ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μηχανοτρονική

Ενότητα 5: Ανάλυση μεταβατικής απόκρισης

Βασίλειος Μουλιανίτης
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης
Προϊόντων και Συστημάτων

BY NC ND

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μηχανοτρονική

5η Ενότητα: Ανάλυση Μεταβατικής Απόκρισης.

Βασίλειος Μουλιανίτης

Σήματα δοκιμής εισόδου

Συνάρτηση παλμού: $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, t > \varepsilon \end{cases}$

Εάν $\varepsilon \to 0$ τότε η $f_\varepsilon(t)$ τείνει στην κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ η οποία έχει τις ιδιότητες:

$$\int_0^\infty \delta(t)dt = 1, \int_0^\infty \delta(t-a)g(t)dt = g(a)$$

Στο πεδίο Laplace: $\mathrm{R}(s) = 1$

Σήματα δοκιμής εισόδου

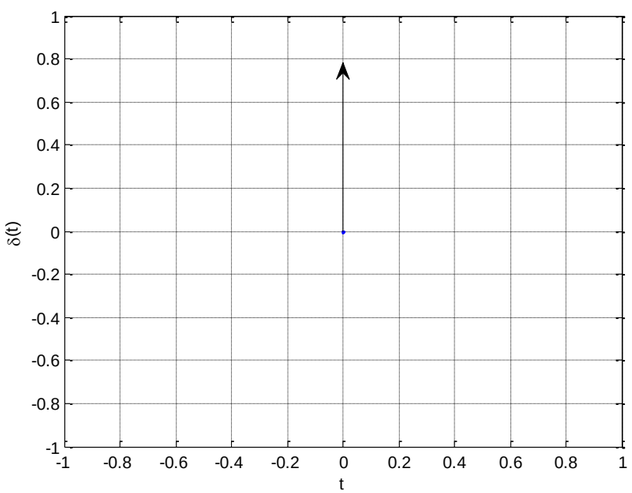
Συνάρτηση Βαθμίδας: $\mathrm{r}(t) = \begin{cases} A, t > 0 \\ 0, t < \varepsilon \end{cases}, R(s) = \frac{A}{s}$

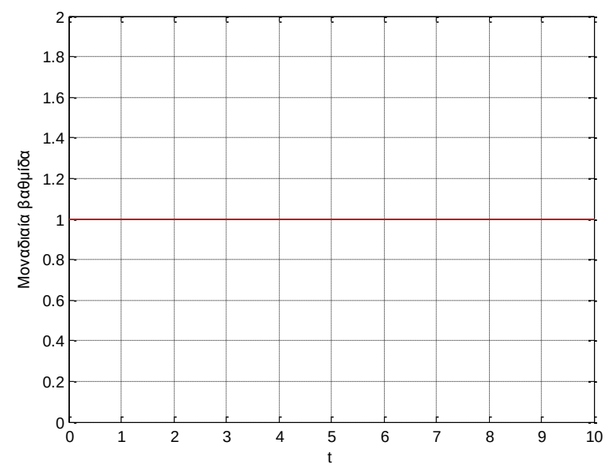
Συνάρτηση Αναρρίχησης: $\mathrm{r}(t) = \begin{cases} At, t > 0 \\ 0, t < \varepsilon \end{cases}, R(s) = \frac{A}{s^2}$

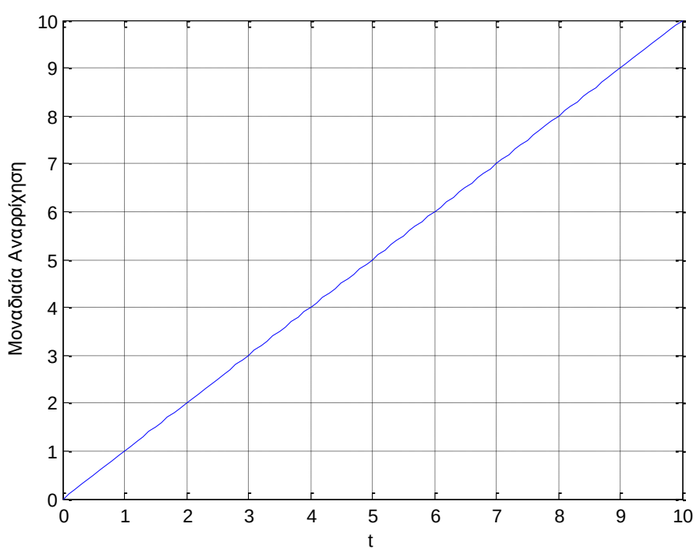
Συνάρτηση Παραβολής: $\mathrm{r}(t) = \begin{cases} At^2, t > 0 \\ 0, t < \varepsilon \end{cases}, R(s) = \frac{A}{s^3}$

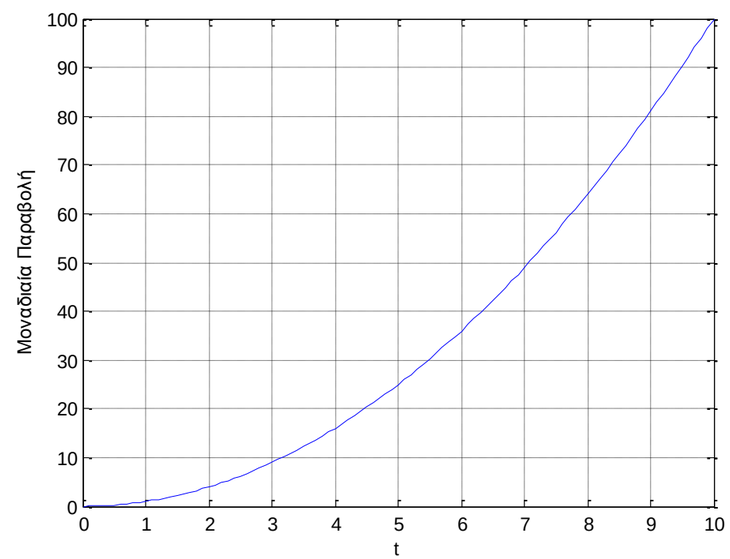
Όταν A=1 τότε τα σήματα ονομάζονται μοναδιαία.

