ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μηχανοτρονική

Ενότητα 6: Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Βασίλειος Μουλιανίτης
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης
Προϊόντων και Συστημάτων

BY NC ND

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μηχανοτρονική

6η Ενότητα: Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων.

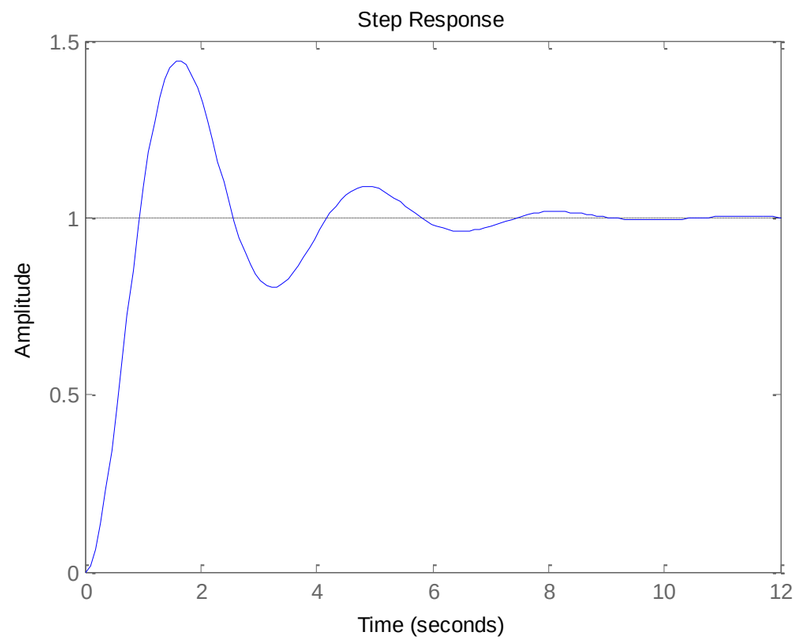
Βασίλειος Μουλιανίτης

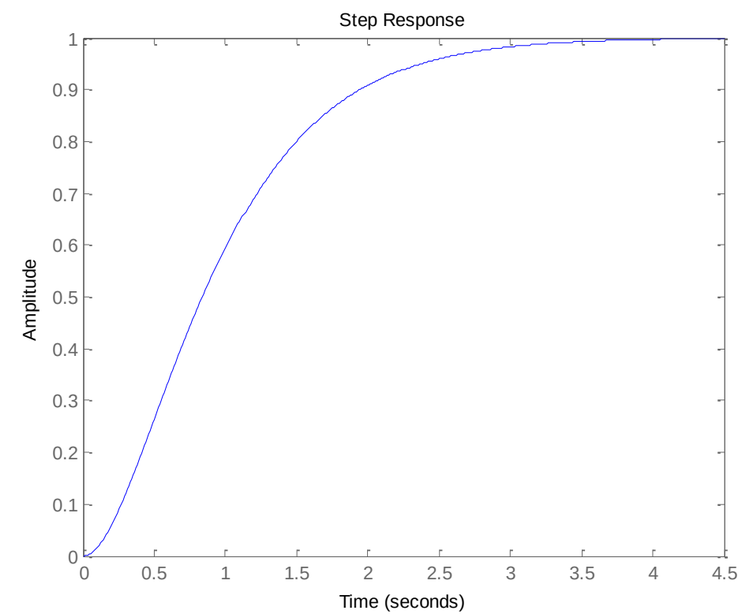
Γενικά

Ένα σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, όταν παραμένει στην ίδια κατάσταση χωρίς να του ασκείται εξωτερική είσοδος ή διαταραχή.

