Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f:A \to B$ ονομάζεται $\mathbf{1-1}$ όταν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία, έστω x_1, x_2 που ανήκουν στο Α έχουν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά σημεία του Β,

$$x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ή διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι εάν δυο εικόνες είναι ίσες τότε αυτό συνεπάγεται ότι θα αντιστοιχούν σε ίδια σημεία στο πεδίο ορισμού, δηλαδή

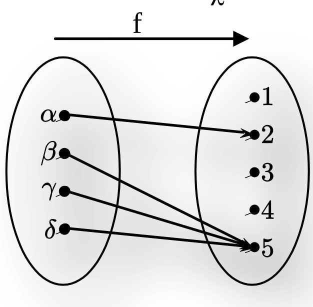
$$x_1, x_2 \in A \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f:A \to B$ ονομάζεται **επί** όταν κάθε στοιχείο του Β αντιστοιχεί σε κάποιου στοιχείου του Α.

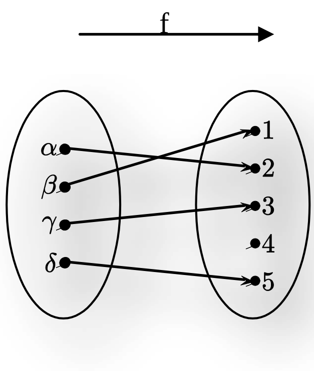
Ορισμός: Μια απεικόνιση $f:A \to B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** όταν είναι $1-1$ και επί.

Παραδείγματα

1. Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι τα στοιχεία β,γ,δ αντιστοιχούν στην ίδια εικόνα, δηλαδή στο 5στοιχείο του Β, επομένως δεν είναι 1-1. Δεν είναι όμως ούτε επί καθώς υπάρχουν στοιχεία του συνόλου Β που δεν αντιστοιχούν πουθενά στο Α, όπως το 1,3,4.

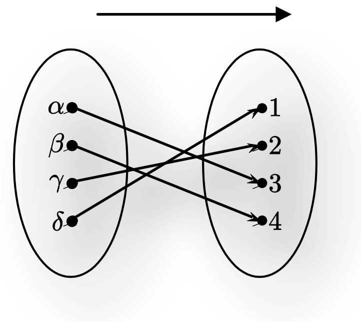


2. Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου Α αντιστοιχούν σε διαφορετικές εικόνες του συνόλου Β και επομένως είναι 1-1. Δεν είναι επί καθώς υπάρχουν στοιχεία στο σύνολο Β που δεν αντιστοιχούν σε κανένα στοιχεία του Α.



3. Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι όλα τα διαφορετικά στοιχεία του Α αντιστοιχούν σε διαφορετικά στοιχεία του Β και αντίστροφα. Επομένως είναι 1-1 και επί, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη.

f



Παρατήρηση

Θυμίζουμε ότι εάν σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε αυτή θα είναι 1-1 εάν κάθε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα 0x τέμνει την συνάρτηση το πολύ σε ένα σημείο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: Μία συνάρτηση f ονομάζεται **αύξουσα** (αντ. **φθίνουσα**) όταν για κάθε x_1, x_2 που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ισχύει ότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (αντ. } f(x_1) \geq f(x_2)\text{)}.$$

ενώ ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** (αντ. **γνήσια φθίνουσα**) όταν ισχύει η αυστηρή ανισότητα, δηλαδή

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (αντ. } f(x_1) > f(x_2)\text{)}.$$

Οριμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **μονότονη** (αντ. **γνήσια μονότονη**) όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντ. γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα).

Παρατήρηση

1. Ένας εύκολος τρόπος μελέτης της μονοτονίας μιας συνάρτησης και παράκαμψης των παραπάνω ορισμών είναι ο υπολογισμός του κλάσματος,

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

όπου x_1, x_2 είναι δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού της f. Το κλάσμα αυτό ονομάζεται **λόγος μεταβολής**. Μιας και $x_1 < x_2$ το πρόσημο του λόγου μας δίνεται από τον αριθμητή. Εάν για παράδειγμα $f(x_2) \geq f(x_1)$, δηλαδή $\lambda \geq 0$ η συνάρτηση είναι αύξουσα.

2. Μία συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη αν και μόνο αν ο λόγος μεταβολής της έχει σταθερό πρόσημο.
3. Μπορεί μια συνάρτηση να σπάσει σε επιμέρους μονότονες συναρτήσεις ενώ η ίδια να μην είναι μονότονη. Ένα απλό παράδειγμα είναι το ημίτονο. Ακόμα και αν καταφέρουμε να σπάσουμε μια συνάρτηση σε επιμέρους μονότονες συναρτήσεις που να έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας αυτό δεν μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση μας θα είναι μονότονη.
4. Κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση αντιστρέφεται και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.
5. Σύνθεση δύο γνήσια μονότονων συναρτήσεων είναι γνήσια αύξουσα (αντ. γνήσια φθίνουσα) αν έχουν το ίδιο (αντ. διαφορετικό) είδος μονοτονίας.

