ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 6: Γραμμικός Προγραμματισμός - Μέθοδοι Simplex

Γεώργιος Σταθάκης
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Όπως είδαμε μέχρι τώρα η γραφική μέθοδος επίλυσης παρόλο που βοηθά στην κατανόηση κάποιων εννοιών σε σχέση με την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού δεν μπορεί να επιλύσει το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού όπου οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να είναι περισσότερες από δύο. Σε ένα πραγματικό πρόβλημα οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να είναι δεκάδες, εκατοντάδες ή και χιλιάδες. Απαιτείται λοιπόν μια μέθοδος που να μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα ανεξάρτητα από το μέγεθός του.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Η μέθοδος Simplex είναι μια αλγοριθμική μέθοδος, δηλαδή αποτελείται από μια καθορισμένη σειρά επαναλαμβανόμενων διαδοχικών βημάτων αξιοποιώντας το γεγονός ότι ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι κυρτός. Ξεκινά από ένα αρχικό ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων και σε κάθε βήμα μεταβαίνει σε ένα γειτονικό σημείο με καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα διαδοχικά βήματα επαναλαμβάνονται μέχρι να εντοπιστεί η βέλτιστη λύση. Δηλαδή οι επαναλήψεις σταματούν όταν δεν υπάρχει γειτονικό σημείο που να δίνει καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Εκτός του ότι η μέθοδος Simplex δίνει πάντα την βέλτιστη λύση σε οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, παρέχει επίσης ένα πλήθος από πληροφορίες οι οποίες δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν με άλλες τεχνικές. Οι βασικότερες από αυτές τις πληροφορίες αφορούν στον τρόπο εκμετάλλευσης των πόρων όπως θα δούμε αργότερα.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Για λόγους παρουσίασης θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Simplex στο πρόβλημα μεγιστοποίησης που εξετάσαμε πριν. Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο το μοντέλο θα πρέπει να είναι σε τυποποιημένη μορφή. Τυποποιημένη μορφή ενός προβλήματος μεγιστοποίησης είναι η μορφή στην οποία όλες οι ανισότητες είναι <= και το δεξί μέλος είναι θετικός αριθμός. Αν το πρόβλημα δεν είναι σε τυποποιημένη μορφή μπορεί με κατάλληλες πράξεις να μετατραπεί σε τυποποιημένη μορφή. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης που εξετάσαμε ήταν εξ’ αρχής σε τυποποιημένη μορφή.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Στην συνέχεια θα πρέπει όλες οι ανισότητες να μετατραπούν σε ισότητες προσθέτοντας μια ακόμα μεταβλητή στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού. Το μοντέλο γίνεται:

$$\max z = 0{,}70 \cdot X_1 + 0{,}50 \cdot X_2 + 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3$$

