\subseteq V_1+V_2$$

   επομένως θα ισχύει $V_1\cup V_2\subseteq V_1+V_2$. Πρέπει να τονισθεί εδώ ότι το σύνολο $V_1\cup V_2$ μπορεί να μην είναι διανυσματικός χώρος.

6. *Εάν τα σύνολα V_1, V_2 ικανοποιούν τη σχέση $V_1\cap V_2=\{0\}$ τότε το άθροισμά τους ονομάζεται ευθύ και συμβολίζεται ως $V_1\oplus V_2$.*

Άσκηση 0.0.16. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και E_1, E_2 δύο υποσύνολά του. Να αποδείξετε ότι το σύνολο E_1+E_2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.*

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\lambda_i\in\mathbb{R}$ και $v_1, v_2, ..., v_k\in V$ όπου $i=1,2,...,k$. Κάθε στοιχείο v του V που μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_i, δηλαδή

$$v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_k v_k.$$

Ερώτηση: Πώς θα επιλέξουμε τα v_i;

Ορισμός 0.0.17. *Έστω E ένα μη κενό υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V. Το σύνολο όλων των στοιχείων του V που είναι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του E ονομάζεται γραμμική θήκη του E και συμβολίζεται με $[E]$. Τα διανύσματα που παράγουν το χώρο $[E]$ ονομάζονται γεννήτορες.*

Ερώτηση: Πόσα από τα στοιχεία που παράγουν ένα χώρο χρειαζόμαστε για να τον κατασκευάσουμε;

Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω ο διανυσματικός χώρος V και x ένα τυχαίο διάνυσμα του. Τότε το x μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων που τον παράγουν σύμφωνα με τα παραπάνω, δηλαδή για παράδειγμα εαν έχουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, ..., x_n) &= (x_1, 0, .., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + \cdots + (0, 0, ..., x_n) \\ &= x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n(0, 0, ..., 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n. \end{aligned}$$

Από αυτό προκύπτει ότι τα $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι γεννήτορες του χώρου $\mathbb{R}^N$, δηλαδή έχουμε $[e_1, e_2, ..., e_n] = \mathbb{R}^N$. Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι και το σύνολο $\{e_1 + e_2, e_2, e_3, ..., e_n\}$ είναι ένα σύνολο γενητόρων του $\mathbb{R}^N$. Άρα υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός διανυσμάτων που παράγουν ένα χώρο; και αν ναι πως μπορούμε να τον υπολογίσουμε;

Ορισμός 0.0.18. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος.*
Τα διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \tag{1}$$

συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Δηλαδή τα διανύσματα $v_1, ..., v_n$ ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητα εαν ο μοναδικός συνδυασμός που παράγει το μηδενικό διάνυσμα είναι ο $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots 0 \cdot v_n$.

Παρατήρηση 0.0.19. *Αν ένας από τους συντελεστές λ_i δεν είναι μηδέν αλλά ισχύει η σχέση (1) τότε τα διανύσματα ονομάζονται γραμμικά εξαρτημένα. (Δηλαδή μπορούμε να λύσουμε την σχέση (1) ως προς το μη μηδενικό λ_i και έτσι να γράψουμε το αντίστοιχο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Επομένως δεν μας είναι χρήσιμο το u_i γιατι μπορούμε να το κατασκευάσουμε από τα υπόλοιπα. Για παράδειγμα το $(3, 2, 1) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0)$ όπου $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.)*

Παράδειγμα 0.0.20. *Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 0, 1)$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό θα αποδείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή*

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, -1, 1) + \lambda_3(1, 0, 1) = 0 &\Leftrightarrow \\ (\lambda_1, 2\lambda_1, 0) + (0, -\lambda_2, \lambda_2) + (\lambda_3, 0, \lambda_3) = 0 &\Leftrightarrow \\ (\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = 0 &\Leftrightarrow \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0&, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0& \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0&. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Άσκηση 0.0.21. *Να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (-1, 2, 3)$.*