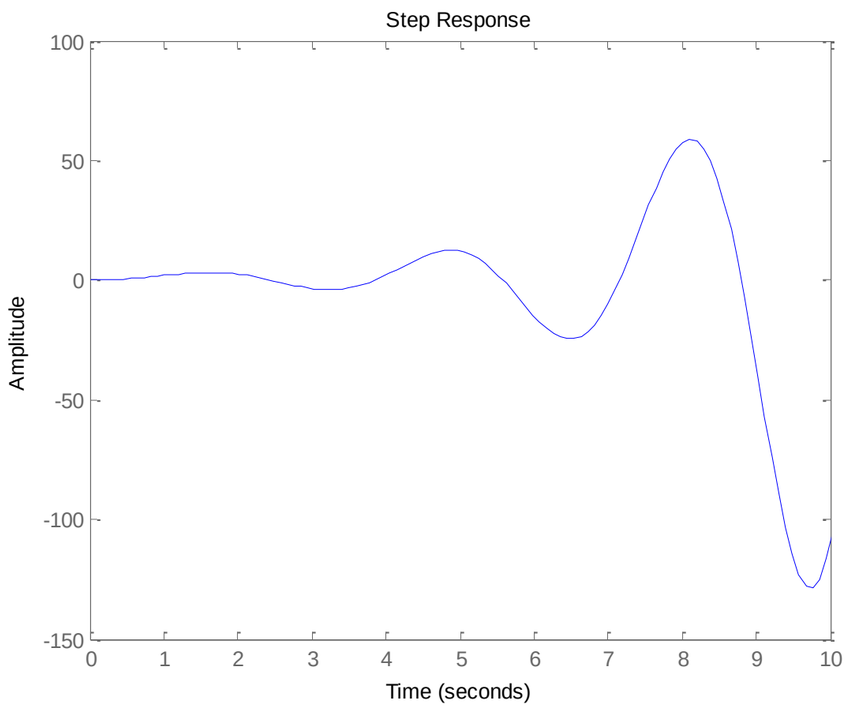
Εάν σε ένα σύστημα το οποίο ισορροπεί, το διαταράξουμε από τη θέση ισορροπίας του, και αυτό επανέρθει στην αρχική του θέση, τότε λέμε ότι είναι ευσταθές. Σε διαφορετική περίπτωση είναι ασταθές.

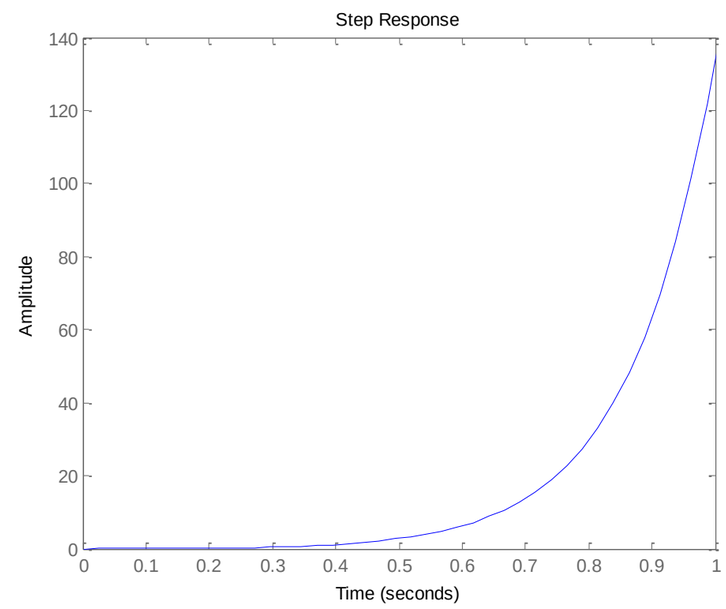
Παραδείγματα ευσταθών συστημάτων





Παραδείγματα ασταθών συστημάτων





Ανάλυση ευστάθειας

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

Εάν $\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0$: Σύστημα ευσταθές.

Εάν $\lim\limits_{t\to\infty} y_t(t) \to \infty$: Σύστημα ασταθές.

