ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAGD)

Ενότητα 4: Καμπύλες BSplines

Φίλιππος Αζαριάδης & Σοφία Κυρατζή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ

Θεματική Ενότητα Δ: Καμπύλες B-Splines

Καμπύλες B-Spline

- Είναι παραμετρικές καμπύλες που προκύπτουν από την ένωση επιμέρους καμπυλών (τμημάτων) με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας.
- Οι καμπύλες αυτές είναι καμπύλες σταθερού βαθμού ***k*** και ενώνονται μεταξύ τους με συνέχεια C^{k-1}.
- Ο βαθμός της συνολικής καμπύλης B-Spline είναι ***k***.
- Κάθε καμπύλη B-Spline ορίζεται από $n+1$ σημεία ελέγχου, P_0, P_1, …, P_n.
  - Το πλήθος των σημείων ελέγχου δεν εξαρτάται από τον βαθμό της καμπύλης, αρκεί να ισχύει **n+1 > k**.

Καμπύλες B-Spline

- Τα πολυωνυμικά τμήματα μίας καμπύλης B-Spline ορίζονται σε παραμετρικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$.
- Η ένωση όλων αυτών των τμημάτων είναι $[t_{min}, t_{max}]$ και δηλώνει το διάστημα ορισμού της συνολικής καμπύλης.
- Τα $\boldsymbol{t_i}$ καλούνται κόμβοι.
- Το συνολικό παραμετρικό διάστημα της καμπύλης είναι:

$$\underbrace{t_{first} \leq \dots}_{extra\ \kappa o\mu\beta o\iota} \leq t_{\min} \leq \dots \leq t_{\max} \underbrace{\leq \dots \leq t_{last}}_{extra\ \kappa o\mu\beta o\iota}$$

  - Η extra κόμβοι αριστερά και δεξιά θα εξηγηθούν παρακάτω.

Γραμμικές καμπύλες B-Spline

- Αποτελούνται από τμήματα πρώτου βαθμού (k=1) που ενώνονται μεταξύ τους με συνέχεια $C^{k-1}=C^{1-1}=C^0$.
- Κάθε τμήμα της καμπύλης ορίζεται από 2 σημεία ελέγχου.

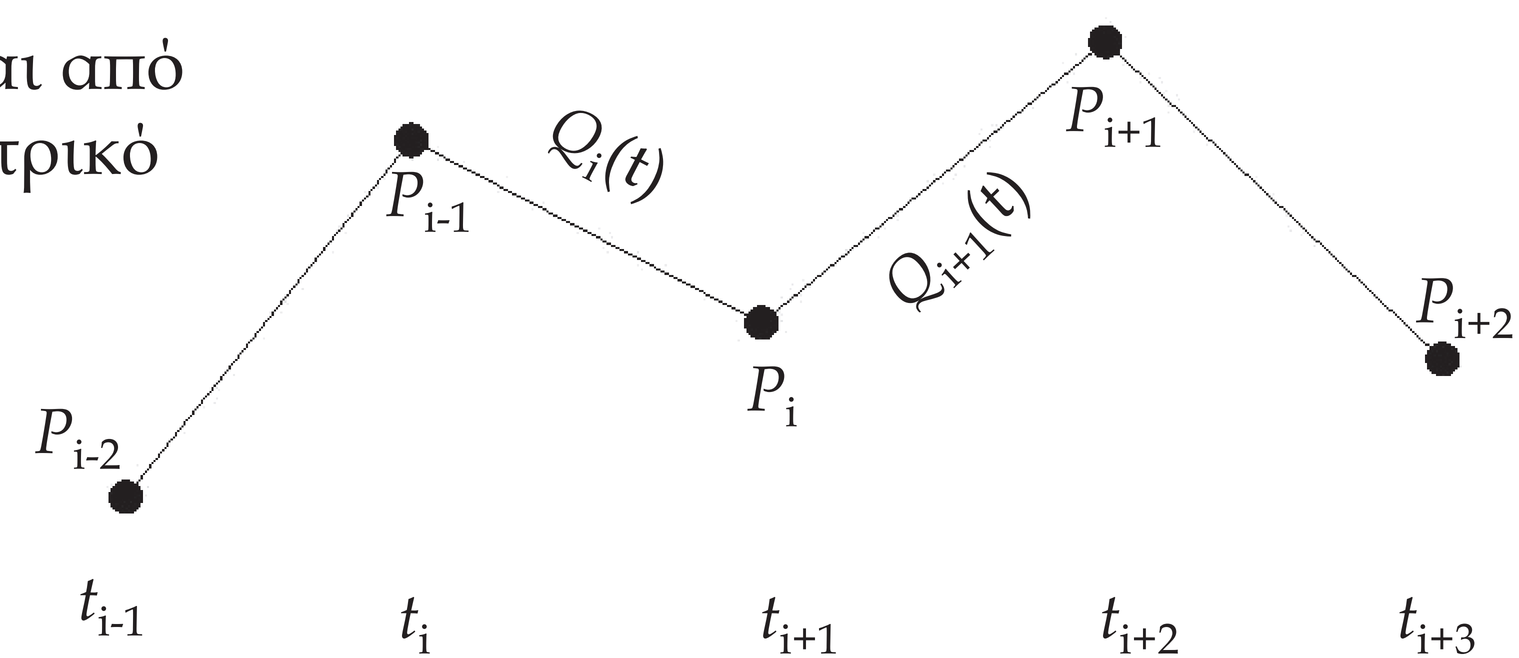
Τμήμα $Q_i(t)$:

Ορίζεται από τα σημεία P_{i-1}, P_i.

Στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Το σημείο ελέγχου P_i επηρεάζει δύο τμήματα:

- Το τμήμα $Q_i(t)$ και
- Το τμήμα $Q_{i+1}(t)$ που ορίζεται από τα σημεία P_i, P_{i+1} στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$



Γραμμικές καμπύλες B-Spline

- Το τμήμα $Q_i(t)$ γράφεται ως προς τα σημεία P_{i-1}, P_i:

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\overline{P_{i-1}} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\overline{P_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- Αντίστοιχα το τμήμα $Q_{i+1}(t)$ γράφεται ως προς τα σημεία P_i, P_{i+1}:

$$Q_{i+1}(t) = \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}\overline{P_i} + \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}}\overline{P_{i+1}}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$$

- Από τις σχέσεις αυτές υπολογίζεται η επιρροή που έχει το σημείο ελέγχου P_i στο σύνολο της καμπύλης.
  - Βλέπουμε ότι επηρεάζει την καμπύλη

όταν το t παίρνει τιμές $t \in [t_i, t_{i+2})$.

$$N_i^1(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \dfrac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}, t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0, \quad \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Γραμμικές καμπύλες B-Spline

- Η εξίσωση μίας καμπύλης B-Spline πρώτου βαθμού δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^1(t)\overline{P_i}, \quad t \in [t_1, t_{n+1}]$$

- Για να βρεθεί ένα σημείο πάνω σε μία καμπύλη B-Spline για δεδομένη τιμή του t, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τα σημεία ελέγχου της καμπύλης με την αντίστοιχη επιρροή τους (για τη δεδομένη στιγμή t) και να προσθέσουμε τα γινόμενα αυτά.
- Για κάθε τιμή του t δεν είναι όλα τα $N_i(t) \neq 0$.
- Για την ακρίβεια η επιρροή ενός σ.ε. P_i, $N_i(t) \neq 0$ για $t \in [t_i, t_{i+2})$.
- Συνεπώς για δεδομένη στιγμή $t=k \in [t_i, t_{i+1})$, πρέπει να υπολογιστούν μόνο οι επιρροές που είναι διάφορες του μηδενός σε αυτό το διάστημα:
  - Στο διάστημα $t \in [t_i, t_{i+1})$, είναι διάφορες του μηδενός οι $N_i(t)$ και $N_{i-1}(t)$.