Παρατήρηση 0.0.22. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος.*
α) Τα $x, y \in V$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εαν $x = \lambda y$.
β) Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του V είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ενώ το $x = 0$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Παράδειγμα 0.0.23. *Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (3, 0, 2)$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό θα αποδείξουμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(1,-1,1) + \lambda_3(3,0,2) = 0 &\Leftrightarrow \\
(\lambda_1, 2\lambda_1, 0) + (\lambda_2, -\lambda_2, \lambda_2) + (3\lambda_3, 0, 2\lambda_3) = 0 &\Leftrightarrow \\
(\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + 2\lambda_3) = 0 &\Leftrightarrow \\
\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0&, \\
2\lambda_1 - \lambda_2 = 0& \\
\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0&.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε $\lambda_1 = -\lambda_3, \lambda_2 = -2\lambda_3$.

Βάση Διανυσματικού Χώρου

Ορισμός 0.0.24. *Έστω V διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, ..., v_n$ διανύσματά του. Τα διανύσματα αποτελούν βάση του χώρου αν και μόνο αν:*
α) $[v_1, v_2, ..., v_n] = V$,
β) τα $v_1, v_2, ..., v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο ονομάζεται βάση όταν έχει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό διανυσμάτων που τον παράγουν (συνθήκη (i)) και με τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων (συνθήκη (ii)).

Επομένως μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα σύνολο γεννητόρων είναι βάση αν και μόνο αν ισχύει η (i) ή ισοδύναμα αν και μόνο αν ισχύει η (ii).

Παράδειγμα 0.0.25. *Έχουμε το χώρο $\mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα που τον παράγουν είναι τα $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, δηλαδή τα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε άξονα. Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (απόδειξη!). Επομένως σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Τη βάση αυτή την ονομάζουμε συνήθη ή κανονική βάση του χώρου. Γενικά με την ονομασία «συνήθης βάση» ενός χώρου θα αναφερόμαστε στα μοναδιαία διανύσματα του κάθε άξονά του.*

Ορισμός 0.0.26. *Ο αριθμός των στοιχείων μιας βάσης ενός διανυσματικού χώρου V είναι σταθερός και ονομάζεται διάσταση. Συμβολίζεται ως $\dim V$.*

Στον χώρο $\mathbb{R}^N$ η συνήθης βάση είναι $\{[e_1, e_2, ..., e_n]\}$.

Παράδειγμα 0.0.27. *Έστω V διανυσματικός χώρος.*

1. *Τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου V αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, δηλαδή*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n \tag{2}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

2. *Οι συντελεστές $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $i = 1, ..., n$ που ορίζονται από τη (2) ονομάζονται συνιστώσες ή συντεταγμένες του διανύσματος v ως προς τη βάση των $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$. Επομένως οι συντεταγμένες ενός διανύσματος αναφέρονται πάντα ως προς μια διατεταγμένη βάση.*

3. *Κάθε διανυσματικός χώρος που περιέχει ένα σύνολο S που τον παράγει, έχει και μια βάση. Κάθε άλλη βάση του V θα έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με την βάση αυτή.*

4. *Αν $\dim V = n$ και τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ ικανοποιούν τη σχέση α) του Ορισμού 0.0.24 τότε τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ είναι μια βάση του V.*

5. *Αν $\dim V = n$ και τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ ικανοποιούν τη σχέση β) του Ορισμού 0.0.24 τότε τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ είναι μια βάση του V.*

6. *Αν τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ παράγουν τον V τότε κάποια από αυτά αποτελούν βάση του V. Η εύρεση των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων γίνεται με τη βοήθεια: α) του ορισμού και β) με τη μεθόδο της κλιμακοποίησης.*

7. *Αν τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V και $\dim V = n$ με $k < n$ τότε υπάρχουν διανύσματα $v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3}, ..., v_n$ τέτοια ώστε τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ να αποτελούν βάση του χώρου V. (βλέπε Παράδειγμα 0.0.28)*

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε για τον χώρο $\mathbb{R}^3$ ότι ένα τυχαίο σημείο x μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του, επομένως ως προς τη συνήθη βάση