Ανάλυση ευστάθειας

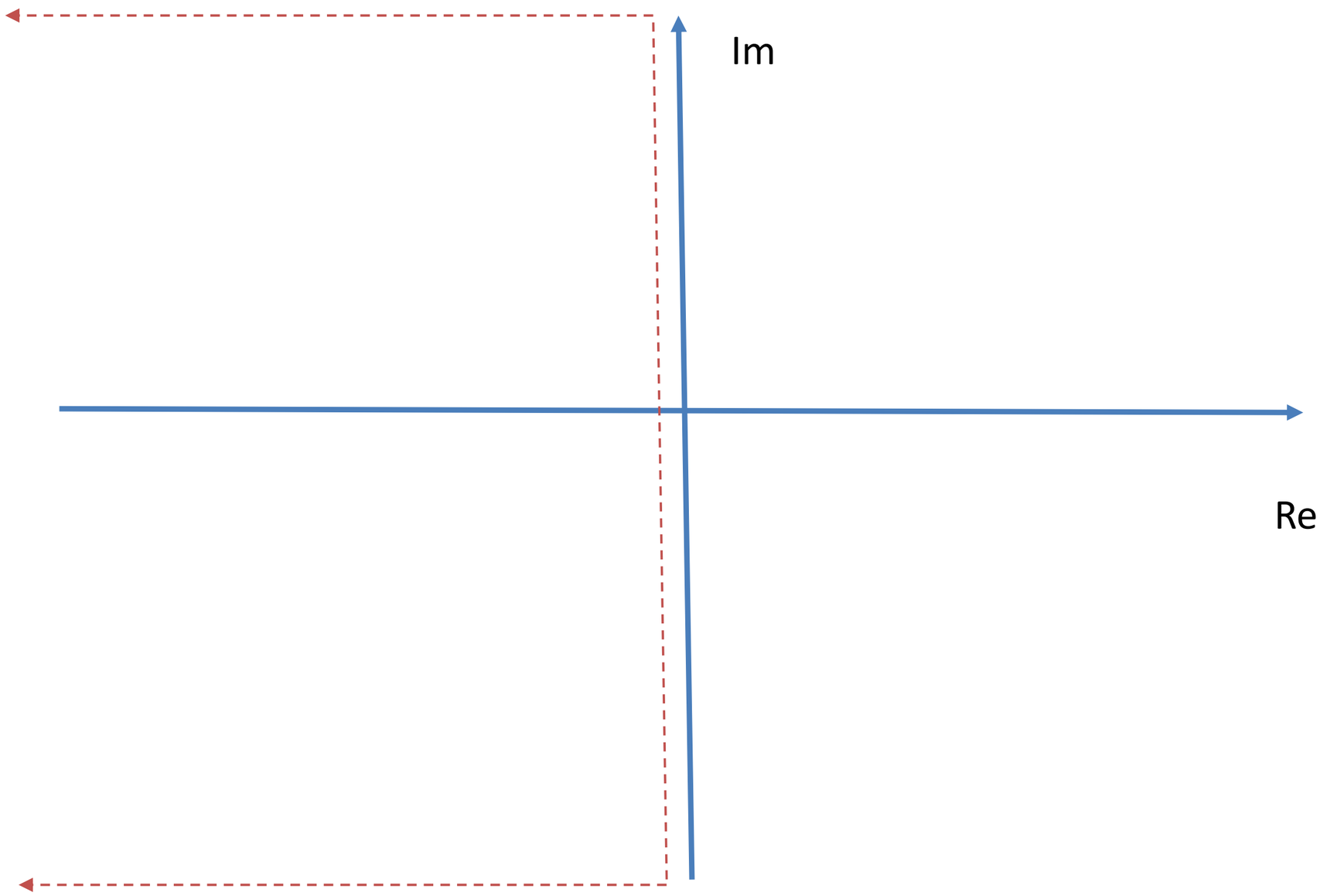
- Έστω συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = k\,\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Όπου ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$$