$$\upsilon.\pi.$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + S_1 &= 440 \\ 2 \cdot X_1 + X_2 + S_2 &= 200 \\ X_1 + 2.5 \cdot X_2 + S_3 &= 200 \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές. Όταν καταλήξουμε στην βέλτιστη λύση οι τιμές των μεταβλητών αυτών θα μας δίνουν τις ποσότητες (π.χ. η S1 το χρόνο επεξεργασίας του αποχυμωτή) που δεν θα χρησιμοποιηθούν). Αν ο αντίστοιχος περιορισμός είναι ενεργός τότε η χαλαρή μεταβλητή θα έχει μηδενική τιμή. Η έννοια αυτή θα κατανοηθεί παρατηρώντας την γραφική επίλυση.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Οι εξισώσεις των περιορισμών αποτελούν ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 5 αγνώστους (τις μεταβλητές απόφασης και τις χαλαρές μεταβλητές) και προφανώς έχει άπειρες λύσεις. Όπως έχουμε δει στην πράξη η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε τομή των ευθειών δύο περιορισμών. Με το σκεπτικό αυτό στην μέθοδο Simplex αναζητούμε σημεία τομής των περιοριστικών ευθειών. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε όλα σημεία τομής που προκύπτουν και να ελέγξουμε ποια από αυτά είναι είναι εφικτά και μεταξύ των εφικτών να επιλέξουμε το βέλτιστο. Η μέθοδος Simplex όμως καταλήγει στο βέλτιστο με πολύ γρηγορότερο τρόπο. Γενικά οι λύσεις του προβλήματος διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Όσες βρίσκονται στα σημεία τομής των περιοριστικών ευθειών ονομάζονται βασικές λύσεις. Όσες από τις βασικές λύσεις ανήκουν στην εφικτή περιοχή ονομάζονται βασικές εφικτές λύσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Καθώς οι μεταβλητές (απόφασης και χαλαρές) είναι περισσότερες από τις εξισώσεις τις χωρίζουμε αυθαίρετα σε δύο ομάδες. Μια που να έχει τόσες μεταβλητές όσες και οι εξισώσεις και μια που να έχει όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές. Την πρώτη ομάδα την ονομάζουμε ομάδα βασικών μεταβλητών και την δεύτερη ομάδα ομάδα μη βασικών μεταβλητών. Αν θέσουμε τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν τότε προκύπτει ένα σύστημα με τόσες μεταβλητές όσες και οι εξισώσεις, οπότε μπορεί να λυθεί. Η λύση που προκύπτει είναι μια βασική λύση του προβλήματος. Μπορούμε π.χ. να θέσουμε τις μεταβλητές απόφασης ίσες με μηδέν οπότε προκύπτει κατευθείαν μια λύση όπου κάθε χαλαρή μεταβλητή είναι ίση με το δεξί μέλος του αντίστοιχου περιορισμού.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Θα δούμε τώρα τα βήματα της μεθόδου Simplex. Στον σύστημα των εξισώσεων που γράψαμε πριν προσθέτουμε και την αντικειμενική συνάρτηση μεταφέροντας όλο το δεξί της μέλος αριστερά. Οπότε το σύστημα γίνεται:

$$
\begin{aligned}
4\cdot X_1 + 4\cdot X_2 + S_1 \qquad\qquad &= 440\\
2\cdot X_1 + X_2 + S_2 \qquad &= 200\\
X_1 + 2.5\cdot X_2 + S_3 \quad &= 200\\
-0.7\cdot X_1 - 0.5\cdot X_2 + z &= 0
\end{aligned}
$$

Στο σύστημα αυτό το Ζ είναι πάντα μια βασική μεταβλητή. Κάθε βασική λύση του συστήματος είναι βασική μετά την αφαίρεση του Ζ.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Ξεκινάμε με την αρχική βασική εφικτή λύση. Στην λύση αυτή όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μηδέν (οπότε στο πρόβλημα δύο διαστάσεων συμπίπτει με την αρχή των αξόνων), ενώ οι χαλαρές μεταβλητές είναι ίσες με το δεξί μέλος των αντίστοιχων περιορισμών και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδέν (προφανώς αφού και οι μεταβλητές απόφασης είναι μηδέν). Η λύση αυτή είναι βασική και εφικτή και το φυσικό της νόημα είναι ότι δεν θα παραχθεί κανένα από τα δύο προϊόντα.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζουμε το πρώτο βήμα:

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	X1	X2	S1	S2	S3	Z	
S1	4	4	1	0	0	0	440
S2	2	1	0	1	0	0	200
S3	1	2.5	0	0	1	0	200
Z	-0.7	-0.5	0	0	0	1	0

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Σε κάθε επανάληψη η μέθοδος αντικαθιστά μια βασική μεταβλητή από μια μη βασική μεταβλητή. Η επιλογή της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής γίνεται με κριτήριο την βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Στην περίπτωσή μας είναι η X1 που έχει συντελεστή 0,7 στην αντικειμενική συνάρτηση. Η στήλη της εισερχόμενης μεταβλητής ονομάζεται στήλη οδηγός.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Η επιλογή της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής γίνεται με κριτήριο το πόσο πολύ περιορίζει την εισερχόμενη μεταβλητή. Επιλέγουμε αυτή που περιορίζει περισσότερο την εισερχόμενη μεταβλητή. Διαιρώντας την τελευταία στήλη με την στήλη οδηγό και επιλέγοντας το μικρότερο αποτέλεσμα προσδιορίζουμε την εξερχόμενη μεταβλητή. Στην περίπτωσή μας είναι η S_2 που δίνει αποτέλεσμα 100 (μικρότερο από το 110 και το 200). Η γραμμή της εξερχόμενης μεταβλητής ονομάζεται γραμμή οδηγός. Το κελί που είναι στο σημείο τομής της στήλης οδηγού με την γραμμή οδηγό πειρέχει το στοιχείο οδηγό. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗ ΤΗ	X1	X2	S1	S2	S3	Z		
S1	4	4	1	0	0	0	440	440/4 =110
S2	2	1	0	1	0	0	200	200/2 =100
S3	1	2.5	0	0	1	0	200	200/1 =200
Z	-0.7	-0.5	0	0	0	1	0	