Γραφικές παραστάσεις σημάτων δοκιμής









Χρονική απόκριση συστήματος

- Η χρονική απόκριση ενός συστήματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

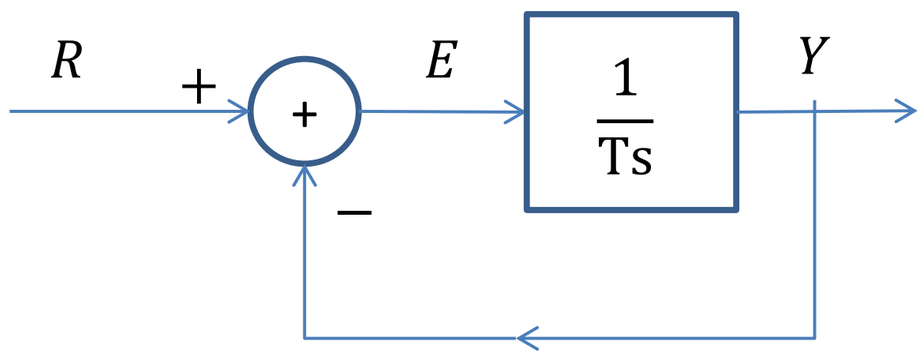
$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

Όπου, $y_t(t)$: μεταβατική απόκριση, με $\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$.

$y_{ss}(t)$: απόκριση μόνιμης κατάστασης.

Συστήματα πρώτης τάξης

- Έστω το παρακάτω σύστημα πρώτης τάξης:



Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{1 + \mathrm{Ts}}$$

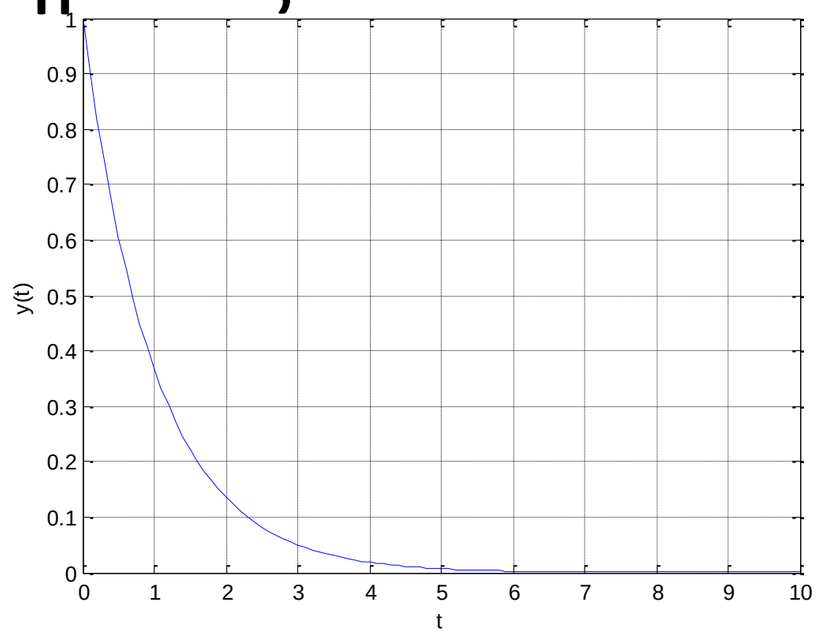
Συστήματα πρώτης τάξης

- Απόκριση κρουστικής συνάρτησης (R=1):

$$Y = \frac{1}{1+\mathrm{Ts}} = \frac{1/T}{1/T+\mathrm{s}} \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

T: χρονική σταθερά συστήματος

(Η γραφική παράσταση υλοποιήθηκε για T=1)



Συστήματα πρώτης τάξης

- Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας $R(s) = \frac{1}{s}$:

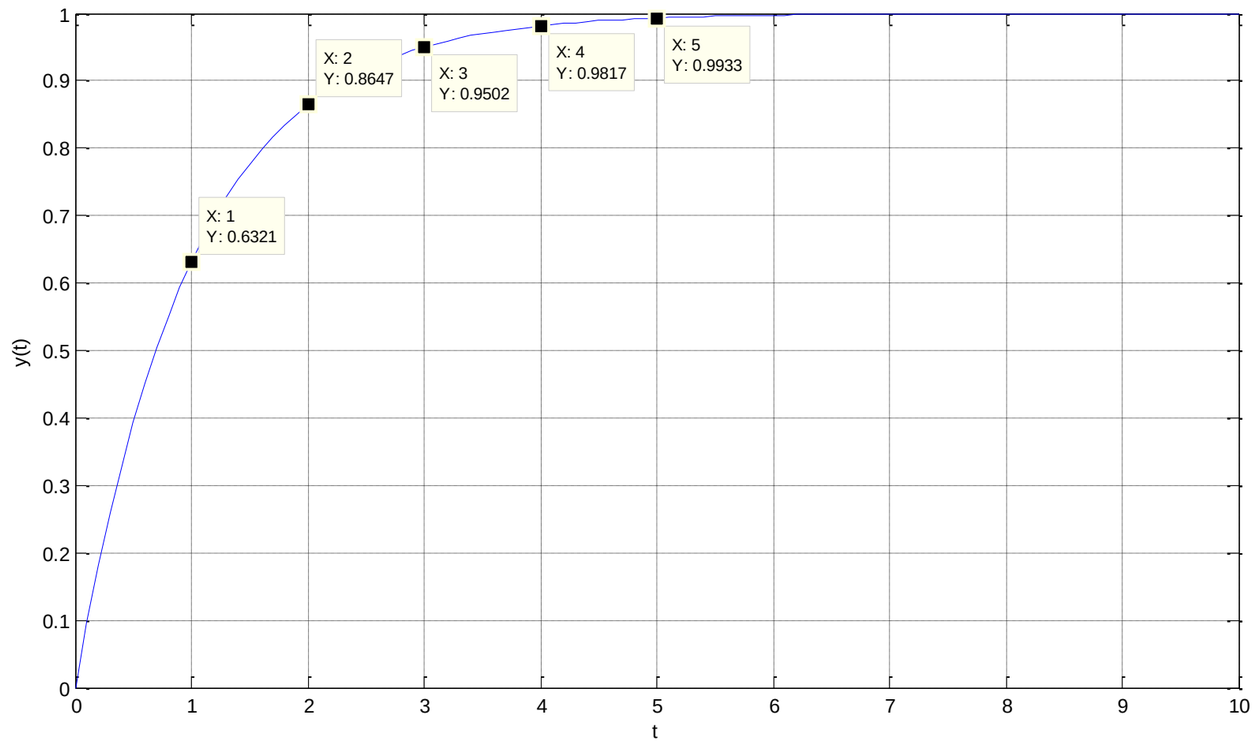
$$Y = \frac{1/\mathrm{T}}{1/\mathrm{T} + \mathrm{s}} \frac{1}{s} \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Το σφάλμα ορίζεται από τη σχέση:

$$e(t) = r(t) - y(t) = e^{-\frac{t}{T}}$$

Όταν $t \to \infty$ τότε $e(t) \to 0$.

Συστήματα πρώτης τάξης



- Μαθηματικά: Μόνιμη κατάσταση όταν $t \to \infty$
- Πρακτικά: Μόνιμη κατάσταση όταν $t = 4\tau$. (Με σφάλμα μόνιμης κατάστασης 2%).

Συστήματα πρώτης τάξης

- Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας $R(s) = \frac{1}{s^2}$:

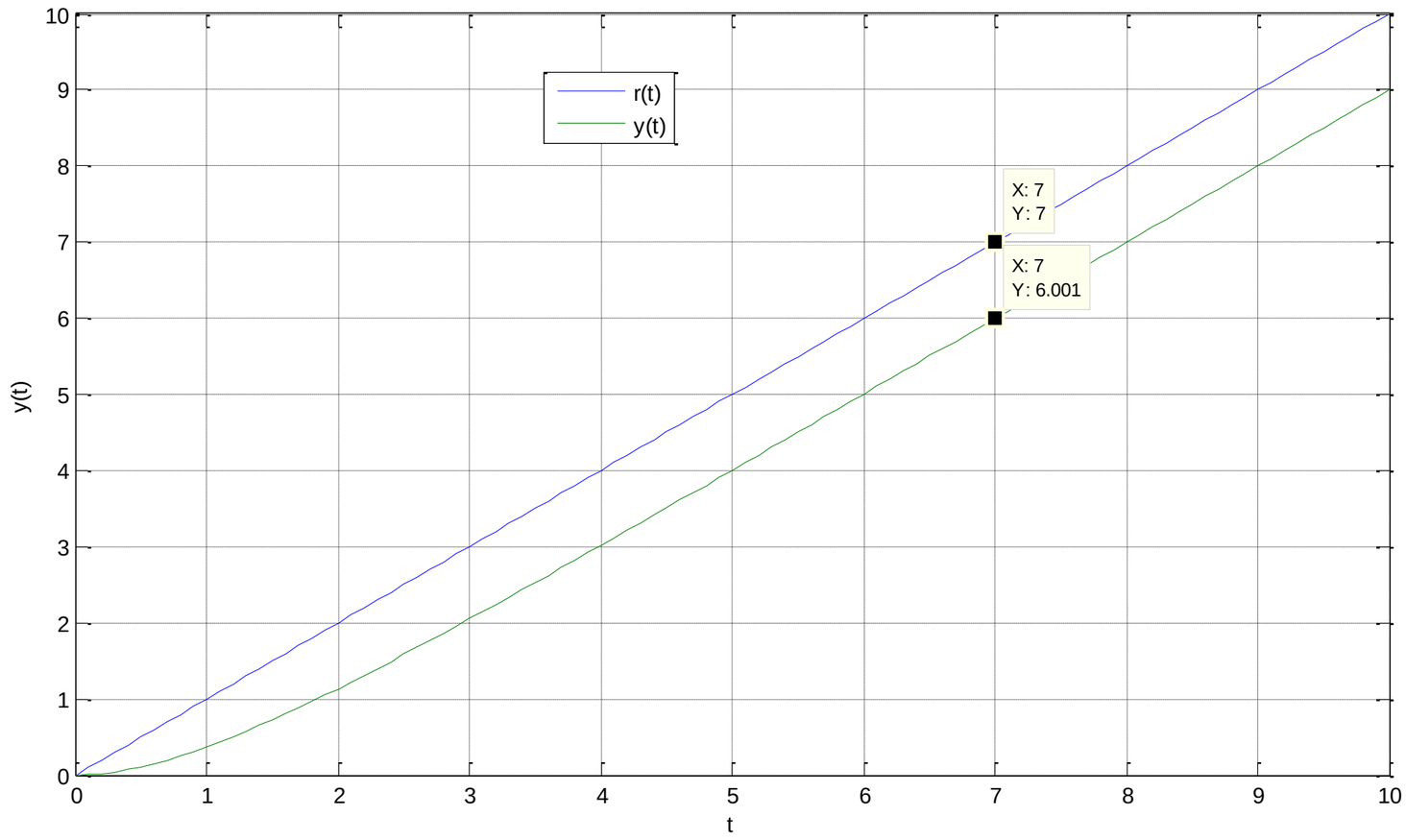
$$Y = \frac{1/\mathrm{T}}{1/\mathrm{T} + \mathrm{s}} \frac{1}{s^2} \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = t - T + e^{-\frac{t}{T}}$$