Γραμμικές καμπύλες B-Spline

- Το πρώτο τμήμα μίας καμπύλης B-Spline πρώτου βαθμού είναι το $Q_1(t)$ και ορίζεται από τα σημεία P_0 και P_1 στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_1, t_2]$.
- Άρα το πεδίο ορισμού μίας καμπύλης B-Spline, όπως φαίνεται και από την προηγούμενη διαφάνεια, ξεκινάει από τον κόμβο $t = t_1$.
- Για να υπολογιστεί η επιρροή του σ.ε. P_0 βάσει του τύπου στη σελ. 5, έχουμε:
  - Δημιουργείται ο κόμβος t_0, ο οποίος όμως δεν έχει οριστεί.
  - Για να μπορεί να οριστεί η επιρροή $N_0^1(t)$ με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται και η επιρροή των υπόλοιπων σημείων ελέγχου, πρέπει να προστεθεί ένας ακόμη extra κόμβος στην αρχή του παραμετρικού διαστήματος.
  - Ο κόμβος αυτός καλείται πλασματικός κόμβος.
  - Το ίδιο ισχύει και για την επιρροή του τελευταίου σ.ε. P_n, όπου απαιτείται η προσθήκη ενός κόμβου t_{n+2} στο τέλος.

$$N_0^1(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0}, t \in [t_0, t_1) \\ \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, t \in [t_1, t_2) \\ 0, \quad \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

- Άρα το παραμετρικό διάστημα μίας B-Spline πρώτου βαθμού είναι μαζί με τους πλασματικούς κόμβους $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1} \leq t_{n+2}$

Τετραγωνικές καμπύλες B-Spline

- Αποτελούνται από τμήματα δευτέρου βαθμού (k=2) που ενώνονται μεταξύ τους με συνέχεια $C^{k-1}=C^{2-1}=C^1$.
- Κάθε τμήμα της καμπύλης ορίζεται από 3 σημεία ελέγχου.

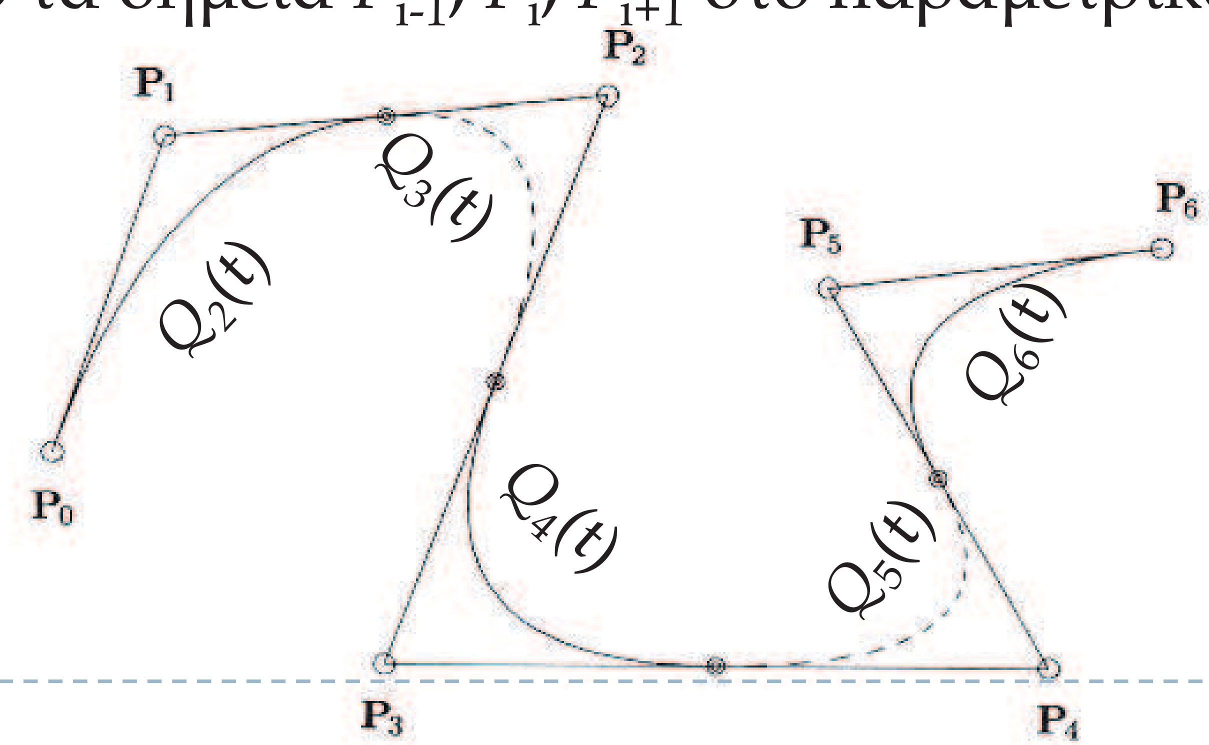
Τμήμα $Q_i(t)$: ορίζεται από τα σημεία P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Το σημείο ελέγχου P_i επηρεάζει τρία τμήματα:

• Το τμήμα $Q_i(t)$,

• Το τμήμα $Q_{i+1}(t)$ που ορίζεται από τα σημεία P_{i-1}, P_i, P_{i+1} στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$, και

• Το τμήμα $Q_{i+2}(t)$ που ορίζεται από τα σημεία P_i, P_{i+1}, P_{i+2} στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$.



