# Άδειες Χρήσης



# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

## ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συστήματα που έχουν την παρακάτω μορφή

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots \alpha_{1n}x_n = \gamma_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots \alpha_{2n}x_n = \gamma_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 - \alpha_{m2}x_2 + \cdots \alpha_{mn}x_n = \gamma_m \end{array} \qquad (*)$$

όπου $\alpha_{ij}$ , $\gamma_i$ με i=1,…m και j=1,…,n είναι πραγματικοί αριθμοί και $x_i$ είναι οι άγνωστοι.

**Παρατήρηση** Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό. Ένα σύστημα γραμμικό δεν περιλαμβάνει γινόμενα ή ρίζες μεταβλητών. Οι μεταβλητές του είναι υψωμένες στην πρώτη δύναμη και δεν είναι ορίσματα τριγωνομετρικών, λογαριθμικών ή εκθετικών συναρτήσεων.

Στόχος μας είναι να δούμε τις διάφορες μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται στην επίλυση ενός τέτοιου συστήματος.

Αρχικά ας ανατρέξουμε στις γνώσεις λυκείου. Έστω ένα σύστημα 2 επί 2

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \gamma_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \gamma_2 \end{array}$$

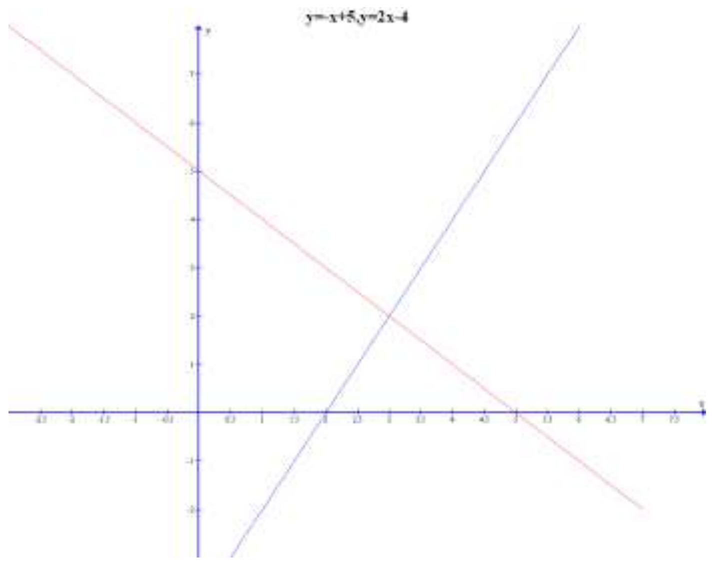
Γνωρίζουμε ότι κάθε μια από τις εξισώσεις αυτές αντιπροσωπεύει μια εξίσωση ευθείας. Οι λύσεις λοιπόν αυτού του συστήματος μπορούν να χωρισθούν στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α) Οι δύο αυτές ευθείες να τέμνονται σε ένα σημείο, (μοναδική λύση).

**Παράδειγμα**

$$\begin{array}{c} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{array}$$

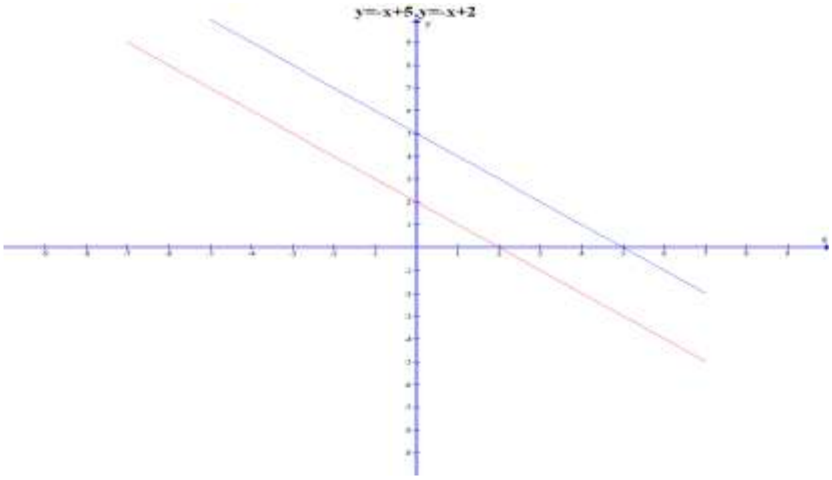
τέμνονται στο σημείο x=3, y=2.