Ορισμός: Μία συνάρτηση f ονομάζεται **ανω φραγμένη** όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $f(x) \leq M$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της. Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** της f. Για παράδειγμα το ημίτονο είναι άνω φραγμένο από το 1.

Ορισμός: Μια συνάρτηση ονομάζεται **κάτω φραγμένη** όταν υπάρχει ένας πραγαμτικός αριθμός m τέτοιος ώστε $f(x)\geq m$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της. Ο αριθμός m ονομάζεται **κάτω φράγμα** της f. Για παράδειγμα το ημίτονο είναι κάτω φραγμένο από το -1.

Ορισμός: Μια συνάρτηση ονομάζεται **φραγμένη**, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη. Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ημίτονο είναι μια φραγμένη συνάρτηση.

Έχουμε συνηθίσει όταν μιλάμε για τα ακρότατα μιας συνάρτησης το μυαλό μας να πηγαίνει στην παράγωγο της μιας και είναι ένας πολύ εύκολος τρόπος εύρεσης τους. Εδώ όμως θα προσπαθήσουμε να κοιτάξουμε τα ακρότατα χωρίς την βοήθεια της.

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f και σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε λέμε ότι το σημείο αυτό είναι **σημείο ολικού μεγίστου** (αντ. **ολικού ελαχίστου**) όταν $f(x)\leq f(x_0)$ (αντ. $f(x)\geq f(x_0)$) για όλα τα x του πεδίου ορισμού της.

Παρατήρηση

Μια συνάρτηση μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά σε διάφορα διαστήματα του πεδίου ορισμού της. Σε αυτή την περίπτωση τα ακρότατα που προκύπτουν ονομάζονται **σημεία τοπικού μεγίστου** (αντ. **τοπικού ελαχίστου**) όταν ισχύει $f(x)\leq f(x_0)$ (αντ. $f(x)\geq f(x_0)$) για κάθε x που ανήκει στην περιοχή μελέτης.

Ορισμός: Μία συνάρτηση f ονομάζεται **κυρτή** (αντ. **κοίλη**) σε ένα διάστημα όταν για κάθε $x_1,x_2\in I$ και $t\in(0,1)$ ισχύει ότι

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2),$$

$$(\text{αντ. } f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\geq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)).$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση ονομάζεται **γνήσια κυρτή** (αντ. **γνήσια κοίλη**) σε ένα διάστημα όταν για κάθε $x_1,x_2\in I$ και $t\in(0,1)$ ισχύει ότι

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)<(1-t)f(x_1)+tf(x_2),$$

$$(\text{αντ. } f\left((1-t)x_1+tx_2\right)>(1-t)f(x_1)+tf(x_2)).$$

Μια κυρτή συνάρτηση έχει την χορδή που ενώνει δύο σημεία της πάνω από την γραφική παράσταση της, ενώ μια κοίλη συνάρτηση έχει την χορδή που ενώ δυο σημεία της κάτω από την γραφική της παράσταση.

Παρατήρηση

Επειδή οι παραπάνω ορισμοί είναι αρκετά τεχνικοί στην απόδειξη τους, συνηθίζουμε όταν θέλουμε να μελετήσουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης να υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο της.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **άρτια** (αντ. **περιττή**) όταν για κάθε x του πεδίου ορισμού της υπάρχει το στοιχείο $-x$ στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f(-x)=f(x)$ (αντ. $f(-x)=-f(x)$).

Παρατήρηση

Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας (αντ. περιττής) συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα , για παράδειγμα η $y = x^2$ (αντ. ως προς την αρχή των αξόνων, για παράδειγμα $y = x^3$).

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **περιοδική** όταν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της ισχύει ότι $x + \tau$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της και $f(x+\tau) = f(x)$.

Παρατήρηση

Κάθε αριθμός τ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση είναι και μια **περίοδος** της f. Η ελάχιστη θετική περίοδος (αν υπάρχει) ονομάζεται **πρωτεύουσα περίοδος** της συνάρτησης, για παράδειγμα όπως θα δούμε και παρακάτω το ημίτονο και συνημίτονο είναι περιοδικές συναρτήσεις με πρωτεύουσα περίοδο το 2π.

Ορισμός: Έστω δύο απεικονίσεις f, g τότε αν το πεδίο ορισμού της g έχει κοινά σημεία με το σύνολο τιμών της f μπορούμε να ορίσουμε μια καινούργια απεικόνιση που ονομάζεται **σύνθεση** της g με την f, και συμβολίζεται με $\mathbf{g \circ f}$, ως εξής:

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\},$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ομοίως, εάν θέλαμε να ορίσουμε την σύνθεση της f με την g τότε θα έπρεπε το σύνολο τιμών της g να έχει κοινά σημεία με το πεδίο ορισμού της f για να είχαμε την $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Ορισμός: Για κάθε πραγματικό αριθμό x ορίζονται το **θετικό του μέρος** $\mathbf{x^+}$, το **αρνητικό του μέρος** $\mathbf{x^-}$ και η **απόλυτη τιμή** $\mathbf{|x|}$ ως εξής:

$$x^+ = \max\{x, 0\},\ x^- = \max\{-x, 0\} \text{ και } |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Ιδιότητες