Τετραγωνικές καμπύλες B-Spline

- Το τμήμα $Q_i(t)$ γράφεται ως προς τα σημεία P_{i-2}, P_{i-1}, P_i:

$$Q_i(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}}\overline{P_{i-2}} + \left(\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}\frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i-1}}\right)\overline{P_{i-1}}$$

$$+\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\overline{P_{i-2}}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

- Με αντίστοιχο τρόπο γράφονται και τα υπόλοιπα δύο τμήματα $Q_{i+1}(t)$ και $Q_{i+2}(t)$ στα οποία συμμετέχει το σημείο ελέγχου P_i.
- Οπότε η επιρροή του P_i στην καμπύλη είναι διάφορη του μηδενός για το διάστημα $t \in [t_i, t_{i+3})$, όπως φαίνεται και από τον τύπο της επιρροής:

Τετραγωνικές καμπύλες B-Spline

$$N_i^2(t) = \begin{cases} \dfrac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\dfrac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \dfrac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}\dfrac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} + \dfrac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\dfrac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ \dfrac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}}\dfrac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

- Η εξίσωση μίας καμπύλης B-Spline δευτέρου βαθμού δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^2(t)\overline{P_i}, \quad t \in [t_2, t_{n+1}]$$

- Η επιρροή ενός σ.ε. P_i, είναι $N_i(t) \neq 0$ για $t \in [t_i, t_{i+3})$.
- Στο διάστημα $t \in [t_i, t_{i+1})$, οι επιρροές που είναι διάφορες του μηδενός είναι οι:
  - $N_i(t)$, $N_{i-1}(t)$, $N_{i-2}(t)$.

Τετραγωνικές καμπύλες B-Spline

- Το πρώτο τμήμα μίας καμπύλης B-Spline δευτέρου βαθμού είναι το $Q_2(t)$ και ορίζεται από τα σημεία P_0, P_1 και P_2 στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_2, t_3]$.
- Άρα το πεδίο ορισμού μίας καμπύλης B-Spline 2ου βαθμού, όπως φαίνεται και από την προηγούμενη διαφάνεια, ξεκινάει από τον κόμβο $t = t_2$.
- Για να υπολογιστεί η επιρροή του σ.ε. P_0 βάσει του τύπου στη σελ. 10, έχουμε:
  - Δημιουργείται ο κόμβος t_0 και t_1 οι οποίοι δεν έχουν οριστεί.
  - Όπως και στις 1ου βαθμού προστίθενται δύο πλασματικοί κόμβοι στην αρχή του παραμετρικού διαστήματος.
  - Το ίδιο ισχύει και για την επιρροή του σημείου P_1, P_{n-1}, και P_n, οπότε προστίθενται 2 κόμβοι στο τέλος.
- Άρα το παραμετρικό διάστημα μίας B-Spline πρώτου βαθμού είναι μαζί με τους πλασματικούς κόμβους

$$\underbrace{t_0 \le t_1}_{\text{extra knots}} \le t_2 \le \ldots \le t_{n+1} \underbrace{\le t_{n+2} \le t_{n+3}}_{\text{extra knots}}$$

Καμπύλες B-Spline k-βαθμού

- Αποτελούνται από τμήματα βαθμού *k* που ενώνονται μεταξύ τους με συνέχεια C^{k-1}.
- Κάθε τμήμα της καμπύλης ορίζεται από k+1 σημεία ελέγχου.
- Τμήμα $Q_i(t)$: ορίζεται στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_i, t_{i+1}]$ από τα σημεία

$$\underbrace{\overline{P}_{i-k}, \overline{P}_{i-k+1}, \ldots, \overline{P}_i}_{k+1}$$

- Το σημείο ελέγχου P_i επηρεάζει k+1 τμήματα:
  - Τα τμήματα $Q_i(t)$, $Q_{i+1}(t)$, …, $Q_{i+k+1}(t)$.
- Ένα σημείο πάνω στην καμπύλη B-Spline υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\overline{P}_i, \quad t \in [t_k, t_{n+1}]$$

- Το συνολικό παραμετρικό διάστημα μίας καμπύλης k-βαθμού είναι:

$$\underbrace{t_0 \leq \ldots \leq t_{k-1}}_{\text{k extra knots}} \leq t_k \leq \ldots \leq t_{n+1} \underbrace{\leq t_{n+2} \leq \ldots \leq t_{n+k+1}}_{\text{k extra knots}}$$

Συναρτήσεις B-Spline k-βαθμού

- Η επιρροή $N_i^k(t)$ που έχει κάθε σ.ε. P_i στην καμπύλη B-Spline καλείται *συνάρτηση B-Spline* και υπολογίζεται από τον παρακάτω αναδρομικό τύπο:

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \quad \text{και} \quad N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

- Αν στην παραπάνω σχέση προκύψει $a/0$ τότε αυτό θεωρείται ίσο με 0.
- Η συνάρτηση $N_i^k(t)$ είναι πολυώνυμο βαθμού k, και ισχύει $N_i^k(t) \neq 0$ μόνο στο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_i, t_{i+k+1})$.
- Σε ένα τυχαίο παραμετρικό διάστημα $[t_i, t_{i+1})$ υπάρχουν το πολύ k+1 μη-μηδενικές συναρτήσεις B-Spline και είναι οι:

$$\underbrace{N_{i-k}^k(t), N_{i-k+1}^k(t), \ldots, N_i^k(t)}_{k+1}$$

- Ισχύει πάντα $N_i^k(t) \geq 0$.
- Για κάθε κλάδο – διάστημα $[t_i, t_{i+1})$ ισχύει $\sum_{j=i-k}^{i} N_j^k(t) = 1$.

Συναρτήσεις B-Spline k-βαθμού

- Οι συναρτήσεις B-Spline $N_i^k(t)$ (και η συνολική καμπύλη) ορίζονται στο κομβικό διάνυσμα:

$$U = \{\underbrace{t_0, \ldots, t_k}_{\text{k+1 knots}}, t_{k+1}, \ldots, t_n, \underbrace{t_{n+1}, \ldots, t_{n+k+1}}_{\text{k+1 knots}}\} = \{\underbrace{a, \ldots, a}_{\text{k+1 knots}}, t_{k+1}, \ldots, t_n, \underbrace{b, \ldots, b}_{\text{k+1 knots}}\}$$

- Οι επαναλαμβανόμενοι (ίσοι) κόμβοι στην αρχή και στο τέλος του κομβικού διαστήματος είναι k+1. Επομένως βάσει του κομβικού διαστήματος μπορεί να εξαχθεί ο βαθμός της καμπύλης k.
- Αν ένας μη πλασματικός κόμβος επαναλαμβάνεται r- φορές στο κομβικό διάνυσμα, τότε η συνέχεια της συνολικής καμπύλης είναι: $\mathbf{C}^{\mathbf{k-r}}$

- Το κομβικό διάνυσμα έχει $\boldsymbol{m}$**+1** κόμβους.
- Μία καμπύλη B-Spline έχει $\boldsymbol{n}$**+1** σημεία ελέγχου και είναι βαθμού $\boldsymbol{k}$.
- Για τα παραπάνω ισχύει η σχέση:

$$m = n + k + 1$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη B-Spline με κομβικό διάνυσμα

U={0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5}. Υπολογίστε τις μη-μηδενικές συναρτήσει B-Spline για t=5/2.