και:

$$e(t) = \mathrm{T} - e^{-\frac{t}{T}}$$

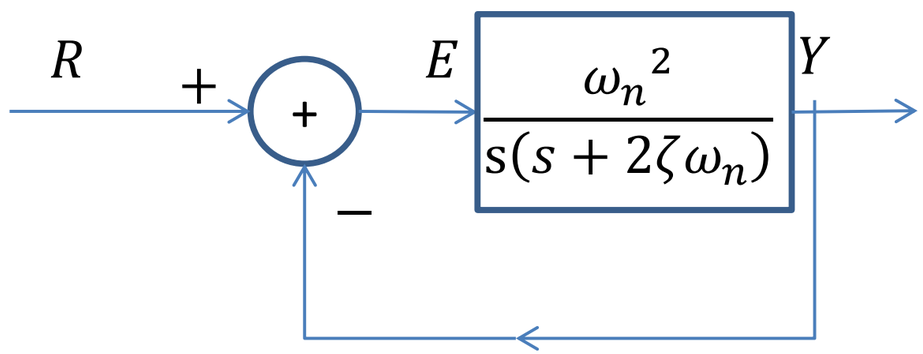
Όταν $t \to \infty$ τότε $e(t) \to \mathrm{T}$.

Συστήματα πρώτης τάξης



Συστήματα δεύτερης τάξης

- Έστω το παρακάτω σύστημα δεύτερης τάξης:



Όπου $\zeta\omega_n = \sigma_\alpha$: σταθερά εξασθένησης.
ζ: λόγος απόσβεσης.
ω_n: φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$: φυσική συχνότητα με απόσβεση.
Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\frac{\Upsilon}{R} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

Συστήματα δεύτερης τάξης

- Το σύστημα έχει <u>χαρακτηριστική εξίσωση</u>:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται πόλοι.

Οι ρίζες του αριθμητή ονομάζονται μηδενιστές.

- Το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι ρίζες και ισοδύναμα το είδος της απόκρισης καθορίζεται αποκλειστικά από το ζ.

Συστήματα δεύτερης τάξης

- Όταν $0 < \zeta < 1$: Οι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί με αρνητικό πραγματικό μέρος. Το σύστημα έχει υποαπόσβεση, η απόκριση καταστέλλεται με διαρκώς μειούμενες ταλαντώσεις.
- Όταν $\zeta = 0$: Οι πόλοι είναι συζυγείς φανταστικοί. Η απόκριση δεν καταστέλλεται αλλά ταλαντώνεται επ' άπειρον.
- Όταν $\zeta = 1$: Οι πόλοι είναι αρνητικοί πραγματικοί και ίσοι μεταξύ τους. Το σύστημα έχει κρίσιμη απόσβεση, και δεν υπάρχει ταλάντωση.
- Όταν $\zeta > 1$: Οι πόλοι είναι αρνητικοί πραγματικοί. Το σύστημα έχει υπεραπόσβεση, και δεν υπάρχει ταλάντωση.

Συστήματα δεύτερης τάξης

- Ρίζες συστήματος:

Υποαπόσβεση: $0 < \zeta < 1$, $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Κρίσιμη απόσβεση: $\zeta = 1$, $s_{1,2} = -\omega_n$.

Υπεραπόσβεση: $\zeta > 1$, $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Μηδενική απόσβεση: $\zeta = 0$, $s_{1,2} = -i\omega_n$.

Αρνητική απόσβεση: $-1 < \zeta < 0$, $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$,

$\zeta < -1$, $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ (Δεν θα μας απασχολήσει η περίπτωση αυτή).

Συστήματα δεύτερης τάξης

- Απόκριση σε μοναδιαία βαθμίδα:

Υποαπόσβεση: $y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_d t + \theta)$ με $\theta = cos^{-1}\zeta$

Κρίσιμη απόσβεση: $y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(1 + \omega_n t)$

Υπεραπόσβεση: $y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-p_1 t}}{p_1} + \frac{e^{-p_2 t}}{p_2}\right)$ με $p_1 = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n = \frac{1}{\tau_1}, p_2 = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n = \frac{1}{\tau_2}$