1. $x = x^+ - x^-$ και $|x| = x^+ + x^-$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (**τριγωνική ιδιότητα**).
4. $|x| \leq \theta$, αν και μόνο αν $-\theta \leq x \leq \theta$, όπου $\theta > 0$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

Ορισμός: Αν $f : A \to B$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση τότε υπάρχει η **αντίστροφη απεικόνιση** της που συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$, δηλαδή ισχύει ότι

$$f^{-1} : B \to A \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y .$$

Επειδή ο ορισμός της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης είναι αρκετά αυστηρώς με αποτέλεσμα αρκετές συναρτήσεις να μένουνε εκτός μπορεί κανείς να επικεντρωθεί αρχικά στις 1-1 και στην συνέχεια να δημιουργήσεις τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τις κάνει και επί. Για παράδειγμα να περιορίσει τον εαυτόν του μόνο στο σύνολο τιμών της εν λόγω συνάρτησης και όχι σε όλο το σύνολο B που περιέχει και εικόνες που δεν αντιστοιχούν σε κανένα σημείο του A.

Η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης μιας μεταβλητής f στο καρτεσιανό επίπεδο είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.

Παρατήρηση

Θυμίζουμε ότι το πεδίο ορισμού μια συνάρτησης f είναι το σύνολο τιμών της αντίστροφης της f^{-1} όπως φαίνεται παραπάνω από την ορισμό και επιπλέον το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}. Τέλος αν η f είναι μονότονη τότε η αντίστροφη της θα είναι και αυτή μονότονη και μάλιστα θα έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ξεκινάμε με την εκθετική συνάρτηση. Έστω $0 < \alpha \neq 1$.Η **εκθετική συνάρτηση** $f(x) = \alpha^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν $\alpha > 1$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ αν $0 < \alpha < 1$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη και άρα αμφιμονοσήμαντη μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη της η οποία δεν είναι άλλη από την **λογαριθμική συνάρτηση** και συμβολίζεται με $\mathbf{log_\alpha x}$.
Αφού λοιπόν η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της εκθετικής αυτό σημαίνει ότι το πεδίο ορισμού της εκθετικής θα είναι το σύνολο τιμών της λογαριθμικής και το σύνολο τιμών της εκθετικής θα είναι το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\log_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } \log_\alpha y = x \Leftrightarrow y = \alpha^x.$$

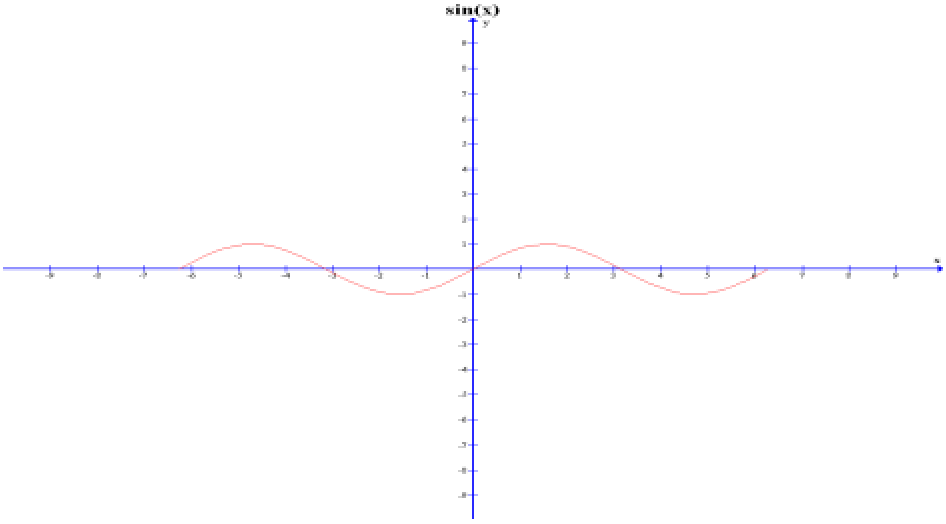
Τέλος, θα έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας. Έτσι, η συνάρτηση $\log_\alpha x$ είναι γνήσια αύξουσα αν $\alpha > 1$ και γνήσια φθίνουσα αν $0 < \alpha < 1$.

Ο αριθμός α ονομάζεται **βάση** της εκθετικής (αντ. λογαριθμικής) συνάρτησης. Συνήθως χρησιμοποιούμε ως βάση τους αριθμούς $\alpha = e$ ή $\alpha = 10$, οπότε έχουμε αντίστοιχα τους **νεπέριους** και **δεκαδικούς λογά-ριθμους** οι οποίοι συμβολίζονται με $\ln x$ και $\log x$.