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Η διαδικασία αντικατάστασης της εξερχόμενης από την εισερχόμενη μεταβλητή έχει ως εξής:

- Διαιρούμε την γραμμή οδηγό με το στοιχείο οδηγό έτσι ώστε αυτό να γίνει 1 (το βήμα παραλείπεται αν είναι ήδη 1)
- Προσθέτουμε ή αφαιρούμε την οδηγό γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές τόσες φορές όσες χρειάζεται για να μηδενιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού στήλης.

Επομένως στο παράδειγμά μας θα ξεκινήσουμε διαιρώντας την οδηγό γραμμή με το 2.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	X1	X2	S1	S2	S3	Z	
S1	4	4	1	0	0	0	440
S2	1	0.5	0	0.5	0	0	100
S3	1	2.5	0	0	1	0	200
Z	-0.7	-0.5	0	0	0	1	0

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Στην συνέχεια:

- Θα αφαιρέσουμε 4 φορές την γραμμή οδηγό από την γραμμή του πρώτου περιορισμού.
- Θα αφαιρέσουμε 1 φορά την γραμμή οδηγό απο΄την γραμμή του τρίτου περιορισμού
- Θα προσθέσουμε 0,7 φορές την γραμμή οδηγό στην τελευαταία γραμμή (της αντικειμενικής συνάρτησης)

Θα προκύψει ο επόμενος πίνακας

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	X1	X2	S1	S2	S3	Z	
S1	0	2	1	-2	0	0	40
S2	1	0.5	0	0.5	0	0	100
S3	0	2	0	-0.5	1	0	100
Z	0	-0.15	0	0.35	0	1	70

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Επαναλαμβάνουμε τώρα την διαδικασία όσες φορές χρειάζεται προκειμένου να μην υπάρχουν αρνητικοί αριθμοί στην τελευταία γραμμή. Όταν συμβεί αυτό θα έχουμε φτάσει στην βέλτιστη λύση. Ως εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγεται η X2 που αυξάνει το Z με συντελεστή 0,5. Για να προσδιορίσουμε την εξερχόμενη μεταβλητή διαιρούμε και πάλι την τελευταία στήλη με την νέα στήλη οδηγό. Το μικρότερο πηλίκο είναι το 30 και επομένως θα εισέλθει η S1

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗ ΤΗ	X1	X2	S1	S2	S3	Z		
S1	0	2	1	-2	0	0	40	40/2= 30
S2	1	0.5	0	0.5	0	0	100	100/0.5 =200
S3	0	2	0	-0.5	1	0	100	100/2= 50
Z	0	-0.15	0	0.35	0	1	70	

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

- Διαιρούμε τώρα την πρώτη γραμμή με το στοιχείο οδηγό
- Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή 0,5 φορές από την δεύτερη και 2 φορές από την τρίτη ενώ την προσθέτουμε 0,15 φορές στην τελευταία γραμμή

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	X1	X2	S1	S2	S3	Z	
S1	0	1	0.5	-1	0	0	20
S2	1	0	-0.25	1	0	0	90
S3	0	0	-1	1.5	1	0	60
Z	0	0	0.075	0.2	0	1	73

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Από τον παραπάνω πίνακα συνάγεται ότι έχουμε φτάσει στην βέλτιστη λύση αφού στην τελευταία γραμμή δεν υπάρχει αρνητικό στοιχείο.

Από την πρώτη γραμμή φαίνεται ότι X2=90.

Από την δεύτερη γραμμή φαίνεται ότι X1=20.

Από την τελευταία γραμμή φαίνεται ότι Z=73.

Καταλήξαμε επομένως στην ίδια ακριβώς λύση όπως και με την γραφική επίλυση.