Ευσταθή περιοχή στο μιγαδικό επίπεδο

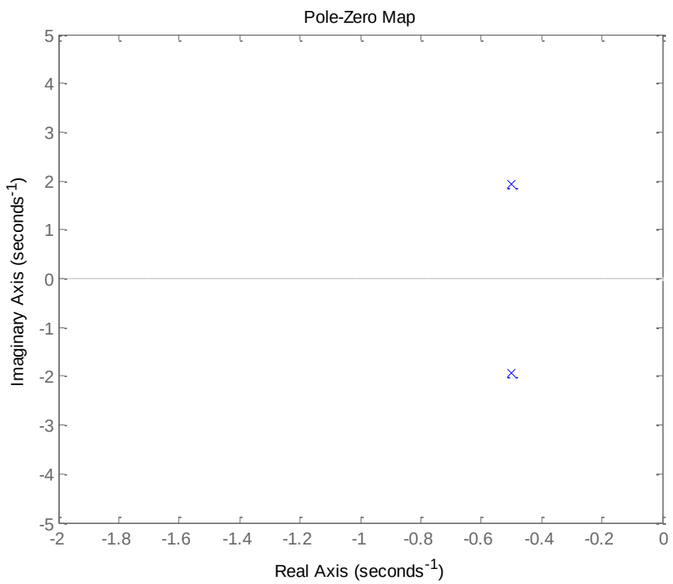


Ανάλυση ευστάθειας

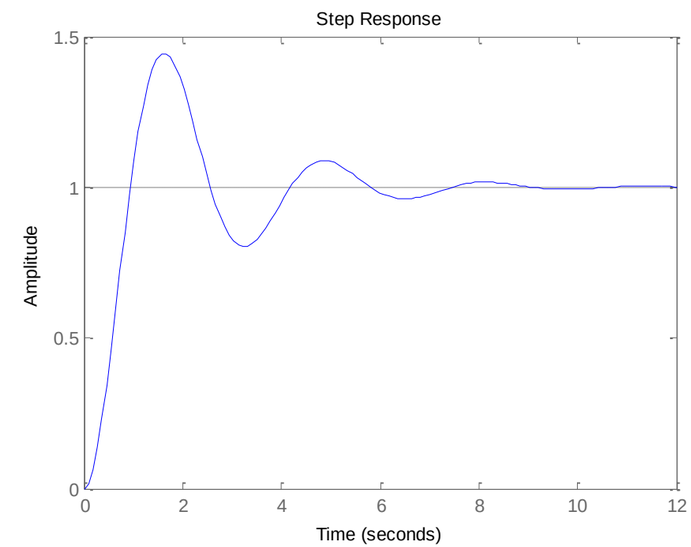
- Ευσταθές σύστημα: Όλοι οι πόλοι κείτονται στο αριστερό ημιεπίπεδο (Το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό).
- Ασταθές σύστημα: Ένας τουλάχιστον πόλος κείτεται στο δεξιό ημιεπίπεδο ή πολλαπλά ζεύγη πόλων κείτονται στον φανταστικό άξονα ή πολλαπλοί πόλοι κείτονται στην αρχή των αξόνων.
- Οριακά ευσταθές: Ένας απλός πόλος κείτεται στην αρχή και όλοι οι άλλοι πόλοι κείτονται στο αριστερό ημιεπίπεδο.
- Περιθωριακά (ουδέτερα) ευσταθές: Ένα ζεύγος πόλων κείτεται στον φανταστικό άξονα και όλοι οι άλλοι πόλοι κείτονται στο αριστερό ημιεπίπεδο.