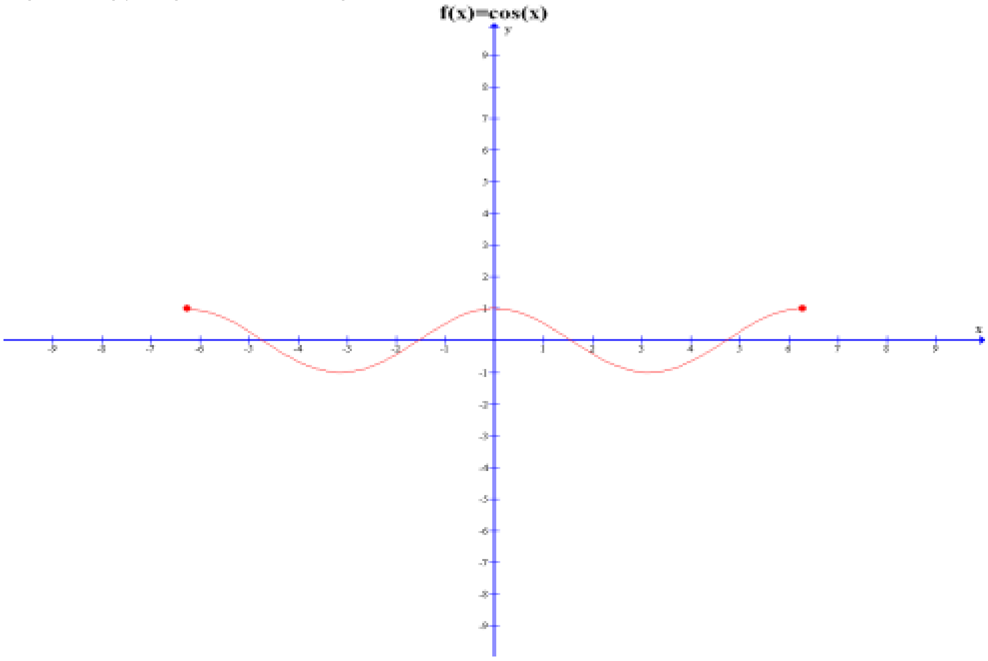
Για $\alpha = e$ οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις παρακάτω πολύ σημαντικές ανισότητες:
(i) $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(ii) $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

Προχωράμε στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

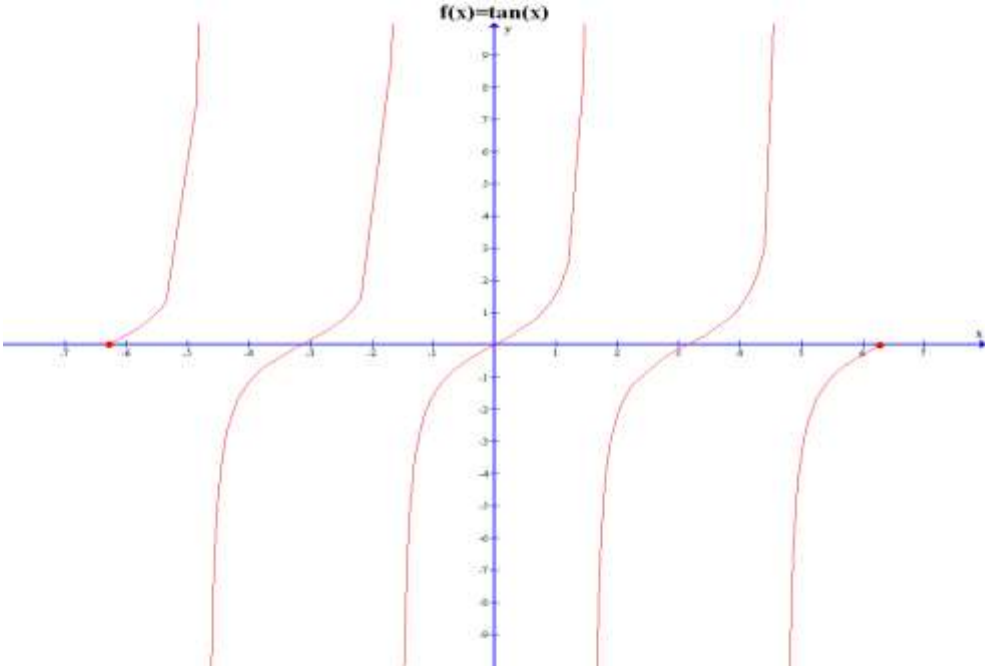
1. Η **συνάρτηση ημίτονο,** $\mathbf{f(x) = \sin x}$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,1]$. Είναι γνήσια αύξουσα (αντ. γνήσια φθίνουσα) σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ με κ άρτιο (αντ. περιττό). Είναι φραγμένη, περιττή και περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο το 2π.



2. Η **συνάρτηση συνημίτονο,** $\mathbf{f(x)=\cos x}$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,1]$. Είναι γνήσια αύξουσα (αντ. γνήσια φθίνουσα) σε κάθε διάστημα της μορφής $[\kappa\pi, \kappa\pi+\pi]$, με κ περιττό (αντ. άρτιο). Είναι φραγμένη, άρτια και περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο 2π.



3. Η **συνάρτηση εφαπτομένη,** $\mathbf{f(x)=tg\,x}$ ή $\mathbf{tan\,x}$, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in \right\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Είναι γνήσια αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$. Είναι περιττή και περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο π.