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Παράδειγμα 0.0.28. *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 2)$ να βρεθεί μια βάση του χώρου.*

Απόδειξη. Για τη λύση αρχικά βλέπουμε ότι είμαστε στον χώρο $\mathbb{R}^3$ και επομένως χρειάζομαστε 3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να τον δημιουργήσουμε. Δεν μας δίδινται άλλοι περιορισμοί και επομένως μπορούμε να διαλέξουμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^3$. Μια εύκολη επιλογή είναι να πάρουμε ένα διάνυσμα απο τη συνήθη βάση του χώρου, δηλαδή

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1).$$

Για παράδειγμα το $e_1 = (0, 0, 1)$. Άρα

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(1, 0, 2) + \lambda_3(0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow \\ (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2 + \lambda_3) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Από όπου παίρνουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και το σύνολο $\{[v_1, v_2, e_3]\}$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$. □

Άσκηση 0.0.29. *Να μελετηθεί εάν τα σύνολα* $\{v_1, v_2, e_1\}, \{v_1, v_2, e_2\}$ *αποτελούν βάσεις του χώρου* $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 0.0.30. *Έστω το σύνολο* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0, 3y + z = 0\}$ *να βρεθεί μια βάση.*

Απόδειξη. Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα εδώ δεν μας δίνονται διανύσματα αλλά ένα σύνολο με περιορισμούς. Επομένως η λύση διαφοροποιείται. Δηλαδη: Παίρνουμε ένα τυχαίο διάνυσμα του συνόλου, έστω v. Γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός, δηλαδή χρησιμοποιώντας τις δύο εξισώσεις του A

$$v = (x, y, z) = (-y/2, y, -3y) = y(-1/2, 1, -3).$$

Το διάνυσμα που βρήκαμε $(-1/2, 1, -3)$ παράγει ένα οποιοδήποτε τυχαίο στοιχείο του A. Άρα αποτελεί μια βάση του A. (βλέπε Ορισμό 0.0.24). □

Παρατήρηση 0.0.31. *Από το προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο αρχικός μας χώρος ήταν 3 διαστάσεων (* $\mathbb{R}^3$ *) ενώ τελικά αποδείχθηκε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος* A *που δημιουργείται από τους δύο περιορισμούς ήταν διάστασης 1. Μπορούμε να βγάλουμε ένα γενικό συμπερασμα όσο αφορά την αναμενόμενη διάσταση ενός υπόχωρου σχολιάζοντας μόνο τους περιορισμούς που εμφανίζει; Ναι! Δηλαδή, κάθε περιορισμός «κόβει» και από μια διάσταση από το αρχικό χώρο. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε για το παράδειγμα: 3(διαστάσεις του* $\mathbb{R}^3$*) - 2(περιορισμούς του* A*)=1 (τελική διάσταση του* A*).*

Άσκηση 0.0.32. *Να βρεθεί μια άλλη βάση του προηγούμενου συνόλου* A*. (λύστε τις εξισώσεις του* A *με διαφορετικό τρόπο έτσι ώστε να εκφράσετε το τυχαίο διάνυσμα με διαφορετικό γραμμικό συνδυασμό)*

Παρατήρηση 0.0.33. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος* V *και* M*,* N *δύο διανυσματικοί υπόχωροί του, τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N). \tag{3}$$

Άσκηση 0.0.34. *Έστω* $M = [(0, 1, 2), (2, 0, 1)]$, $N = [(-2, 1, 0), (2, 1, 1)]$ *να βρεθεί η διάσταση του συνόλου* $M \cap N$.