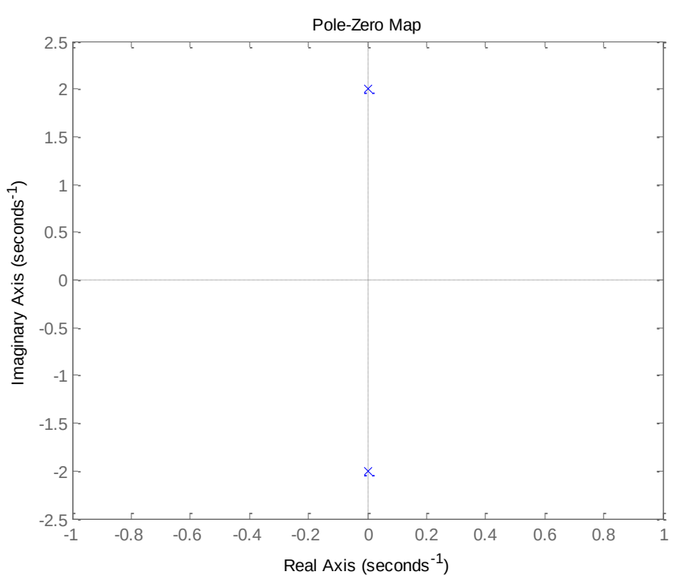
Η ευστάθεια ή αστάθεια είναι ιδιότητα του συστήματος και δεν εξαρτάται από την είσοδο ή την διέγερση.