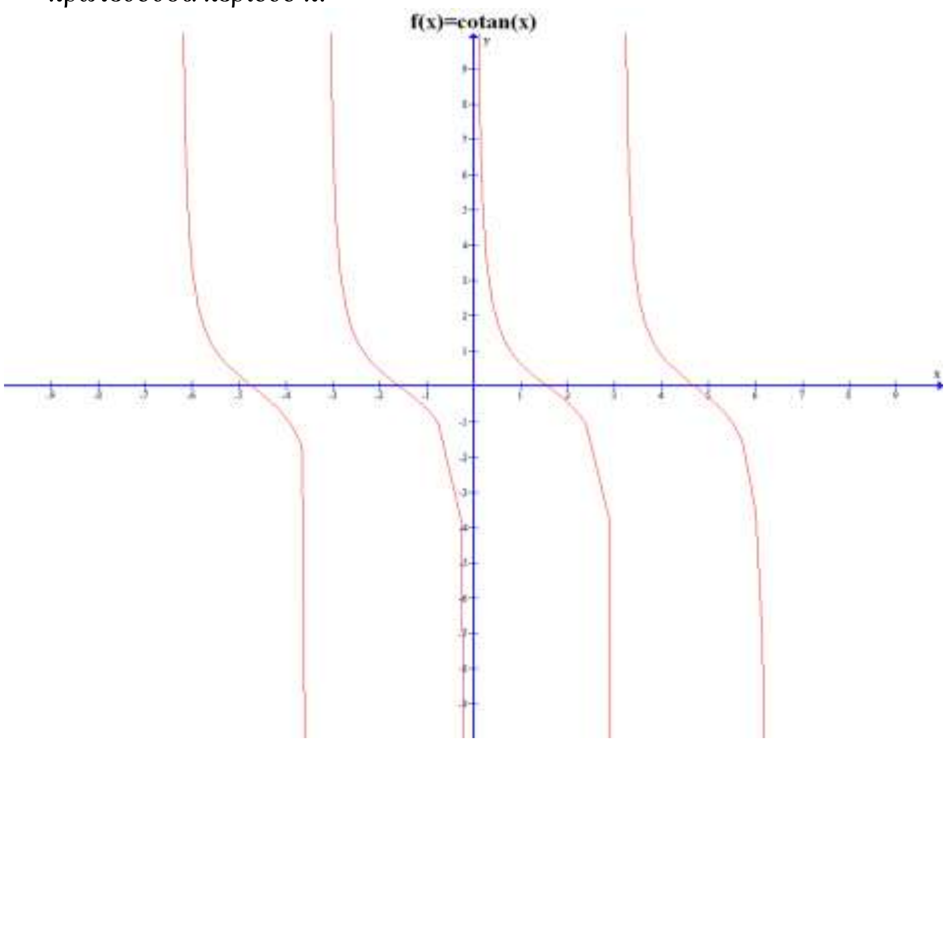


Για τις συναρτήσεις ημίτονο και εφαπτομένη ισχύουν οι παρακάτω πολύ βασικές ανισότητες:

(i) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

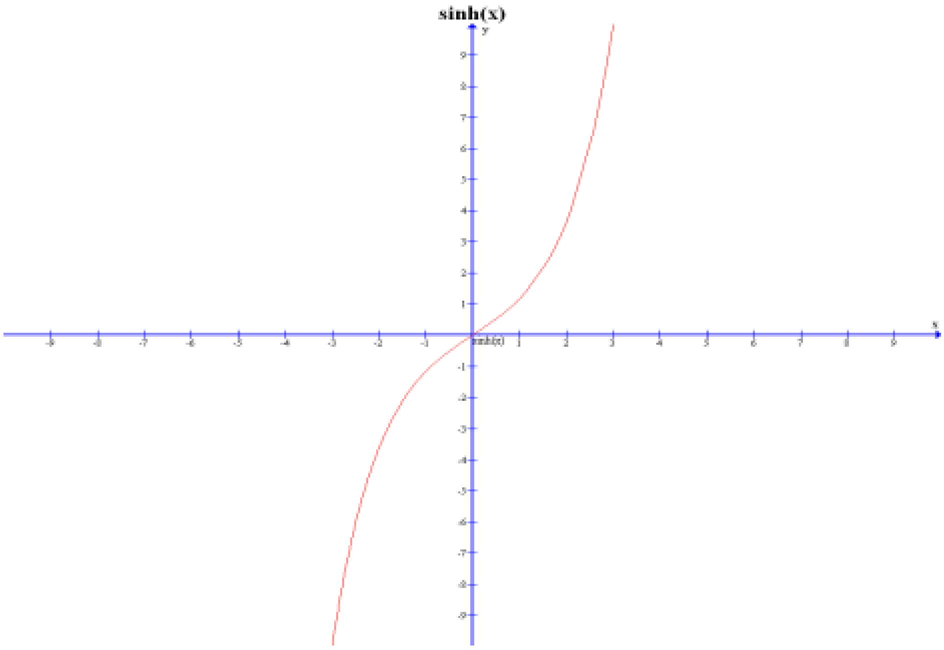
(ii) $|\sin x| \le x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Η **συνάρτηση συνεφαπτομένη,** $\mathbf{f(x) = ctg\,x}$ ή $\mathbf{cot\,x}$, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = \kappa\pi, \kappa \in \quad\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Είναι γνήσια φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $(\kappa\pi, \kappa\pi + \pi)$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Είναι περιττή και περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο π.