Μηδενική απόσβεση: $y(t) = 1 - cos(\omega_n t)$

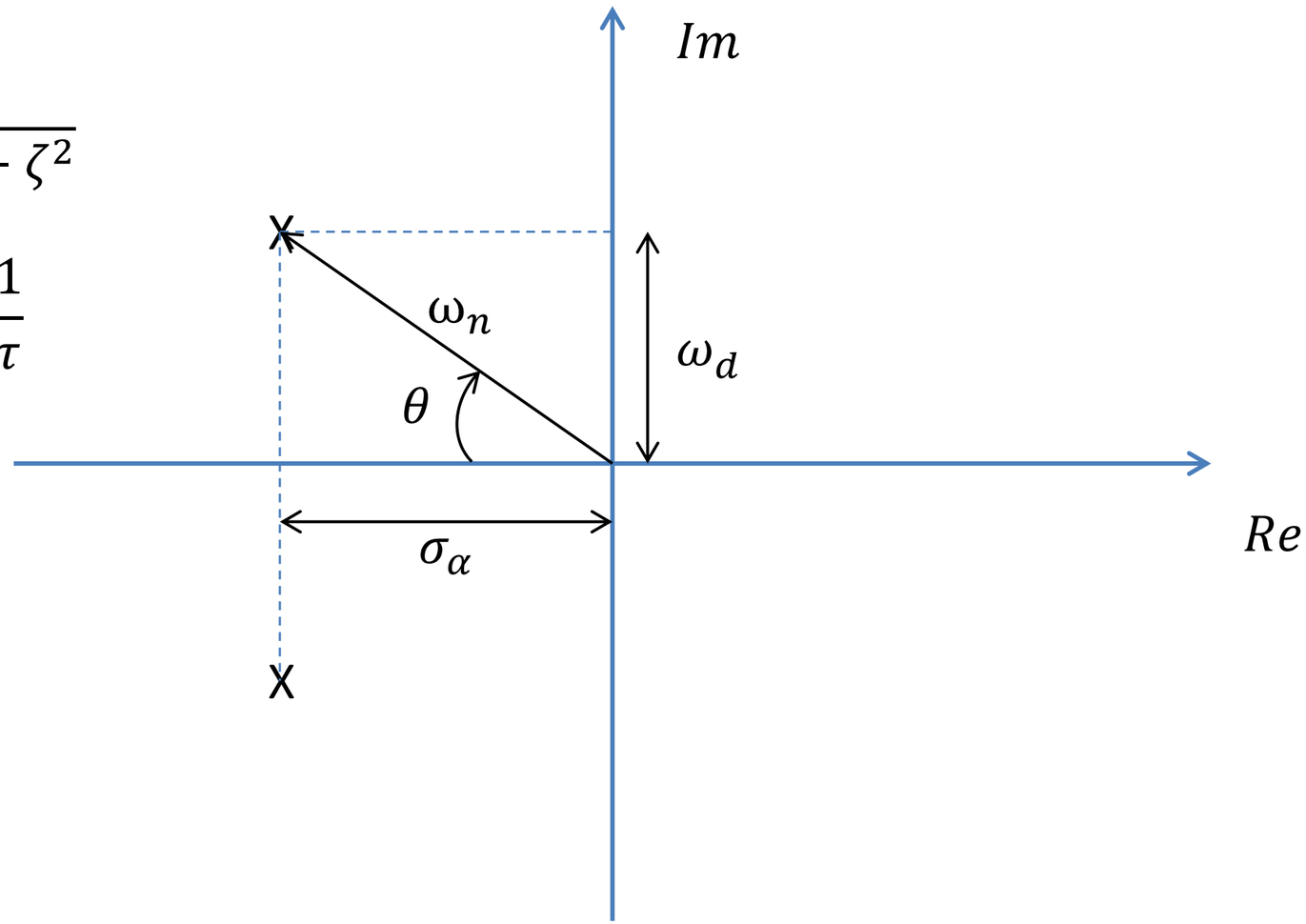
Μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης εκτός από τελευταία περίπτωση.

Γεωμετρική ερμηνεία πόλων στο μιγαδικό επίπεδο

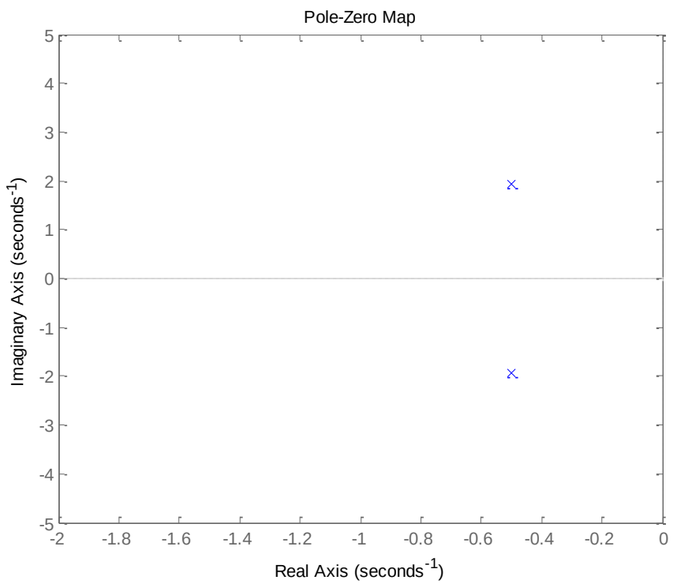
$\theta = cos^{-1}\zeta$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

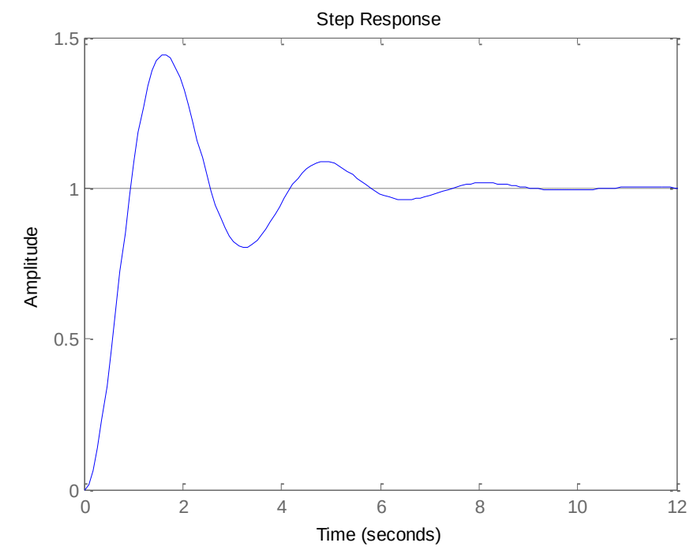
$\sigma_\alpha = \zeta\omega_n = \frac{1}{\tau}$