Λύση: Η καμπύλη είναι δευτέρου βαθμού καθώς στο παραμετρικό της διάστημα υπάρχουν 3 επαναλαμβανόμενοι κόμβοι στην αρχή και στο τέλος, δηλ. $k+1=3 \Rightarrow k=2$. Επίσης το κομβικό διάνυσμα αποτελείται από m+1 = 11 κόμβους. Συνεπώς ισχύει

$$m = n + k + 1 \Rightarrow n = m - k - 1 \Rightarrow n = 10 - 2 - 1 = 7$$

και η καμπύλη έχει n+1 = 8 σημεία ελέγχου.

Άρα ψάχνουμε όλες τις $N_i^2(t) \neq 0$, με i = 0,…,7, για t = 5/2.

Αρχικά πρέπει να βρεθεί το κομβικό διάστημα στο οποίο ανήκει το t=5/2 ώστε να βρούμε τις μη-μηδενικές συναρτήσεις B-Spline στο διάστημα αυτό.

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Αριθμούμε τους κόμβους του κομβικού διανύσματος

$$U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\} = \{t_0,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8,t_9,t_{10}\}$$

Το $t = {}^{5}\!/_{2} \in [2,3] = [t_4, t_5)$. Στο διάστημα αυτό υπάρχουν *k*+1=3 μη-μηδενικές συναρτήσεις B-Splines, οι $N_4^2(t)$, $N_3^2(t)$, $N_2^2(t)$.

Βάσει του αναδρομικού τύπου (σελ. 13) υπολογίζουμε την τιμή της κάθε μίας για t=5/2.

Συνάρτηση B-Spline $N_2^2(5/2)$ – Δημιουργείται το παρακάτω τρίγωνο από συναρτήσεις, και ξεκινάμε από τη βάση προς την κορυφή για τον υπολογισμό:

$$\left.\begin{matrix} N_2^2(t) & & \\ N_2^1(t) & N_3^1(t) & \\ N_2^0(t) & N_3^0(t) & N_4^0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left|\begin{matrix} N_2^2({}^{5}\!/_{2}) & & \\ N_2^1({}^{5}\!/_{2}) & N_3^1({}^{5}\!/_{2}) & \\ N_2^0({}^{5}\!/_{2}) & N_3^0({}^{5}\!/_{2}) & N_4^0({}^{5}\!/_{2}) \end{matrix}\right.$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Από τον γενικό τύπο

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι $N_2^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_2, t_3)$, η $N_3^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_3, t_4)$, και η $N_4^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_4, t_5)$. Άρα για $t=5/2 \in [t_4, t_5)$ μόνο η $N_4^0(5/2) \neq 0$.

Άρα οι μη-μηδενικές συναρτήσεις B-Spline που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμός της $N_2^2(5/2)$ είναι αυτές που φαίνονται παρακάτω:

$$\left| \begin{array}{lll} N_2^2(5/2) & & \\ N_2^1(5/2) & N_3^1(5/2) & \\ N_2^0(5/2) & N_3^0(5/2) & N_4^0(5/2) \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} N_2^2(5/2) & & \\ \xcancel{N_2^1(5/2)} & N_3^1(5/2) & \\ \xcancel{N_2^0(5/2)} & \xcancel{N_3^0(5/2)} & N_4^0(5/2) \end{array} \right.$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Για τον υπολογισμό της $N_3^1(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=3 και *k*=1:

$$N_3^1(t) = \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} N_3^0(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} N_4^0(t) \Rightarrow$$

$$N_3^1(5/2) = \frac{5/2 - 1}{2 - 1} \cancel{N_3^0(5/2)} + \frac{3 - 5/2}{3 - 2} N_4^0(5/2) \Rightarrow N_3^1(5/2) = 1/2 * N_4^0(5/2) = 1/2$$

Για τον υπολογισμό της $N_2^2(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=2 και *k*=2:

$$N_2^2(t) = \frac{t - t_2}{t_4 - t_2} N_2^1(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_3} N_3^1(t) \Rightarrow$$

$$N_2^2(5/2) = \frac{5/2 - 0}{2 - 0} \cancel{N_2^1(5/2)} + \frac{3 - 5/2}{3 - 1} N_3^1(5/2) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} \Rightarrow N_2^2(5/2) = \frac{1}{8}$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Συνάρτηση B-Spline $N_3^2(5/2)$ – Δημιουργείται το παρακάτω τρίγωνο από συναρτήσεις:

$$\left.\begin{matrix} N_3^2(t) & & \\ N_3^1(t) & N_4^1(t) & \\ N_3^0(t) & N_4^0(t) & N_5^0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left|\begin{matrix} N_3^2(5/2) & & \\ N_3^1(5/2) & N_4^1(5/2) & \\ N_3^0(5/2) & N_4^0(5/2) & N_5^0(5/2) \end{matrix}\right.$$

Από τον γενικό τύπο

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι $N_3^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_3, t_4)$, η $N_4^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_4, t_5)$, και η $N_5^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_5, t_6)$. Άρα για $t=5/2 \in [t_4, t_5)$ μόνο η $N_4^0(5/2) \neq 0$.

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Άρα οι μη-μηδενικές συναρτήσεις B-Spline που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμός της $N_3^2(5/2)$ είναι αυτές που φαίνονται παρακάτω:

$$\left|\begin{array}{lll} N_3^2(5/2) & & \\ N_3^1(5/2) & N_4^1(5/2) & \\ N_3^0(5/2) & N_4^0(5/2) & N_5^0(5/2) \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{lll} N_3^2(5/2) & & \\ N_3^1(5/2) & N_4^1(5/2) & \\ \cancel{N_3^0(5/2)} & N_4^0(5/2) & \cancel{N_5^0(5/2)} \end{array}\right.$$

Για τον υπολογισμό της $N_3^1(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=3 και *k*=1:

$$N_3^1(t) = \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} N_3^0(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} N_4^0(t) \Rightarrow$$

$$N_3^1(5/2) = \frac{5/2 - 1}{2 - 1} \cancel{N_3^0(5/2)} + \frac{3 - 5/2}{3 - 2} N_4^0(5/2) \Rightarrow N_3^1(5/2) = 1/2 * N_4^0(5/2) = 1/2$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Για τον υπολογισμό της $N_4^1(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=4 και *k*=1:

$$N_4^1(t) = \frac{t - t_4}{t_5 - t_4} N_4^0(t) + \frac{t_6 - t}{t_6 - t_5} N_5^0(t) \Rightarrow$$

$$N_4^1(5/2) = \frac{5/2 - 2}{3 - 2} N_4^0(5/2) + \frac{4 - 5/2}{4 - 3} \cancel{N_5^0(5/2)} = \frac{1}{2} 1 \Rightarrow N_4^1(5/2) = \frac{1}{2}$$

Για τον υπολογισμό της $N_3^2(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=3 και *k*=2:

$$N_3^2(t) = \frac{t - t_3}{t_5 - t_3} N_3^1(t) + \frac{t_6 - t}{t_6 - t_4} N_4^1(t) \Rightarrow$$

$$N_3^2(5/2) = \frac{5/2 - 1}{3 - 1} N_3^1(5/2) + \frac{4 - 5/2}{4 - 2} N_4^1(5/2) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Συνάρτηση B-Spline $N_4^2(5/2)$ – Δημιουργείται το παρακάτω τρίγωνο από συναρτήσεις:

$$\left.\begin{matrix} N_4^2(t) & & \\ N_4^1(t) & N_5^1(t) & \\ N_4^0(t) & N_5^0(t) & N_6^0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left| \begin{matrix} N_4^2(5/2) & & \\ N_4^1(5/2) & N_5^1(5/2) & \\ N_4^0(5/2) & N_5^0(5/2) & N_6^0(5/2) \end{matrix}\right.$$

Από τον γενικό τύπο

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι $N_4^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_4, t_5)$, η $N_5^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_5, t_6)$, και η $N_6^0(t) \neq 0$ για $t \in [t_6, t_7)$. Άρα για $t=5/2 \in [t_4, t_5)$ μόνο η $N_4^0(5/2) \neq 0$.