Β) Οι δυο αυτές ευθείες να είναι παράλληλες, (καμία λύση).

**Παράδειγμα**

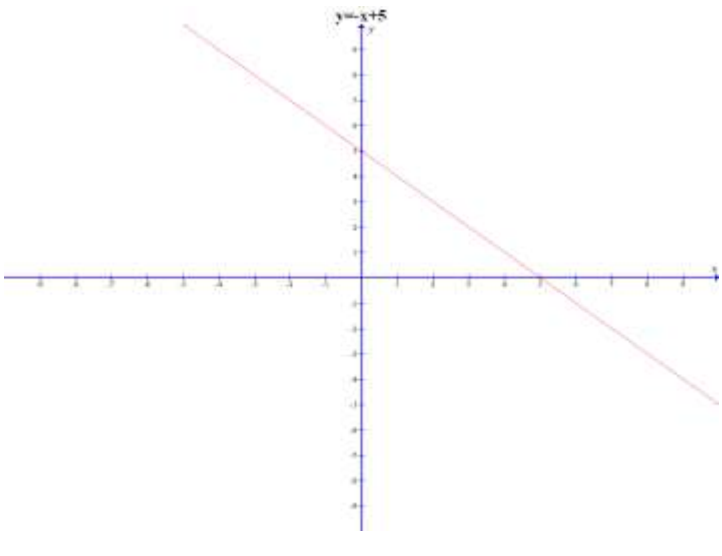
$$x + y = 5$$
$$x + y = 2$$




Γ) Οι δυο αυτές ευθείες να συμπίπτουν, σε αυτή την περίπτωση όλα τα σημεία πάνω στην ευθεία ικανοποιούν το σύστημα και άρα έχουμε άπειρες λύσεις.

**Παράδειγμα**

$$x + y = 5$$
$$2x + 2y = 10$$




Ας πάμε τώρα σε ένα 3x3 σύστημα. Για παράδειγμα

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Οι λύσεις λοιπόν αυτού του συστήματος μπορούν να χωρισθούν στις ακόλουθες περιπτώσεις πάλι: α) Τα τρία επίπεδα να τέμνονται σε ένα και μοναδικό σημείο, β) Τα τρία επίπεδα να συμπίπτουν όπου έχουμε απειρία λύσεων, γ) τα δύο επίπεδα να τέμνονται και το τρίτο να συμπίπτει με ένα από αυτά που θα μας δώσει ως λύση την ευθεία τομής των επιπέδων και δ) τουλάχιστον δύο από αυτά να είναι παράλληλα που θα μας δώσει καμία λύση.

**Παράδειγμα** Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+3y-z=3 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση την (x,y,z)=(1,1/2,1/2).

**Παράδειγμα** Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει μονοπαραμετρική λύση την (x,y,z)=(0,1,0)+k(5,-4,1), όπου $k \in \mathbb{R}$.

**Παράδειγμα** Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-3y+3z=2 \\ 2x+3y-3z=3 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό όπως θα δούμε και αργότερα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει καμία λύση.

Ορισμός: **Γενική λύση** ή **πλήρης λύση** είναι το σύνολο όλων των λύσεων ενός συστήματος.

Ορισμός: Όταν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση ονομάζεται **συμβιβαστό** διαφορετικά **αδύνατο**.

## ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS

**Άσκηση 1**: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-5y-z=1 \\ 4x+2y+3z=5 \end{cases}$$

**Λύση**: Αρχικά θα λύσουμε το σύστημα με σχολικές γνώσεις. Ξεκινάμε προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις για να απαλείψουμε το z. Κρατάμε την πρώτη σταθερή και γράφουμε το αποτέλεσμα της πράξης στην θέση της δεύτερης. Επομένως έχουμε (βήμα 1)

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-8y=1 \\ 4x+2y+3z=5 \end{cases}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με 3 και την αφαιρούμε από την τρίτη απαλείφοντας με αυτόν τον τρόπο πάλι την συντεταγμένη z, κρατώντας και πάλι την πρώτη σταθερή. Συνεπώς έχουμε (βήμα 2)