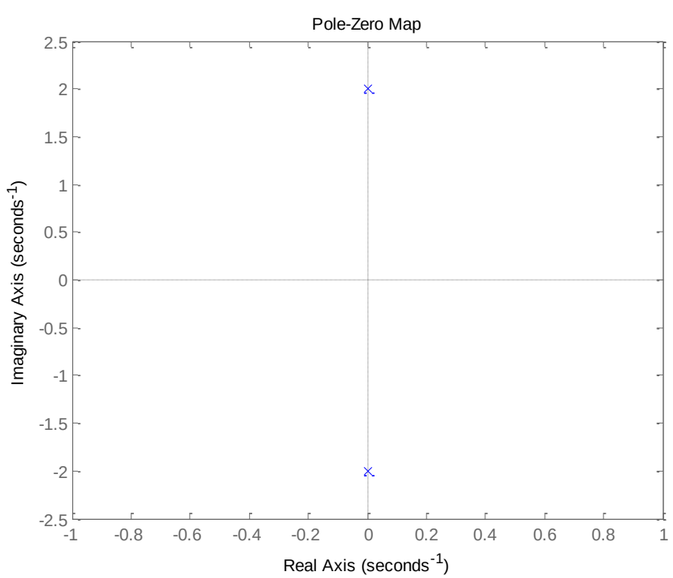


Σύγκριση αποκρίσεων

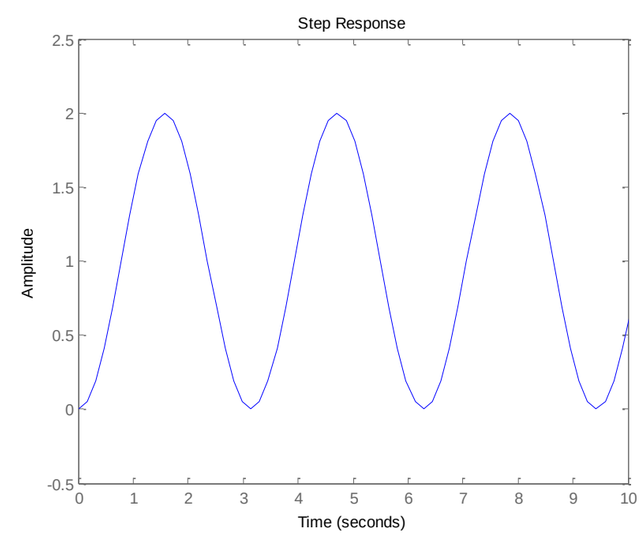


$$0 < \zeta < 1$$

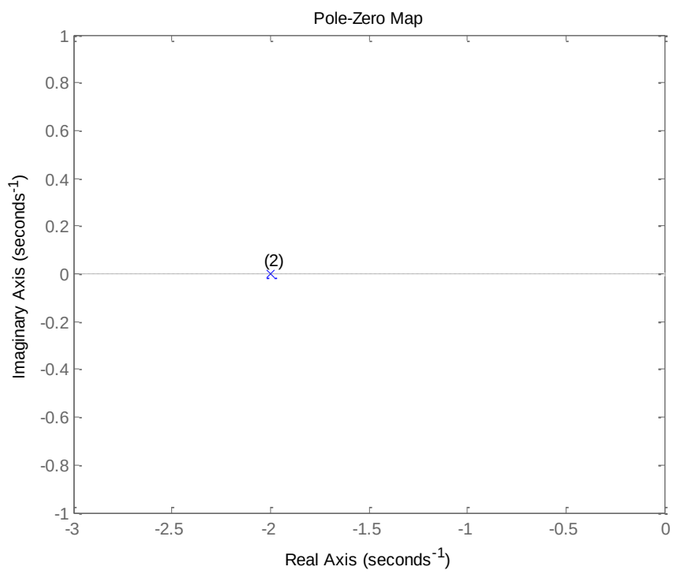




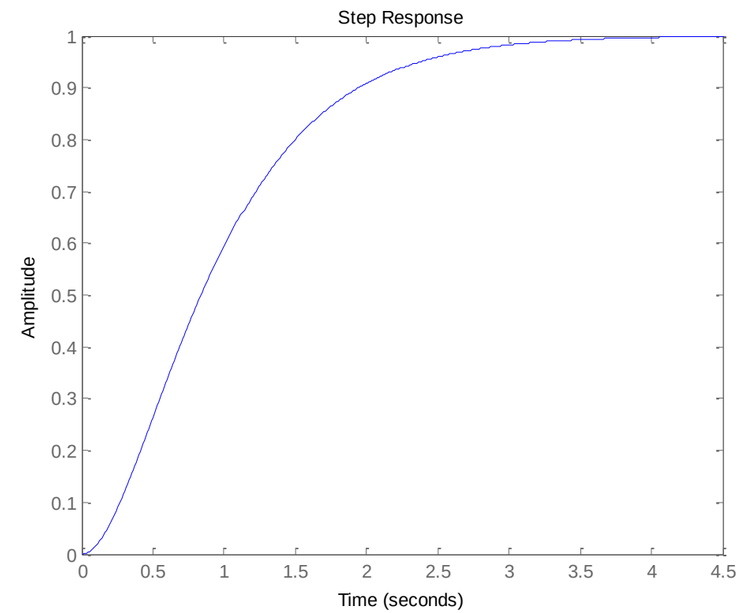
$$\zeta = 0$$

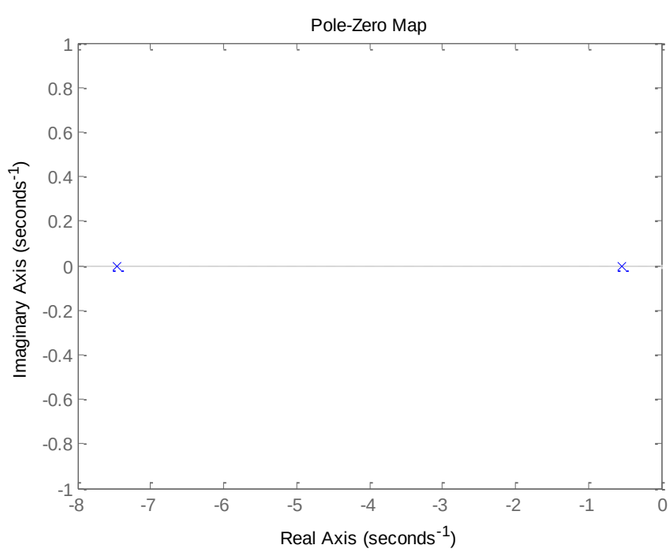


Σύγκριση αποκρίσεων

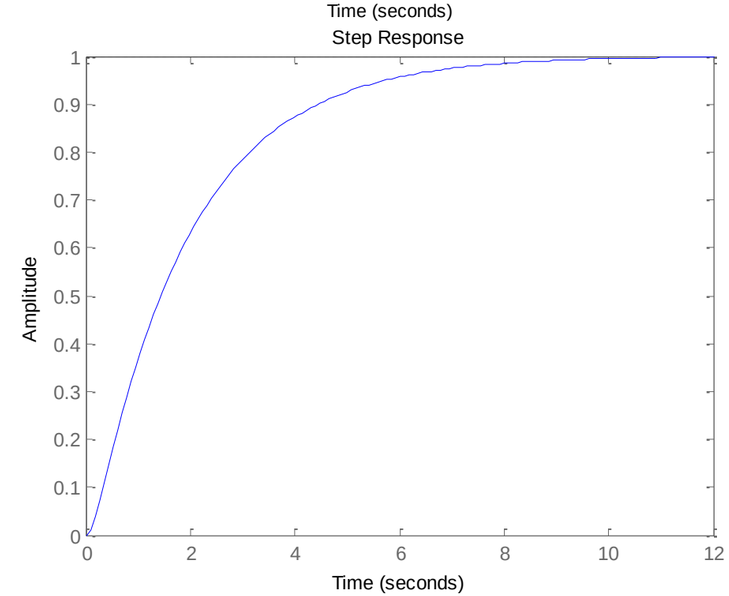


$\zeta = 1$

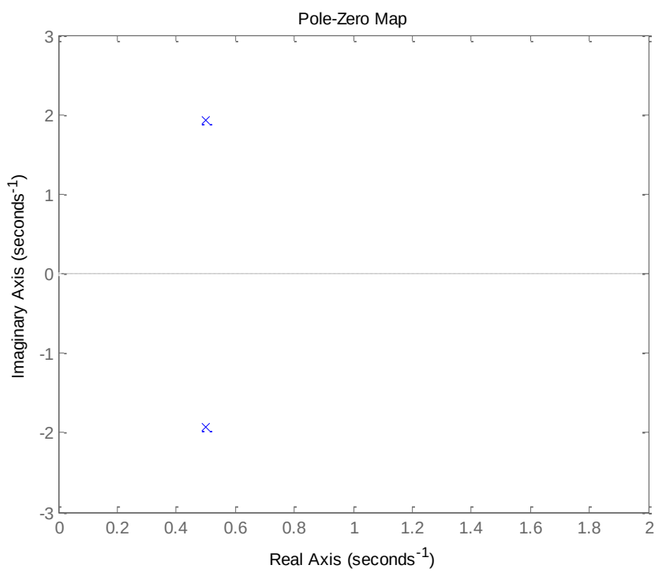




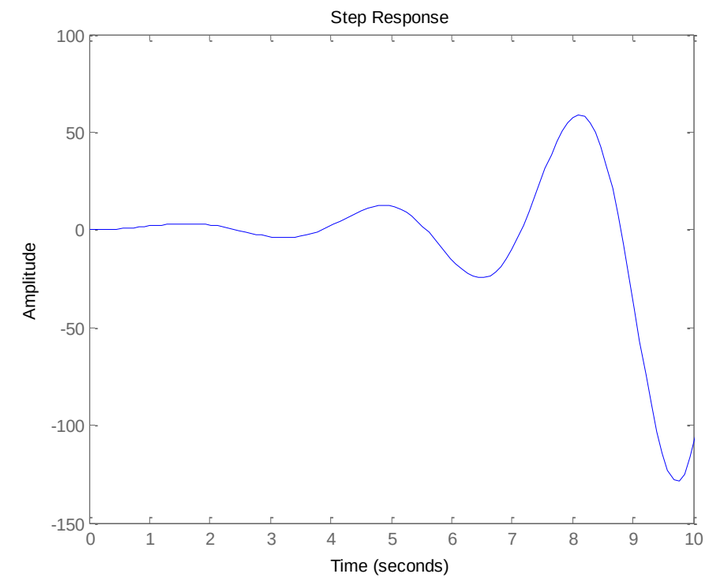
$\zeta > 1$

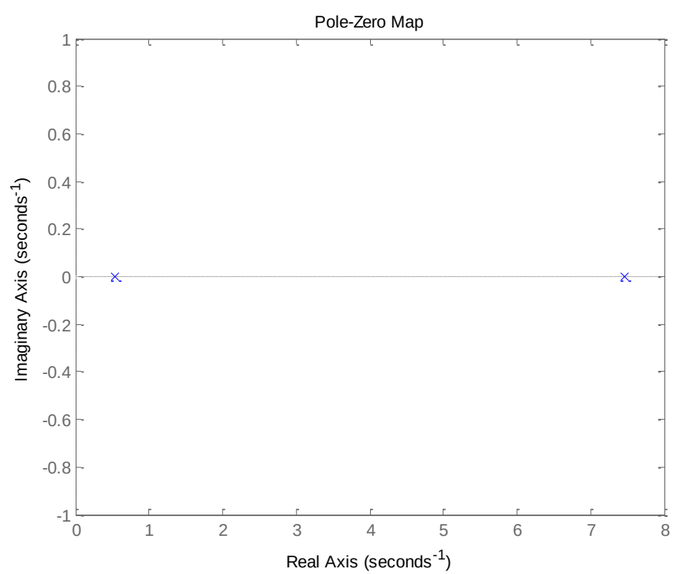


Σύγκριση αποκρίσεων

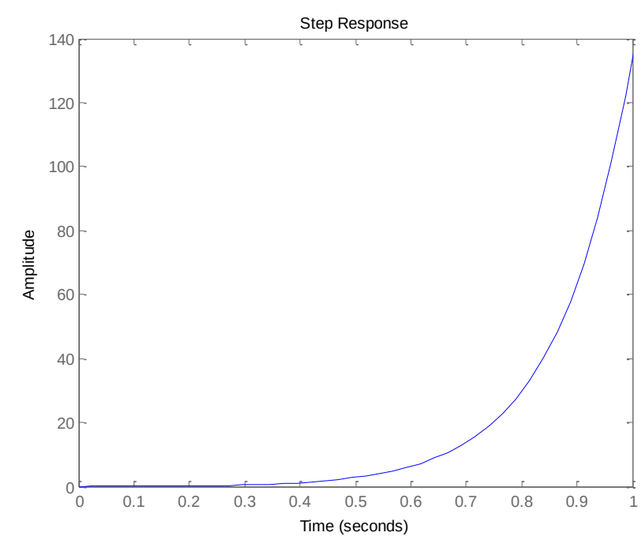


$$-1 < \zeta < 0$$

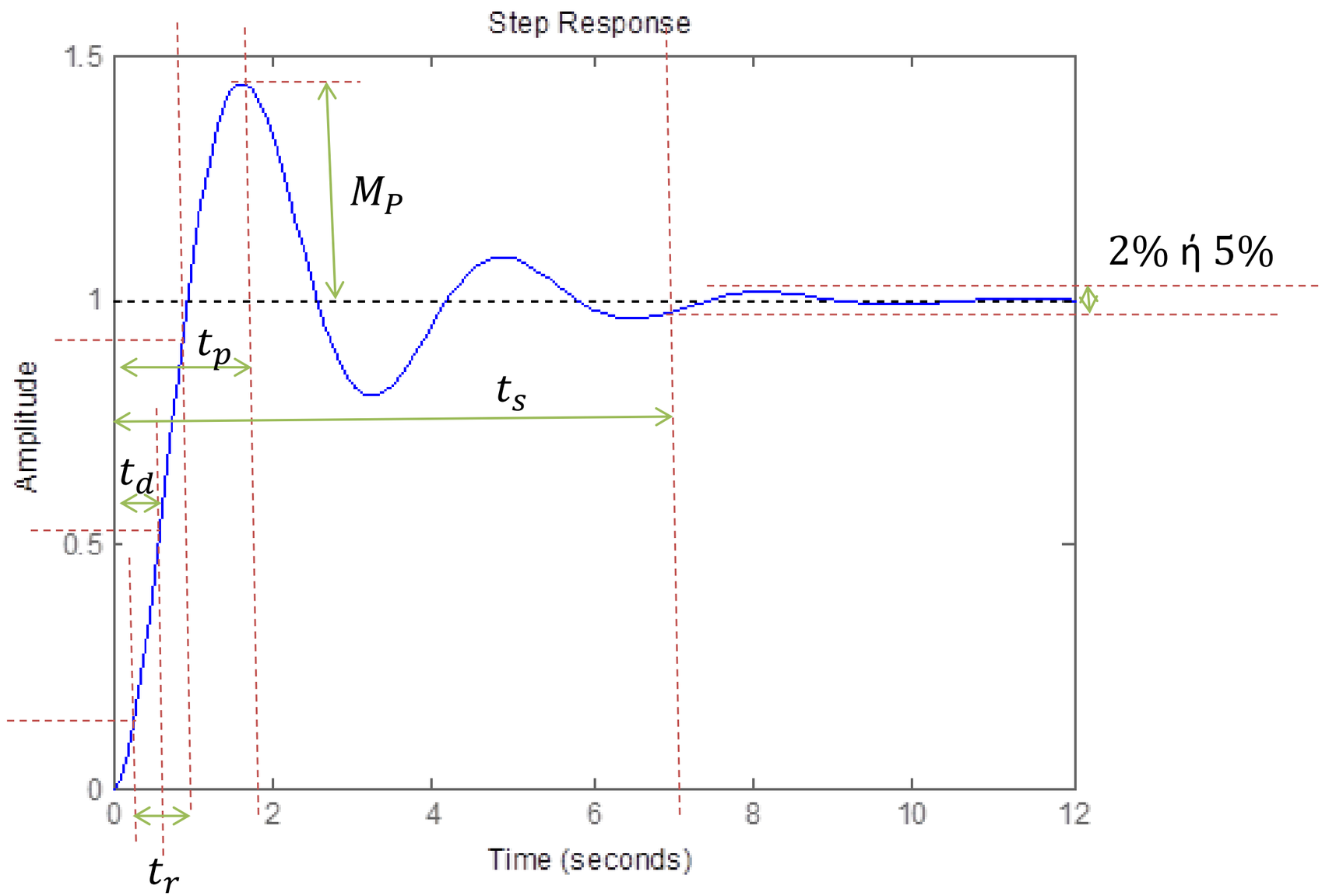




$$\zeta < -1$$



Προδιαγραφές απόκρισης μοναδιαίας βαθμίδας ($0 < \zeta < 1$)