Παραδείγματα

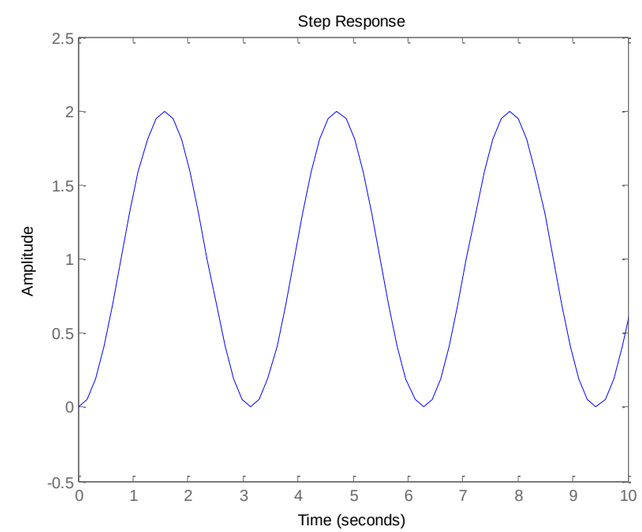


Ευσταθές

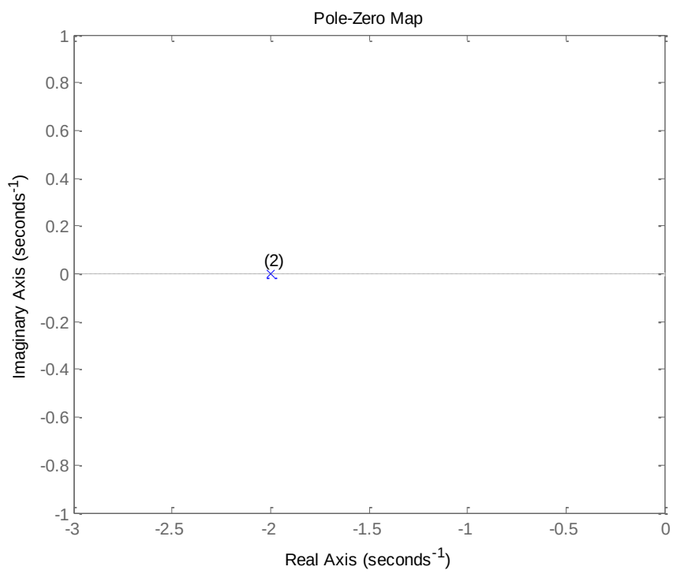




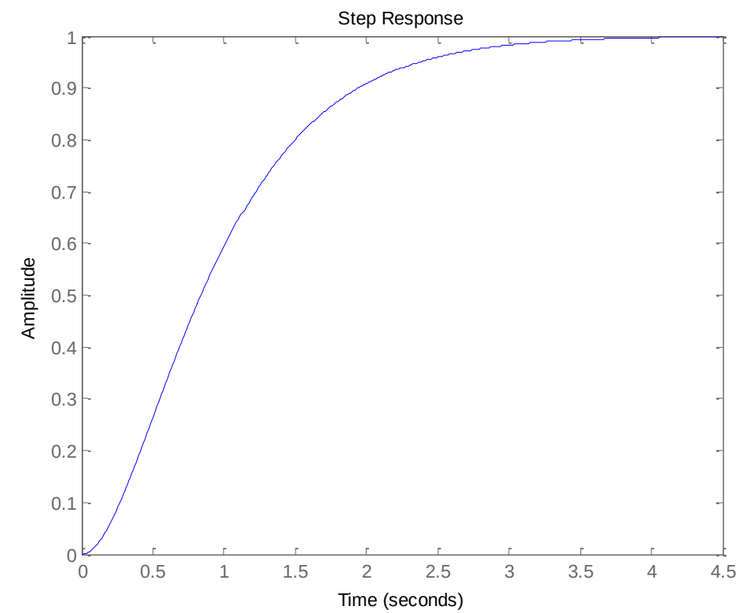
Ουδέτερα ευσταθές

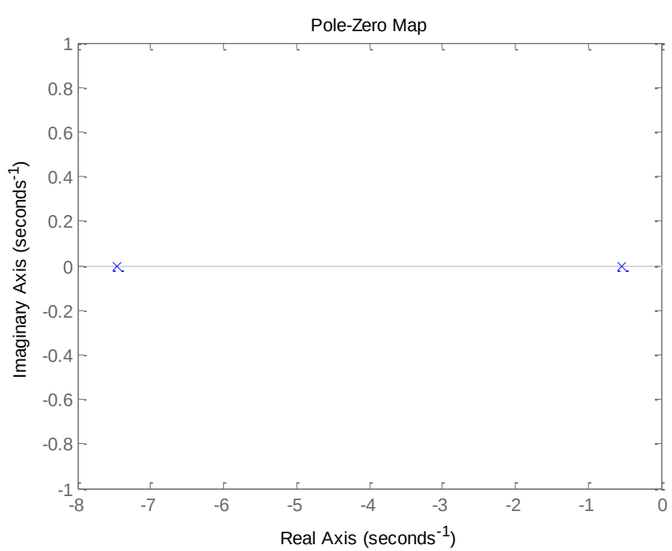


Παραδείγματα

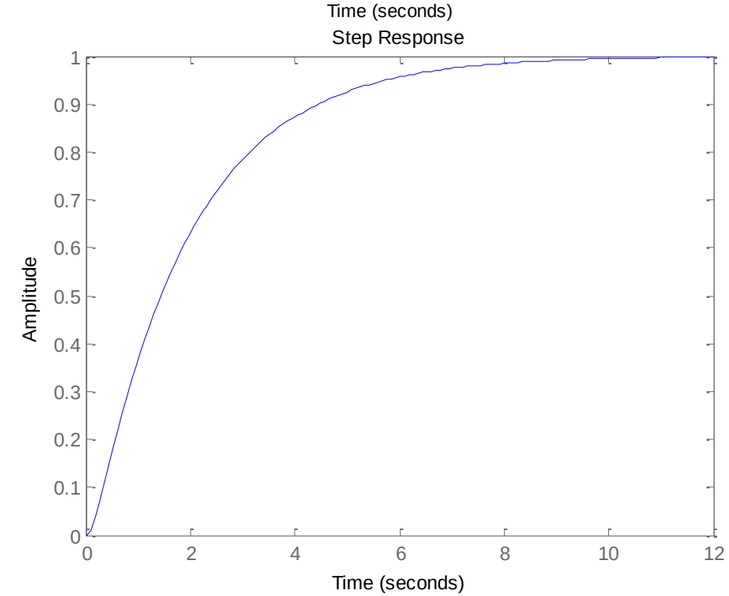


Ευσταθές

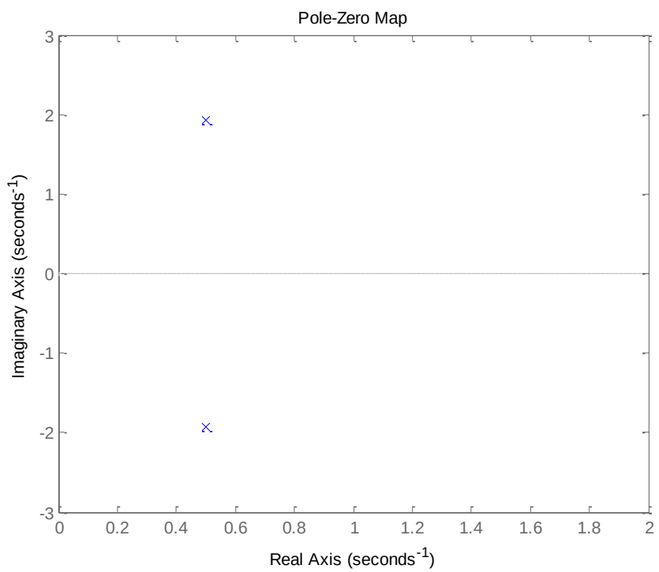




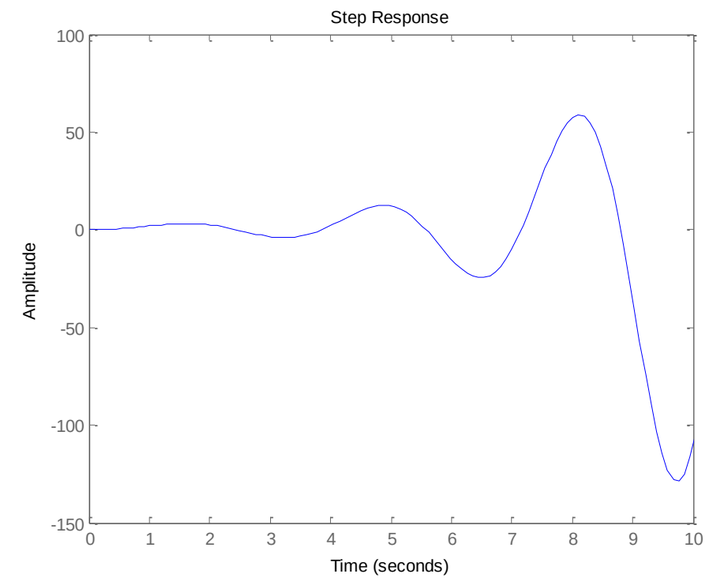
Ευσταθές

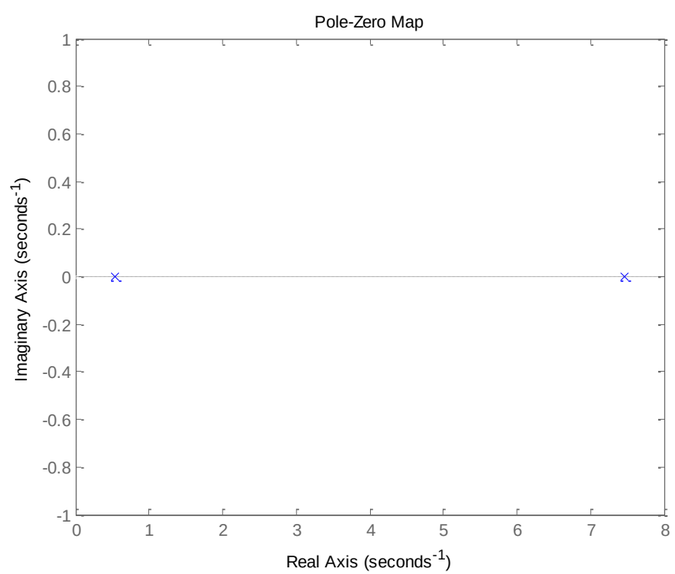


Παραδείγματα

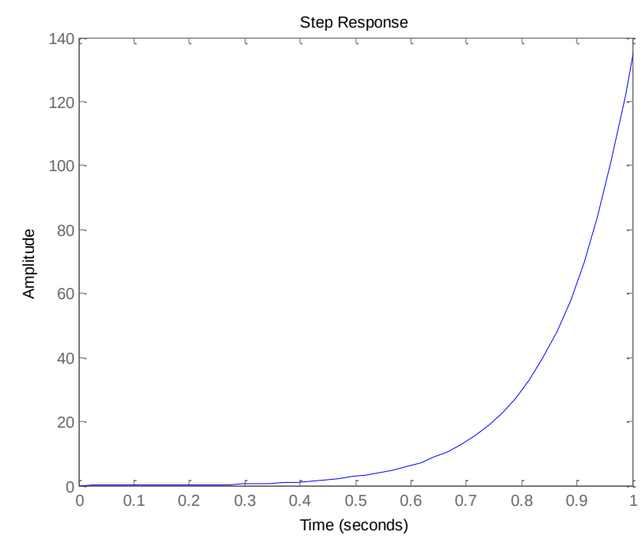


Ασταθές





Ασταθές



Κριτήριο ευστάθειας των Rough-Hurwitz

- Έστω χαρακτηριστική εξίσωση:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Συνθήκη: Εάν υπάρχει $a_i \leq 0, i = 0, \ldots, n$ τότε το σύστημα είναι ασταθές.

Η συνθήκη είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή.

Κριτήριο ευστάθειας των Rough-Hurwitz

Εάν $a_i > 0, \forall i = 0, \dots, n$ τότε σχηματίζουμε τον πίνακα Rough.