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-8y=1 \\ 2x-11y=-5 \end{cases}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη με το 2 και την τρίτη με το 3 και τις αφαιρούμε απαλείφοντας την συντεταγμένη του x και παίρνοντας για αποτέλεσμα y=1, δηλαδή (βήμα 3)

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-8y=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Κάνοντας αντικατάσταση βρίσκουμε ότι το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση την

$$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}.$$

**Παρατήρηση**: Από την παραπάνω διαδικασία βλέπουμε ότι δεν παίζει κανένα ρόλο στην σωστή επίλυση του συστήματος ποια γραμμή θα έχουμε πρώτη, δεύτερη και κ.λ.π. Επίσης, δεν παίζει κανένα ρόλο ποια συντεταγμένη διαλέγουμε να απαλείψουμε πρώτη.

**Ορισμός**: Δύο συστήματα ονομάζονται **ισοδύναμα** αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

**Μεθοδολογία**: Ονομάζουμε την πρώτη εξίσωση ενός συστήματος γραμμή 1 και την συμβολίζουμε ως $\Gamma_1$. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι την τελευταία εξίσωση. Για παράδειγμα το σύστημα στην παραπάνω άσκηση έχει ως $\Gamma_1$ την $2x-3y+z=0$, για $\Gamma_2$ την $x-5y-z=1$ και τέλος ως $\Gamma_3$ την $4x+2y+3z=5$.

**Πρόταση**: Αν εφαρμόσουμε τις παρακάτω πράξεις στις εξισώσεις ενός συστήματος προκύπτει σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό.

Α) Εναλλαγή δυο εξισώσεων, δηλαδή

$$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$$

Β) Αντικατάσταση μιας εξίσωσης με την αντίστοιχη πολλαπλασιασμένη με ένα μη μηδενικό πραγματικό αριθμό, δηλαδή

$$\Gamma_i \to c \cdot \Gamma_i,\ c \in \mathbb{R}^*.$$

Γ) Αντικατάσταση μιας εξίσωσης πολλαπλασιασμένη με ένα $c \in \mathbb{R}^*$ με το άθροισμα της με μια άλλη πολλαπλασιασμένη με ένα $b \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή

$$\Gamma_i \to b \cdot \Gamma_i + c \cdot \Gamma_j,\ \mathrm{b}, c \in \mathbb{R}^*.$$

Οι πράξεις αυτές ονομάζονται **στοιχειώδεις πράξεις** στις εξισώσεις ενός συστήματος.

Από την παραπάνω πρόταση βλέπουμε ότι για τη λύση της προηγούμενης άσκησης μπορούμε να πούμε ότι εκτελέσαμε τις ακόλουθες στοιχειώδεις πράξεις. Για το βήμα 1 έχουμε $\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1$, με $c = 1$, για το βήμα 2 έχουμε $\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1$ με $c = 3$ και τέλος $\Gamma_3 \to 3\Gamma_3 - 2\Gamma_2$.

Επομένως επιστρέφουμε στο γραμμικό σύστημα (*) και το εκφράζουμε αρχικά ως σύστημα πινάκων, δηλαδή

$$A \cdot X = B$$

όπου ο πίνακας A ονομάζεται **πίνακας συντελεστών** και είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ο B ονομάζεται **πίνακας σταθερών όρων** και είναι πίνακας στήλη

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

και τέλος ο πίνακας X ονομάζεται **πίνακας αγνώστων** και είναι και αυτός πίνακας στήλη

$$X = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}.$$

**Ορισμός**: Όταν ένα σύστημα πινάκων έχει $B \neq 0$ τότε το σύστημα ονομάζεται **μη ομογενές**. Αν $B = 0$ το σύστημα ονομάζεται **ομογενές**.

Ορισμός: **Επαυξημένος πίνακας** ονομάζεται ο πίνακας που κατασκευάζεται προσθέτοντας τον πίνακα-στήλη B στο τέλος των στηλών του A. Τον επαυξημένο πίνακα τον συμβολίζουμε ως (A|B) .