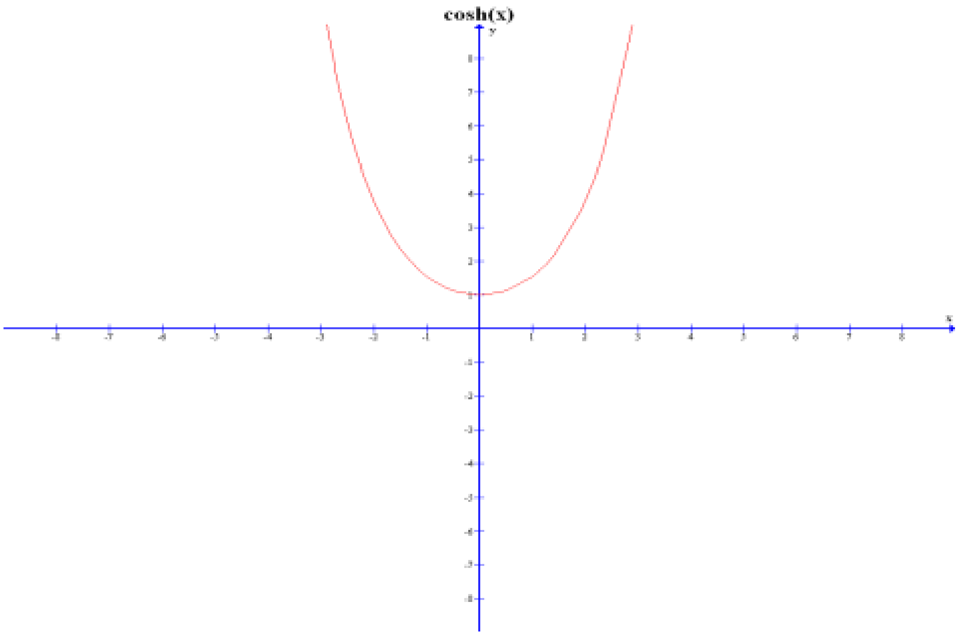


Τέλος έχουμε και τις υπερβολικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης:

1. Το υπερβολικό ημίτονο που μας δίνεται από τον τύπο $\mathbf{sinh\,x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$. Η συνάρτηση αυτή έχει τις εξής ιδιότητες: είναι γνησίως αύξουσα και περιττή με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $R(\sinh) = \mathbb{R}$.

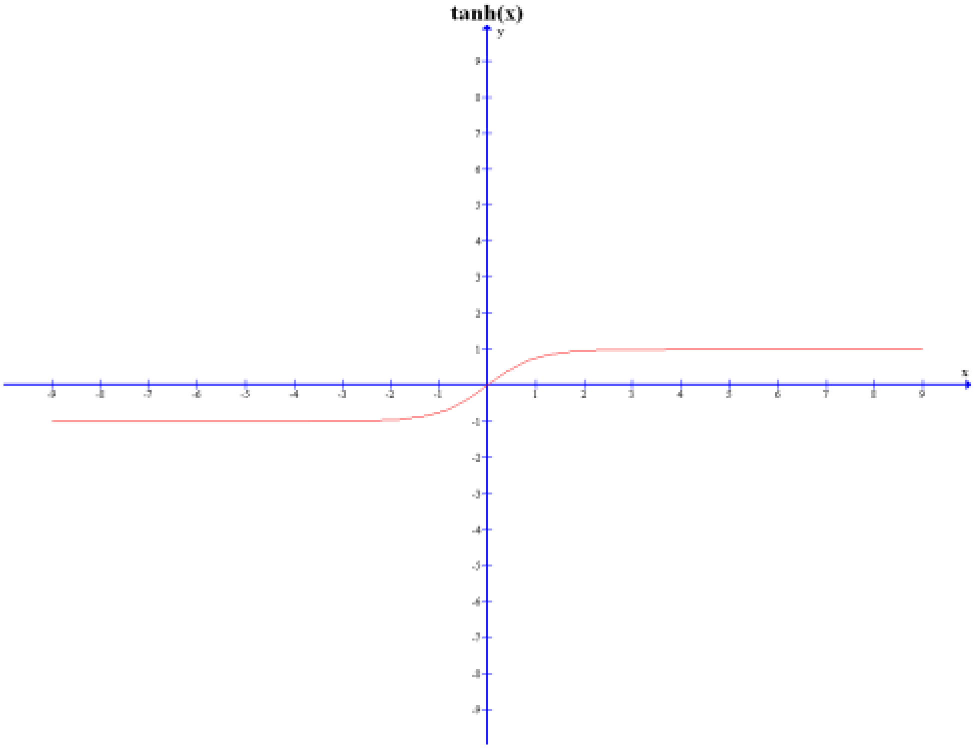


2. Το υπερβολικό συνημίτονο που μας δίνεται από τον τύπο $\mathbf{cosh\,x} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$. Η συνάρτηση αυτή έχει τις εξής ιδιότητες: είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ ενώ είναι και άρτια με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $R(\cosh) = [1, +\infty)$.