Απόδειξη. Βλέπουμε ότι $M, N \subset \mathbb{R}^3$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3) και θα βρούμε αρχικά τη διάσταση του συνόλου $M + N$ βρίσκοντας μια βάση του χώρου. Βλέπουμε ότι τα διανύσματα που μας έχουν δοθεί για τον M και N είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή αποτελούν τη βάση για καθένα απο τους χώρους. Άρα για τη διάσταση του $M + N$ θα κάνουμε μια τυχαία επιλογή τριών από τα τέσσερα διανύσματά τους μιας και που ο χώρος μας θα έχει το πολύ διάσταση 3 αφού είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Επομένως έστω $[(0, 1, 2), (2, 0, 1), (-2, 1, 0)]$ στη συνέχεια θα εξετάσουμε εαν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(-2, 1, 0) = 0 \Leftrightarrow \\
(2\lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \\
2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\
\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\
2\lambda_1 + \lambda_2 = 0.
\end{aligned}$$

που μας δίνει ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Επομένως έχουμε $\dim(M+N) = 3$ και άρα από τη σχέση (3) παίρνουμε ότι $\dim(M \cap N) = 1$

Β τρόπος

Μπορούμε να βρούμε τις δεσμεύσεις που ικανοποιεί κάθε χώρος ξεχωριστά και στη συνέχεια να απαιτήσουμε η τομή τους να τις ικανοποιεί όλες μαζί. Επομένως έχουμε αρχικά για τον χώρο M:
οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου αυτού μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του άρα

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(2, 0, 1)\\ &= (0, \lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, 0, \lambda_2)\\ &= (2\lambda_2, \lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2)\end{aligned}$$

επομένως $x = 2\lambda_2, y = \lambda_1, z = 2\lambda_1 + \lambda_2$. Απαλοίφοντας τα λάμδα έχουμε τη $x + 4y - 2z = 0$ που ικανοποιούν όλα τα στοιχεία του M. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τα σημεία του N παίρνουμε τη σχέση $x + 2y - 4z = 0$. Συνεπώς έχουμε

$$M \cap N = \{(x, y, z) \ \in \mathbb{R}^3 : x + 4y - 2z = 0, x + 2y - 4z = 0\}$$

Τέλος κάθε διάνυσμα του $M \cap N$ θα ικανοποιεί και τις δύο σχέσεις του χώρου, δηλαδή λύνοντας το σύστημα προκύπτει $x = 6z, y = -z$ και άρα

$$(x, y, z) =)(6z, -z, z) = z(6, -1, 1)$$

από όπου παίρνουμε ότι $\dim(M \cap N) = 1$ και βάση του χώρου το σύνολο $\{[(6, -1, 1)]\}$. Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε εδώ είναι ότι ο Β τρόπος μας βρίσκει εκτός από την διάσταση και τη βάση του χώρου. □

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε το Θεώρημα Επέκτασης Βάσης (βλέπε το 7 του Παραδείγματος 0.0.27).

Ορισμός 0.0.35. *(Θεώρημα επέκτασης βάσης) Σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης κάθε σύνολο πεπερασμένης διάστασης μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει βάση του χώρου.*

Επίσης έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Παρατήρηση 0.0.36. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V με $\dim V = n$ τότε κάθε πλήθος $n+k$, με $k \geq 1$ διανυσμάτων του V θα είναι γραμμικώς εξαρτημένο.*

Άσκηση 0.0.37. *Να βρεθεί μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$ που να περιέχει τα διανύσματα $[a = (-1, 1, 0, 0), b = (0, 0, 2, 2)]$.*

Απόδειξη. Αρχικά γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα ανήκουν στο χώρο $\mathbb{R}^4$. Σύμφωνα με το θεώρημα επέκτασης βάσης αρκεί να βρούμε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε μαζί με τα διανύσματα a, b να δημιουργούν μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$.

Δανειζόμαστε ένα από τα διανύσματα της συνήθης βάσης, έστω το $e_3 = (0,0,1,0)$. Θα εξετάσουμε αν τα a, b, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned} \lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,2) + \lambda_3(0,0,1,0) = 0 \Leftrightarrow \\ (-\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \\ -\lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Επειδή ο χώρος είναι διάστασης 4 δανειζόμαστε άλλο ένα διάνυσμα από τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^4$ για να εξετάσουμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω το $(0,1,0,0)$

$$\begin{aligned} \lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,2) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4(0,1,0,0) = 0 \Leftrightarrow \\ (-\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_4, 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \\ -\lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Συνεπώς μια βάση του χώρου είναι η $[(-1,1,0,0),(0,0,2,2),(0,0,1,0),(0,1,0,0)]$. $\square$