**Παράδειγμα** Για το σύστημα της άσκησης θα έχουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$
\left(A|B\right)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right]
$$

**Παρατήρηση**: Οι διακεκομμένες γραμμές μας βοηθούν στο να αναγνωρίζουμε ποια είναι η στήλη που αντιστοιχεί στον B.

Κάθε στοιχειώδης πράξη στις εξισώσεις του συστήματος αντιστοιχεί σε μια πράξη στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα. Τις πράξεις αυτές του πίνακα τις ονομάζουμε γραμμοπράξεις.

**Άσκηση 2**: Να λυθεί το σύστημα της άσκησης 1 με την βοήθεια των γραμμοπράξεων

**Λύση**: Θα ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα με την λύση της Άσκησης 1.

$$
\left(A|B\right)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \to 2\Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 5 \end{array}\right] \Gamma_3 \to 7\Gamma_3 + 8\Gamma_2
$$

όπου παίρνουμε τελικά

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -24 & 2 \\ 0 & 0 & -17 & 51 \end{array}\right].
$$

Η διαδικασία μπορεί να σταματήσει εδώ καθώς έχουμε βρεί την λύση του z. Διαβάζοντας την τελευταία γραμμή του επαυξημένου πίνακα έχουμε ότι -17z=51 το οποίο και μας δίνει z=-3. Κάνοντας αντικατάσταση στην δεύτερη γραμμή, δηλαδή στην -7y-24z=2 παίρνουμε την λύση για το y, δηλαδή y=1 και τέλος αντικαθιστώντας και τις δύο αυτές λύσεις στην πρώτη εξίσωση, 2x-3y+1=0, βρίσκουμε ότι x=3.

**Ορισμός**: Πίνακες που προκύπτουν ο ένας από τον άλλο χρησιμοποιώντας τις γραμμοπράξεις ονομάζονται **γραμμικά ισοδύναμοι**, και συμβολίζονται ως $A \sim B$.

**Παρατήρηση** : Το σύμβολο $\sim$ εκφράζει την γραμμική ισοδυναμία.

**Ορισμός**: Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής ενός πίνακα ονομάζεται **ηγετικό στοιχείο**.

**Ορισμός**: Ένας πίνακας $A_{mxn}$ ονομάζεται **κλιμακωτός** αν

1. Οι μη μηδενικές γραμμές προηγούνται των μηδενικών.
2. Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα του ηγετικού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής.

Αν επίσης ισχύουν και τα παρακάτω τότε ο πίνακας ονομάζεται **ανηγμένος κλιμακωτός**.

3. Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι μονάδα.

4. Το ηγετικό στοιχείο μιας γραμμής έχει όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη με αυτό ίσα με το μηδέν.

**Παραδείγματα** Έστω

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -24 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος πίνακας που ανήκει στο επαυξημένο σύστημα είναι κλιμακωτός. Ο δεύτερος πίνακας είναι επίσης κλιμακωτός ενώ ο τρίτος είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

**Παρατήρηση**: Η μέθοδος αυτή έχει κάποια «κόλπα-βήματα» τα οποία εάν ακολουθήσουμε πιστά τότε όχι μόνο θα έχουμε λύσει το σύστημα μας σωστά αλλά και πιο γρήγορα. Για παράδειγμα εάν κάποια από τις εξισώσεις του συστήματος μας έχει συντελεστή 1 για την συντεταγμένη του x τότε αυτή προτιμάται να μεταφερθεί ως πρώτη καθώς διευκολύνει τις πράξεις. Όπως μπορεί να δει παρακάτω

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & -24 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -7 & -24 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Επίσης εάν το σύστημα είναι τετραγωνικό βοηθάει να έχει ως στόχο την δημιουργία ενός άνω τριγωνικού πίνακα, δηλαδή

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -24 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Η διαδικασία που ακολουθεί είναι: κάτω από το πρώτο ηγετικό στοιχείο ξεκινώντας πάντα από την πρώτη γραμμή, δηλαδή το 2, πρέπει όλα τα στοιχεία της στήλης του να γίνουν μηδέν.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -24 & 2 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right].$$

Στην συνέχεια μεταφέρεται στην επόμενη γραμμή. Αυτή τώρα έχει ηγετικό στοιχείο το -7 κάτω από αυτό πρέπει να μηδενιστούν τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη, δηλαδή το * ολοκληρώνοντας έτσι δημιουργία του άνω τριγωνικού πίνακα.