3. Η υπερβολική εφαπτομένη που μας δίνεται από τον τύπο $\mathbf{tgh\,x} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$. Η συνάρτηση αυτή έχει τις εξής ιδιότητες: είναι γνησίως αύξουσα και περιττή με

πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $R(\text{tgh})=(-1,1)$.



4. Η υπερβολική συνεφαπτομένη που μας δίνεται από τον τύπο $\mathbf{ctgh\,x} = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Η συνάρτηση αυτή έχει τις εξής ιδιότητες: είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^*$ και σύνολο τιμών $R(\text{ctgh})=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Υπερβολικές ταυτότητες

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$.

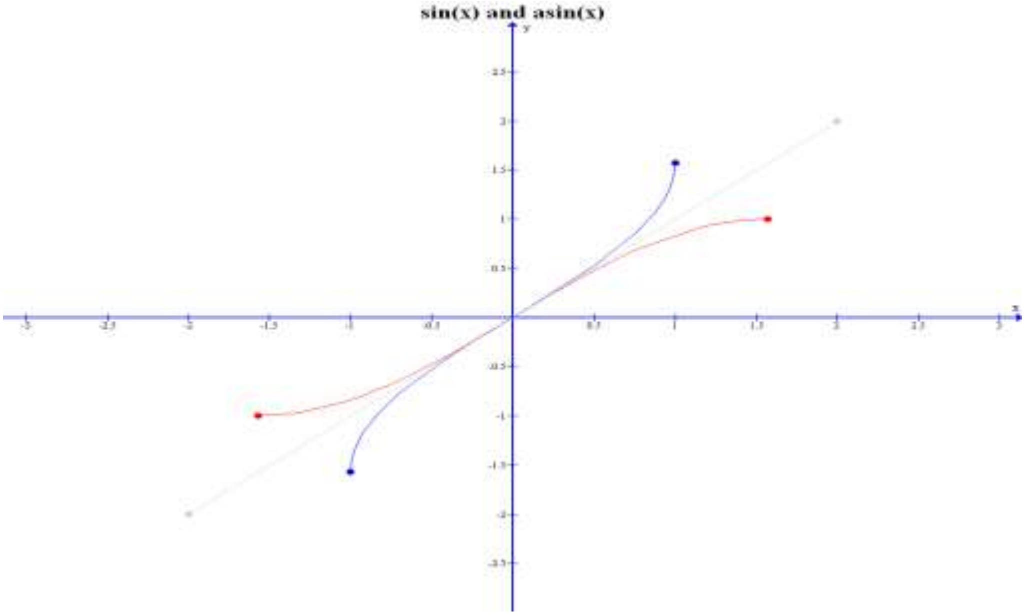
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έχοντας τα προηγούμενα στο νου μας μια ερώτηση που προκύπτει είναι τι άλλου είδους «μαγειρέματα» μπορούμε να κάνουμε έτσι ώστε να ορίσουμε αντίστροφες συναρτήσεις και άλλων μη αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων.

Από τις βασικές παραπάνω συναρτήσεις στο μυαλό μας έρχονται όλες οι κυκλικές συναρτήσεις. Αυτές όμως δεν είναι ούτε 1-1. Πως θα μπορέσουμε να ορίσουμε την αντίστροφη τους; Ένα από χρησιμότερα συμπεράσματα των μονότονων συναρτήσεων είναι ότι όλες είναι αμφιμονοσήμαντες. Επομένως αρκεί να περιοριστούμε σε διαστήματα στα οποία οι κυκλικές συναρτήσεις είναι μονότονες.

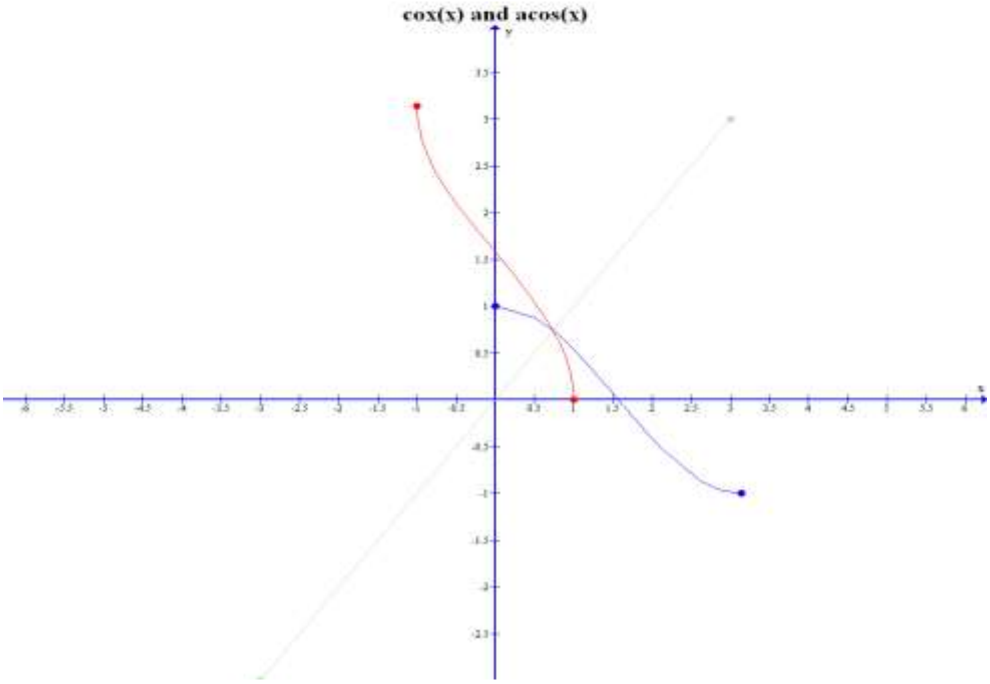
Έτσι λοιπόν, θα μελετήσουμε το ημίτονο στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και άρα αμφιμονοσήμαντη. Επομένως μπορεί να ορισθεί η αντίστροφη της συνάρτηση η οποία θα ονομάζεται τόξο ημιτόνου. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ με } \arcsin y = x \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ και } \sin x = y.$$