Παρατήρηση 0.0.38. *Γιατί στην προηγούμενη άσκηση εξετάσαμε αρχικά εάν τα $\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,2) + \lambda_3(0,0,1,0) = 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και μετά τα $\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(0,0,2,2)+\lambda_3(0,0,1,0)+\lambda_4(0,1,0,0) = 0$ και όχι όλα μαζί, δηλαδή $\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,2) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4(0,1,0,0) = 0$ από την αρχή;*
Αυτό το κάναμε γιατί εάν αρχικά παίρναμε το τελικό γραμμικό συνδυασμό και μας έβγαινε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα δεν θα ξέραμε ποιο από τα 4 μας δημιουργεί το πρόβλημα. Άρα θα αναγκαζόμασταν να το διασπάσουμε και να τα ελέγξουμε ξεχωριστά. (Ένας πιο γρήγορος τρόπος είναι η κλιμακοποίηση που θα δούμε αργότερα)

Άσκηση 0.0.39. *Να λυθεί η προηγούμενη άσκηση επιλέγοντας για βοηθητικά διανύσματα πρώτα το $(1,0,0,0)$ και μετά το $(0,1,0,0)$. Τι παρατηρείτε;*

Άσκηση 0.0.40. *Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $(2,-3,4),(1,0,3),(-1,2,-2)$ αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$.*

Μεθοδολογία εύρεσης βάσης υπόχωρου

Αν ο διανυσματικός υπόχωρος δίνεται από σχέσεις που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων του τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα

1. Λύνουμε τις σχέσεις ως προς τυχαίες συντεταγμένες (ελεύθεροι άγνωστοι).

2. Κάνουμε αντικατάσταση σε ένα τυχαίο διάνυσμα του υπόχωρου αυτού.

3. Επειδή κάθε διάνυσμα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των σταθερών διανυσμάτων με συντελεστές τους ελεύθερους άγνωστους η βάση θα αποτελείται από τα σταθερά διανύσματα.

Άσκηση 0.0.41. *Έστω* $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0)\}$. *Να βρεθεί μια βάση του.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 0.0.31 αφού το Y είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και έχει ένα περιορισμό περιμένουμε να πέφτει στις δύο διαστάσεις. Επομένως λύνουμε την σχέση ως προς μια τυχαία συντεταγμένη $x = -y - z$. Γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο του Y ικανοποιεί τη σχέση επομένως για τυχαίο σημείο έχουμε

$$v = (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Προφανώς το τυχαίο σημείο v μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο συναρτήσει των διανυσμάτων $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$. Τα διανύσματα $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν υπάρχει λ τέτοιο ώστε $(-1, 1, 0) = \lambda(-1, 0, 1)$) και άρα αποτελούν βάση του Y. □

Άσκηση 0.0.42. *Έστω* $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$. *Να βρεθούν οι βάσεις και οι διαστάσεις των* $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$.

Λύση: Από την προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι βάση του V_1 είναι η

$$[(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$$

οπότε $\dim V_1 = 2$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την βάση V_2 έχουμε $(x, y, z) = (-y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ και άρα $\dim V_2 = 2$. (αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα!)

Α τρόπος

Για τον υπολογισμό της βάσης του $V_1 \cap V_2$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x &= -y - z, \\ x &= y \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} x &= y, \\ z &= -2y \end{aligned}$$

Επομένως ένα τυχαίο διάνυσμα του $V_1 \cap V_2$ γράφεται ως

$$(x, y, z) = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2)$$

Άρα $\dim V_1 \cap V_2 = 1$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3) έχουμε

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3.$$

Β τρόπος

Για τον υπολογισμό της βάσης του $V_1 + V_2$ αρκεί να βρούμε το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τους. Προφανώς η θήκη του χώρου θα είναι

$$[(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,2)]$$

Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (απόδειξη!!). Επειδή ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι πεπερασμένης διάστασης και $\dim(V_1 + V_2) = 3$ από τη σχέση (3) έχουμε

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 1.$$