**Παρατήρηση**: Ένας τρόπος να ακολουθήσει κανείς την διαδικασία αυτή χωρίς να κάνει λάθος είναι να θυμάται πάντα οι πράξεις να γίνονται ανάμεσα στην γραμμή που θέλουμε να αλλάξουμε και στην γραμμή που έχει το ηγετικό στοιχείο. Έτσι για το τελευταίο βήμα της παραπάνω διαδικασίας θα είχαμε $\Gamma_3 \to b \cdot \Gamma_3 + c \cdot \Gamma_2$, $b, c \in \mathbb{R}^*$ αφού το ηγετικό στοιχείο είναι το -7 που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή.

**Ορισμός**: Η διαδικασία μετατροπής ενός πίνακα σε κλιμακωτό ονομάζεται **μέθοδος απαλοιφής Gauss** . Ενώ η διαδικασία μετατροπής ενός πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό ονομάζεται **μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan**.

**Παρατήρηση**: 1) Η μέθοδος αυτή λύνει **όλα** τα γραμμικά συστήματα ασχέτως μεγέθους του πίνακα Α. 2) Ο ανηγμένος κλιμακωτός ενός πίνακα είναι μοναδικός σε αντίθεση με το κλιμακωτό πίνακα που δεν είναι. Μια αλλαγή στις γραμμοπράξεις μας δίνει και άλλο κλιμακωτό.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι για τα μη ομογενή γραμμικά συστήματα mxn διαστάσεων ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν το σύστημα μετά την κλιμακοποίηση έχει παραπάνω αγνώστους από ότι εξισώσεις τότε το σύστημα έχει μια **παραμετρική απειρία λύσεων** με **ελεύθερες μεταβλητές**. Οι άγνωστοι ως προς τους οποίους εκφράζουμε την λύση αυτή ονομάζονται ελεύθερες μεταβλητές. Ο αριθμός τους δίνεται από την σχέση: άγνωστοι-εξισώσεις.
2) Αν n=m και μετά την κλιμακοποίηση τότε το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση.
3) Αν μετά την κλιμακοποίηση μία ολόκληρη μηδενική γραμμή του πίνακα Α αντιστοιχεί σε ένα μη μηδενικό στοιχείο του πίνακα Β τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Για παράδειγμα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

**Παρατήρηση** : Τα ομογενή συστήματα μπορούν να εμφανίζουν μόνο τις 1) και 2) εκδοχές. Η τρίτη δεν μπορεί να συμβεί καθώς ο πίνακας-στήλη Β του αντίστοιχου συστήματος είναι μηδενικός και επομένως δεν μπορεί να οδηγήσει σε άτοπο.

Άσκηση: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x-y+z-w+q=1 \\ 2x-y+3z+4q=2 \\ 3x-2y+2z+w+q=1 \\ x+z+2w+q=0 \end{cases}$$

**Λύση**: Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει παραπάνω αγνώστους από ότι εξισώσεις. Επομένως μπορεί να μας δώσει είτε απειρία είτε να είναι αδύνατο. Ξεκινάμε δημιουργώντας τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_3 \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Από τον τελευταία επαυξημένο πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 3 γραμμές ενώ έχουμε 5 αγνώστους, συνεπώς θα έχουμε 5-3=2 ελεύθερες μεταβλητές. Τελειώνοντας λοιπόν θα έχουμε την ακόλουθη παραμετρική εξίσωση:

$$\begin{cases} x = -1 - 3w + q \\ y = -1 - 3w \\ z = 1 + w - 2q \end{cases}.$$

Η λύση αυτή μπορεί να γραφεί και σε διανυσματική μορφή θέτοντας w=k και q=m

(x,y,z,w,q)=(-1,-1,1,0,0)+k(-3,-3,1,1,0)+m(1,0,-2,0,1).

**Άσκηση**: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 3y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \end{cases}.$$

**Λύση**: Αρχικά κατασκευάζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Ανάγουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Από τις δύο τελευταίες γραμμές του επαυξημένου παίρνουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

δηλαδή 0x+0y+0z=5. Επομένως αδύνατο.