Προδιαγραφές απόκρισης μοναδιαίας βαθμίδας ($0 < \zeta < 1$)

- Χρόνος καθυστέρησης t_d: Ο χρόνος που απαιτείται για να ανέλθει η απόκριση για πρώτη φορά, το μισό της τελικής της τιμής.
- Χρόνος ανύψωσης t_r: Ο χρόνος που απαιτείται για να ανέλθει η απόκριση από το 10% στο 90% της τελικής τιμής (5%-95% ή 0%-100%): $\mathrm{t}_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$
- Χρόνος κορυφής t_p: Ο χρόνος που απαιτείται για να ανέλθει η απόκριση στην πρώτη κορυφή της απόκρισης: $\mathrm{t}_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

Προδιαγραφές απόκρισης μοναδιαίας βαθμίδας ($0 < \zeta < 1$)

- Μέγιστη (ποσοστιαία) υπερακόντιση M_p: Η τιμή της μέγιστης κορυφής της καμπύλης απόκρισης, μετρούμενη από την μονάδα:

$$\mathrm{M}_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100\% = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} 100\%,$$

- Χρόνος αποκατάστασης t_s: Ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να φτάσει και να παραμείνει η απόκριση μέσα σε ορισμένα όρια ($\pm 2\%$ ή $\pm 5\%$) γύρω από την τελική τιμή: $\mathrm{t}_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ (2%), $\mathrm{t}_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ (5%)

Προδιαγραφές απόκρισης μοναδιαίας βαθμίδας ($\zeta \geq 1$)

- Τα συστήματα αναφοράς με υπεραπόσβεση μπορούν να περιγραφούν μόνο με τις χρονικές σταθερές.