Π.χ. για πολυώνυμο 5ου βαθμού έχουμε:

$$a_0 s^5 + a_1 s^4 + \cdots + a_5$$

s^5	α_0	α_2	α_4
s^4	α_1	α_3	α_5
s^3	b_1	b_2	
s^2	c_1	c_2	
s^1	d_1		
s^0	e_1		

Κριτήριο ευστάθειας των Rough-Hurwitz

- Οι άγνωστοι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:
  - Έστω ότι το στοιχείο που ψάχνουμε να βρούμε είναι το c_{ij}, όπου i η γραμμή και j η στήλη.
  - Τότε $c_{ij} = \dfrac{-\begin{vmatrix} c_{i-2,1} & c_{i-2,j+1} \\ c_{i-1,1} & c_{i-1,j+1} \end{vmatrix}}{c_{i-1,1}}$
- Όταν το j+1 είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των στηλών του πίνακα τότε το στοιχείο αυτό ισούται με το μηδέν.

Κριτήριο ευστάθειας των Rough-Hurwitz

- Π.χ.

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

Κριτήριο ευστάθειας των Rough-Hurwitz

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\
s^4 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\
s^3 & b_1 & b_2 & \\
s^2 & c_1 & c_2 & \\
s^1 & d_1 & & \\
s^0 & e_1 & &
\end{array}
$$

- Για να είναι ευσταθές το σύστημα θα πρέπει η πρώτη στήλη να έχει μόνο θετικούς αριθμούς.
- Σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα έχει τόσους πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο όσες είναι και οι αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη.

Ειδικές περιπτώσεις

- Όταν ένας όρος της πρώτης στήλης είναι μηδέν, ενώ όλοι οι υπόλοιποι της γραμμής διάφοροι του μηδενός ή δεν υπάρχουν τότε αντικαθίσταται από ένα μικρό θετικό αριθμό ε.
- Όταν όλοι οι όροι μιας σειράς είναι μηδέν τότε σχηματίζουμε ένα «βοηθητικό» πολυώνυμο ως εξής:
  - Το πολυώνυμο έχει συντελεστές τους όρους της προηγούμενης σειράς.
  - Παραγωγίζουμε ως προς s το πολυώνυμο και τοποθετούμε στη γραμμή τους συντελεστές του νέου πολυωνύμου.