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Άρα οι μη-μηδενικές συναρτήσεις B-Spline που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμός της $N_3^2(5/2)$ είναι αυτές που φαίνονται παρακάτω:

$$\left| \begin{array}{lll} N_4^2(5/2) & & \\ N_4^1(5/2) & N_5^1(5/2) & \\ N_4^0(5/2) & N_5^0(5/2) & N_6^0(5/2) \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{lll} N_4^2(5/2) & & \\ N_4^1(5/2) & \xcancel{N_5^1(5/2)} & \\ N_4^0(5/2) & \xcancel{N_5^0(5/2)} & \xcancel{N_6^0(5/2)} \end{array} \right.$$

Για τον υπολογισμό της $N_4^1(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για i=4 και k=1:

$$N_4^1(t) = \frac{t - t_4}{t_5 - t_4} N_4^0(t) + \frac{t_6 - t}{t_6 - t_5} N_5^0(t) \Rightarrow$$

$$N_4^1(5/2) = \frac{5/2 - 2}{3 - 2} N_4^0(5/2) + \frac{4 - 5/2}{4 - 3} \xcancel{N_5^0(5/2)} = \frac{1}{2} 1 \Rightarrow N_4^1(5/2) = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 1: Συναρτήσεις B-Splines

Για τον υπολογισμό της $N_4^2(5/2)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=4 και *k*=2:

$$N_4^2(t) = \frac{t - t_4}{t_6 - t_4} N_4^1(t) + \frac{t_7 - t}{t_7 - t_5} N_5^1(t) \Rightarrow$$

$$N_4^2\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2} - 2}{4 - 2} N_4^1\left(\tfrac{5}{2}\right) + \frac{4 - \frac{5}{2}}{4 - 3} \cancel{N_5^1\left(\tfrac{5}{2}\right)} = \frac{1}{4}\frac{1}{2} \Rightarrow N_4^2\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Ιδιότητες καμπυλών B-Spline

- *Τοπικός Έλεγχος*: Αλλάζοντας τη θέση ενός σημείου ελέγχου επηρεάζεται το σχήμα της καμπύλης μόνο σε ένα περιορισμένο τμήμα της. Συγκεκριμένα, το σημείο ελέγχου P_i επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης που αντιστοιχεί στο διάστημα $t \in [t_i, t_{i+k+1})$, που είναι το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $N_i^k(t) \neq 0$.
- *Ισχυρή Ιδιότητα Κυρτού Περιβλήματος*: Η καμπύλη B-Spline περιέχεται μέσα στο κυρτό περίβλημα όλων των σημείων ελέγχου της. Ταυτόχρονα κάθε σημείο της καμπύλης για $t \in [t_i, t_{i+1})$, βρίσκεται μέσα στο κυρτό περίβλημα που δημιουργούν τα k+1 σημεία ελέγχου $P_{i-k}, P_{i-k-1}, \ldots, P_i$, δηλαδή τα σημεία ελέγχου για τα οποία οι συναρτήσεις $N_{i-k}^k(t), N_{i-k+1}^k(t), \ldots, N_i^k(t)$ είναι διάφορες του μηδενός στο διάστημα $[t_i, t_{i+1})$.
- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς*: Η καμπύλη B-Spline αποτελεί συσχετισμένο συνδυασμό των σημείων ελέγχου της και άρα παραμένει αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Άρα για να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός σε μία καμπύλη B-Spline αρκεί να εφαρμοστεί στα σημεία ελέγχου της.

Ιδιότητες καμπυλών B-Spline

- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς παραμέτρου*: Η καμπύλη παραμένει αναλλοίωτη αν εφαρμοστεί αλλαγή στην παράμετρο της από $t \in [0,1]$ σε $u \in [a, b]$ με $u = a + (b-a)t$.
- *Ισχυρή γραμμική ακρίβεια*: Αν τα σημεία ελέγχου μίας καμπύλης B-Spline βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, τότε η καμπύλη είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης, αν k+1 σημεία ελέγχου είναι συνευθειακά, τότε το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης είναι ευθύγραμμο τμήμα (λόγω της ισχυρής ιδιότητας του κυρτού περιβλήματος).
- *Ισχυρή ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης*: Μία επίπεδη καμπύλη B-Spline δεν μπορεί να τέμνεται από μία τυχαία ευθεία περισσότερες από όσες φορές η ευθεία τέμνει το πολύγωνο ελέγχου. Αντίστοιχα, μία μη-επίπεδη καμπύλη B-Spline δεν μπορεί να τέμνεται από μία ευθεία ή ένα επίπεδο περισσότερες φορές από όσες τέμνεται το πολύγωνο ελέγχου της. Το ίδιο ισχύει και για το πολύγωνο ελέγχου που σχηματίζεται από τα (k+1) σημεία ελέγχου.

Ιδιότητες καμπυλών B-Spline

- *Παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου*: Μία καμπύλη B-Spline παρεμβάλει τα ακραία σημεία ελέγχου της μόνο αν χρησιμοποιείται μία ανοιχτή ακολουθία κόμβων στην οποία ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος επαναλαμβάνονται *k* φορές.
- *Παράγωγος*: Η εφαπτόμενη μίας καμπύλης B-Spline βαθμού *k* είναι