**Ορισμός**: **Μερική λύση** ονομάζεται το διάνυσμα που ικανοποιεί τη εξίσωση $A \cdot X = B$.

**Άσκηση** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x+2y+3z+w=1 \\ y+z-w=0 \\ x-y+z+w=2 \end{cases}.$$

**Λύση**: Βλέπουμε ότι έχουμε παραπάνω αγνώστους από ότι εξισώσεις. Επομένως το σύστημα θα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει παραμετρική απειρία. Ξεκινάμε με την μέθοδο απαλοιφής.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Συνεπώς θα έχουμε 1 ελεύθερο άγνωστο, (αφού 4-3=1). Τυχαία επιλέγουμε τον w και άρα έχουμε την ακόλουθη γενική λύση

(x,y,z,w)=(0,-1,1,0)+k(-6,-2,3,1).

Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι το διάνυσμα (0,-1,1,0) ικανοποιεί την εξίσωση $A \cdot X = B$ και άρα αποτελεί τη μερική λύση του συστήματος. Τέλος λύνοντας το αντίστοιχο ομογενές σύστημα βρίσκει κανείς την παραμετρική απειρία k(-6,-2,3,1).

## ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMER

Αναγκαίες προϋποθέσεις για να χρησιμοποιήσει κανείς τη μέθοδο Cramer είναι

1) Το σύστημα να είναι μη ομογενές και τετραγωνικό,
2) Η ορίζουσα του πίνακα A να είναι διάφορη του μηδενός.

Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις αυτές τότε το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση η οποία μας δίνεται από τον τύπο

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad (**)$$

όπου $x_i$ είναι οι άγνωστοι του συστήματος και $|A_i|$ είναι οι ορίζουσες που έχουν στην i-στήλη την λύση του συστήματος ενώ η υπόλοιπη ορίζουσα είναι ίση με αυτή του A.

**Άσκηση**: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-5y-z=1 \\ 4x+2y+3z=5 \end{cases}.$$

**Λύση**: Το σύστημα είναι τετραγωνικό και άρα για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Cramer ξεκινάμε με τον υπολογισμό της ορίζουσας $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 17.$$

Αφού η ορίζουσα Α είναι διάφορη του μηδενός συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των $|A_i|$,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 51,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 17,\ |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -51.$$

Κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (**) παίρνουμε

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 3,\ \mathrm{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = 1,\ \mathrm{z} = \frac{|A_3|}{|A|} = -3.$$

**Παρατήρηση**: Στις προϋποθέσεις του κανόνα αυτού εξαιρέσαμε τα ομογενή συστήματα. Ο λόγος που το κάναμε αυτό είναι γιατί εάν ένα ομογενές σύστημα έχει τη ορίζουσα του πίνακα Α διάφορη του μηδενός τότε μπορεί να ορισθεί ο αντίστροφος του και άρα εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι θα έχει ως μια και μοναδική λύση τη μηδενική.

**Παράδειγμα** Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο ομογενές σύστημα

$$A \cdot X = 0.$$

Τότε παίρνοντας την ορίζουσα διάφορη του μηδενός υπάρχει ο $A^{-1}$ και άρα

$$A^{-1}A \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0.$$

**Θεώρημα**: Τα ομογενή συστήματα μπορούν να έχουν είτε μια και μοναδική λύση τη μηδενική ή αλλιώς **τετριμμένη** είτε εκτός από την τετριμμένη λύση και παραμετρική απειρία.

**Θεώρημα**: Κάθε ομογενές σύστημα που έχει παραπάνω αγνώστους από ότι εξισώσεις έχει παραμετρική απειρία λύσεων.

**ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ**

$$A \cdot X = B$$

$|A| \neq 0$ | $|A| = 0$ | $|A| = 0$

Μια και μοναδική λύση | Αδύνατο | Παραμετρική Απειρία λύσεων

Μεθοδολογία: | Μεθοδολογία: | Μεθοδολογία:

1. Gauss
2. Cramer
3. $X = A^{-1} \cdot B$
4. $\left[ A | I \right]$

Gauss | Gauss

$$A \cdot X = 0$$

$|A| \neq 0$ | $|A| = 0$

Μια και μοναδική λύση , X=0 | Παραμετρική Απειρία λύσεων και X=0

Μεθοδολογία: | Μεθοδολογία:

Γνωστό από Θεώρημα | Gauss