Ομοίως μπορούμε να μελετήσουμε και το συνημίτονο. Ξεκινάμε με τη ιδέα της μονοτονίας και περιοριζόμαστε στο διάστημα $[0,\pi]$ στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και άρα αντιστρέψιμη ως αμφιμονοσήμαντη. Η αντίστροφή της ονομάζεται **τόξο συνημιτόνου** και σημειώνεται με **arccos.** Συγκεκριμένα, έχουμε

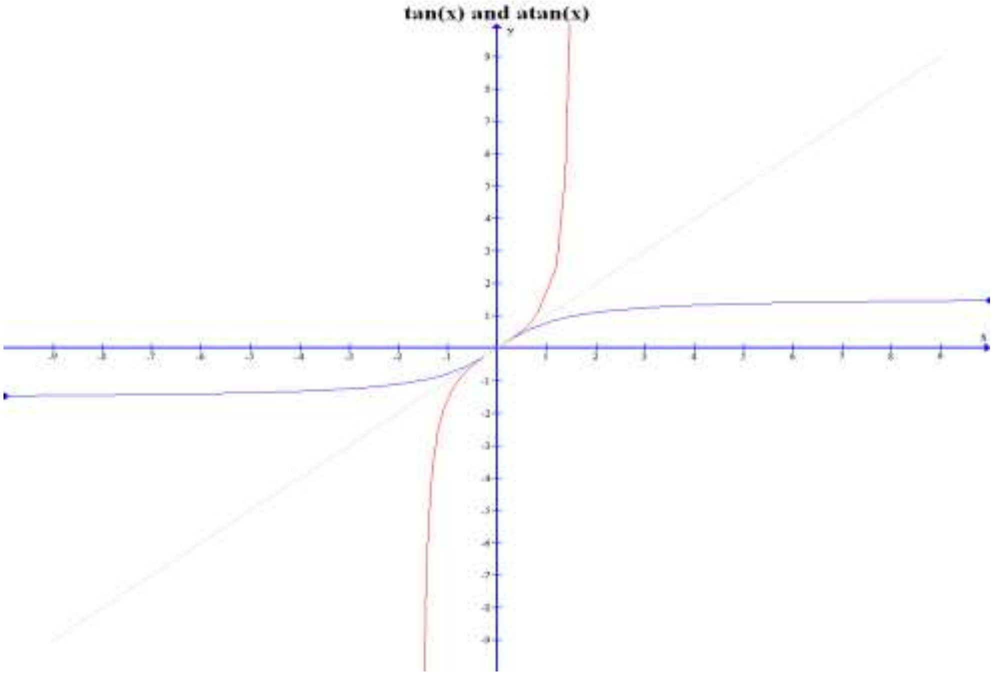
$$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi] \text{ με } \arccos y = x \Leftrightarrow x\in[0,\pi] \text{ και } \cos x = y.$$



Ερώτηση: Και οι δυο συναρτήσεις έχουν και άλλα διαστήματα μονοτονίας που θα μπορούσαμε να διαλέξουμε για να κάνουμε την αντιστροφή. Παίζει κανένα ρόλο ποιο διαλέγουμε;

Στη συνέχεια προχωράμε στο επόμενο δίδυμο. Η εφαπτομένη είναι γνησίως αύξουσα στο **ανοιχτό** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$-μην ξεχνάμε ότι απειρίζεται στα άκρα του διαστήματος αυτού- επομένως ορίζουμε την αντίστροφη ως **τόξο εφαπτομένης** και σημειώνεται με **arctg** ή **arctan**. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\mathrm{arc\,tg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ με } \mathrm{arc\,tg}\,y=x \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \mathrm{tg}\,x=y .$$



Τέλος, θεωρούμε τον περιορισμό της συνεφαπτομένης στο διάστημα $(0,\pi)$ και αντίστροφή της το **τόξο συνεφαπτομένης** που σημειώνεται με **arcctg** ή **arccot**. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\mathrm{arc\,tg}:\mathbb{R}\to(0,\pi) \text{ με } \mathrm{arc\,ctg}\,y=x \Leftrightarrow x\in(0,\pi) \text{ και } \mathrm{ctg}\,x=y .$$