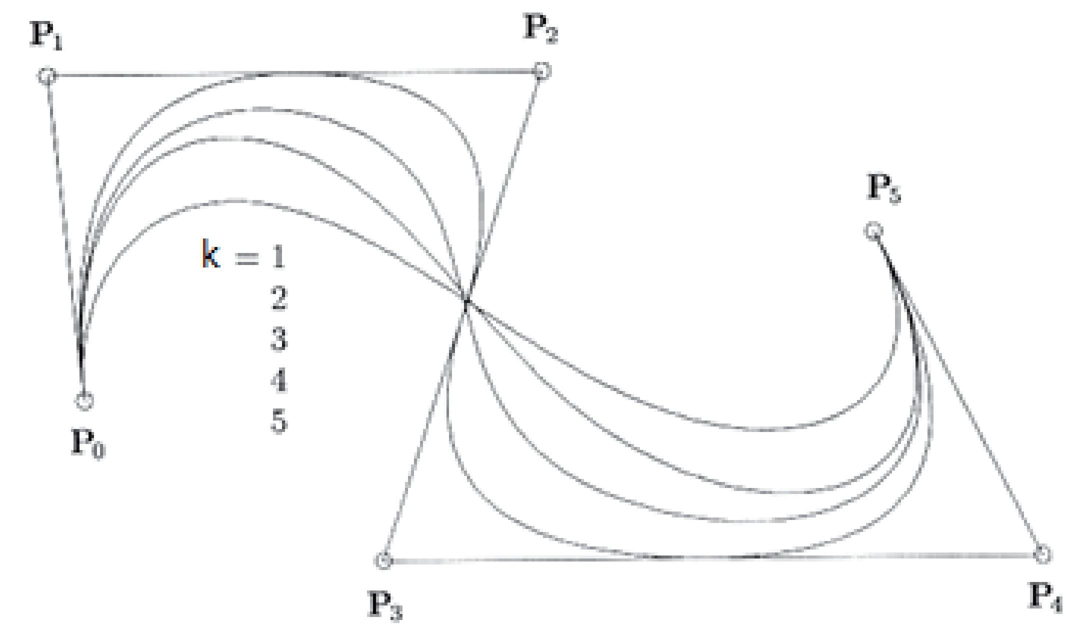
$$\frac{d}{dt}Q(t) = k\sum_{i=0}^{n-1} N_i^{k-1}(t)\frac{1}{t_{i+k-1} - t_{i+1}}(\overline{P_{i+1}} - \overline{P_i})$$

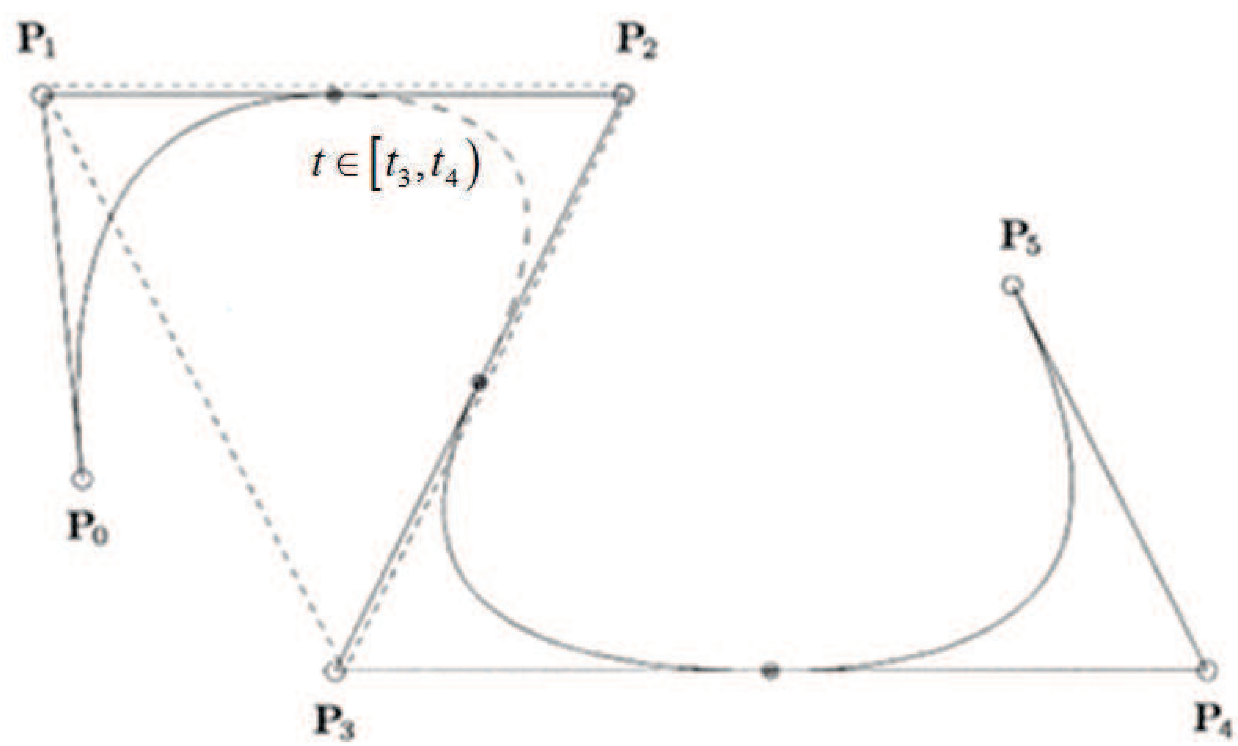
- *Γενίκευση καμπυλών Bezier*: Μία καμπύλη B-Spline βαθμού k με (k+1) σημεία ελέγχου P_0, P_1, …, P_k και παραμετρικό διάνυσμα U={0,…,0, 1, …,1} όπου οι κόμβοι 0 και 1, στην αρχή και στο τέλος, επαναλαμβάνονται *k*+1 φορές, είναι μία καμπύλη Bezier βαθμού *k* με σημεία ελέγχου τα P_0, P_1, …, P_k .

Καμπύλες B-Spline - Αναπαράσταση

- Όσο μικρότερος είναι ο βαθμός μίας καμπύλης B-Spline τόσο αυτή πλησιάζει στο πολύγωνο ελέγχου της.

(Διαφορετικού βαθμού καμπύλες ορισμένες από το ίδιο πολύγωνο ελέγχου)





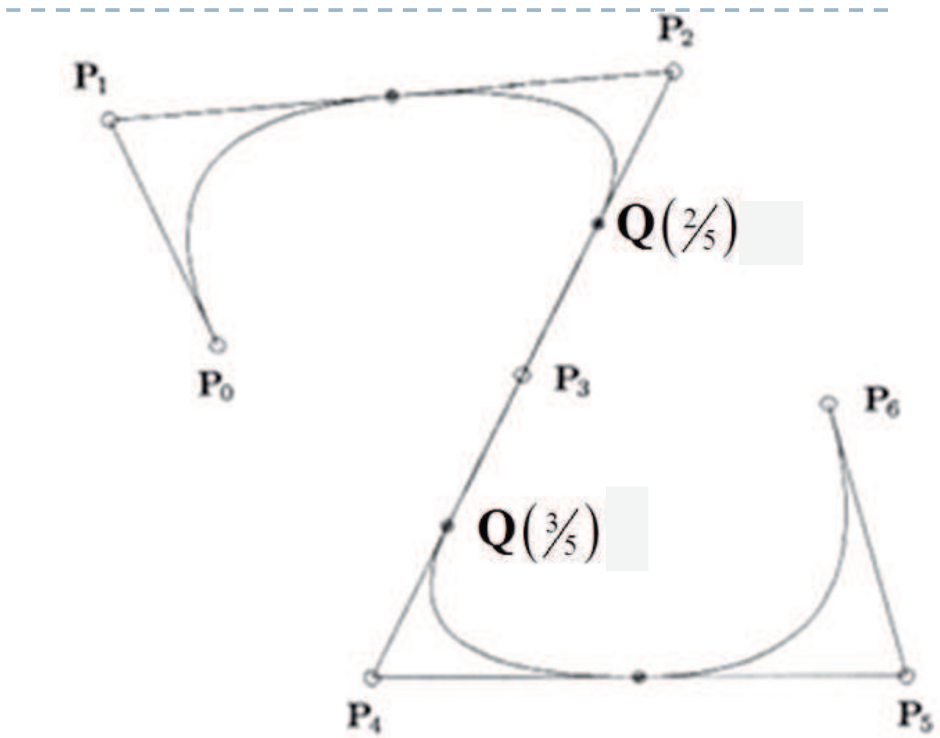
- Ιδιότητα της κυρτής περιβάλλουσας:

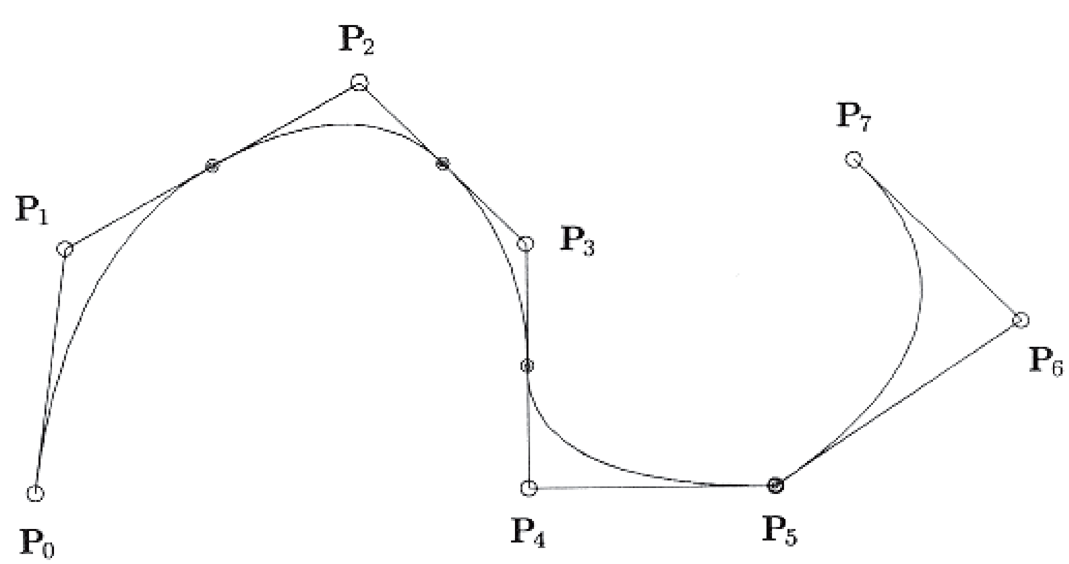
  Το τμήμα της καμπύλης για $t \in [t_3, t_4)$ (τμήμα $Q_3(t)$) περιβάλλεται από το σύνολο των σημείων ελέγχου και από το κυρτό περίβλημα που σχηματίζουν τα k+1 = 3 σημεία ελέγχου P_1, P_2, P_3.

Καμπύλες B-Spline - Αναπαράσταση

- Καμπύλη 2ου βαθμού που ορίζεται στο κομβικό διάνυσμα $U = \{0,0,0,\, {}^{1}\!/_{5},\, {}^{2}\!/_{5},\, {}^{3}\!/_{5},\, {}^{4}\!/_{5},\, 1,1,1\}$

  Επειδή τα σημεία ελέγχου P_2, P_3, P_4 είναι συνευθειακά, το τμήμα της καμπύλης μεταξύ των Q(2/5) και Q(3/5) είναι ευθύγραμμο τμήμα.





- Καμπύλη 2ου βαθμού ορισμένη στο κομβικό διάνυσμα

  $U = \{0,0,0,\, {}^{1}\!/_{5},\, {}^{2}\!/_{5},\, {}^{3}\!/_{5},\, {}^{4}\!/_{5},\, {}^{4}\!/_{5},\, 1,1,1\}$

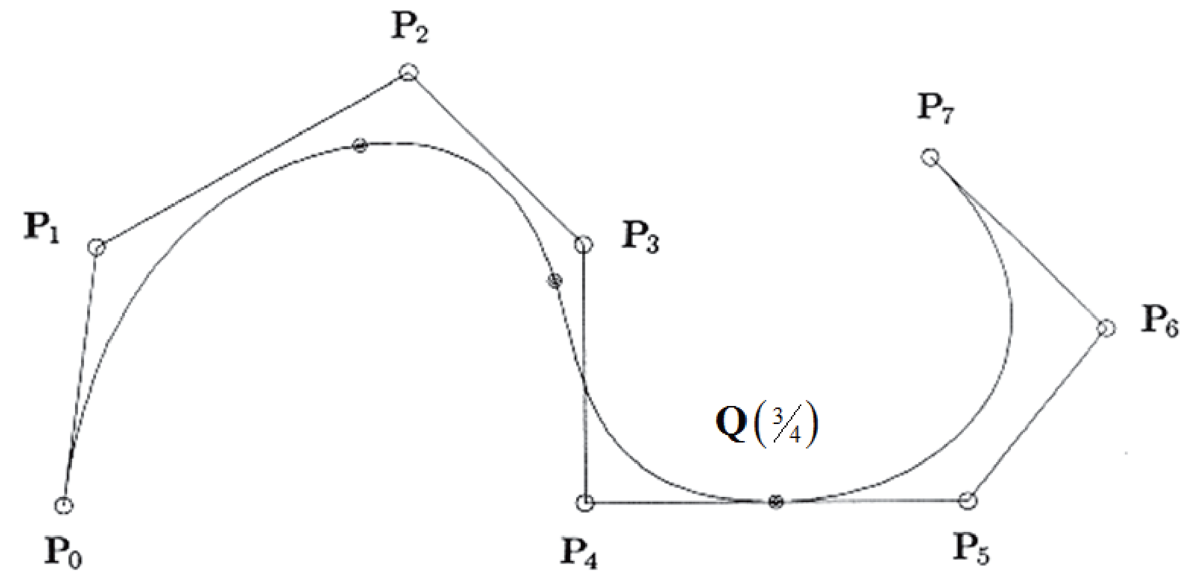
  Επειδή ο κόμβος 4/5 επαναλαμβάνεται με r=2, η συνολική συνέχεια της καμπύλης γίνεται $C^{k-r}=C^0$. Η συνέχεια αυτή συμβαίνει στο P_5.

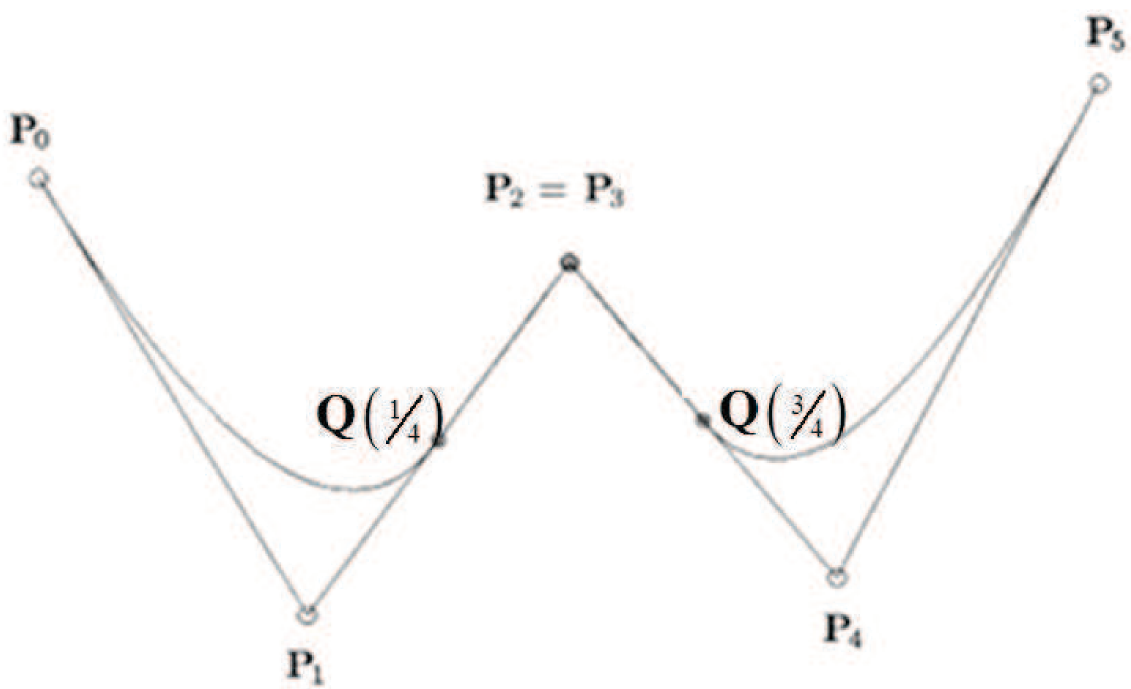
Καμπύλες B-Spline - Αναπαράσταση

- Καμπύλη 3ου βαθμού με κομβικό διάνυσμα

$$U=\{0,0,0,0,{}^{1}\!/_{4},{}^{1}\!/_{2},{}^{3}\!/_{4},{}^{3}\!/_{4},1,1,1,1\}$$

Επειδή ο κόμβος 3/4 επαναλαμβάνεται με r=2, η συνολική συνέχεια της καμπύλης γίνεται $C^{k-r}=C^1$. Αυτό φαίνεται στο Q(3/4) μεταξύ των σ.ε. P_4 και P_5, όπου η καμπύλη ακουμπάει στο πολύγωνο ελέγχου.





Καμπύλη 2ου βαθμού ορισμένη στο κομβικό διάνυσμα

$$U=\{0,0,0,{}^{1}\!/_{4},{}^{1}\!/_{2},{}^{3}\!/_{4},1,1,1\}$$

Παρόλο που δεν υπάρχει επαναλαμβανόμενος εσωτερικός κόμβος η καμπύλη σχηματίζει γωνία στα σ.ε. P_2, P_3. Αυτό συμβαίνει όταν $P_2=P_3$.

Παραμετροποιήσεις

- *Ομοιόμορφη παραμετροποίηση*. Είναι η πιο απλή μορφή παραμετροποίησης, όπου οι κόμβοι ισαπέχουν.

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1,\ldots,k \\ i-k, & i = k+1,\ldots,n \\ n-k+1, & i = n+1,\ldots,n+k+1 \end{cases}$$

- *Παραμετροποίηση μήκους χορδής*. Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες με τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων ελέγχου:

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1,\ldots,k \\ t_{i-1} + \left|\overline{P_{i-k}} - \overline{P_{i-k-1}}\right|, & i = k+1,\ldots,n \\ \sum_{j=0}^{n-k} \left|\overline{P_{j+1}} - \overline{P_j}\right|, & i = n+1,\ldots,n+k+1 \end{cases}$$

Παραμετροποιήσεις

- *Κεντρομόλος*. Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας των αποστάσεων μεταξύ των αντίστοιχων σημείων ελέγχου:

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1,\ldots,k \\ t_{i-1} + \sqrt{\left|\overline{P_{i-k}} - \overline{P_{i-k-1}}\right|}, & i = k+1,\ldots,n \\ \sum_{j=0}^{n-k} \sqrt{\left|\overline{P_{j+1}} - \overline{P_j}\right|}, & i = n+1,\ldots,n+k+1 \end{cases}$$

- Στις παραπάνω παραμετροποιήσεις θεωρείται ότι οι πλασματικοί κόμβοι επαναλαμβάνονται στην αρχή και το τέλος του κομβικού διανύσματος.
- Η παραμετροποίηση μήκους χορδής και κεντρομόλος δεν διατηρούνται σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς και σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς παραμέτρου.

Άσκηση 2: Καμπύλη B-Spline

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη B-Spline που ορίζεται στο κομβικό διάνυσμα U={0,0,0,1,2,2,3,3,3}.

(α) Ποιος είναι ο βαθμός της καμπύλης;

(β) Πόσα σημεία ελέγχου έχει η καμπύλη;

(γ) Ποιος είναι ο βαθμός της παραμετρικής συνέχειας της καμπύλης;

(δ) Να υπολογιστεί η B-Splines συνάρτηση $N_2^2(t)$.

Λύση: (α) Η καμπύλη είναι δευτέρου βαθμού καθώς στο παραμετρικό της διάστημα υπάρχουν 3 επαναλαμβανόμενοι κόμβοι στην αρχή και στο τέλος, δηλ. $k+1=3 \Rightarrow k=2$.

(β) Για τον αριθμό των σημείων ελέγχου χρησιμοποιούμε τον τύπο m=n+k+1. Το κομβικό διάνυσμα αποτελείται από m+1 = 9 κόμβους, άρα m=8, το k=2, επομένως:

$$m = n + k + 1 \Rightarrow n = m - k - 1 \Rightarrow n = 8 - 2 - 1 = 5$$

Συνεπώς η καμπύλη έχει n+1 = 5+1 = 6 σημεία ελέγχου.

Άσκηση 2: Καμπύλη B-Spline

(γ) Γενικά μία καμπύλη 2ου βαθμού έχει παραμετρική συνέχεια C^1, όταν οι πραγματικοί κόμβοι του κομβικού διανύσματος εμφανίζονται μία φορά σε αυτό. Όταν ένας κόμβος επαναλαμβάνεται *r* – φορές, τότε η συνέχεια της καμπύλης είναι C^{k-r}. Στο κομβικό διάνυσμα της καμπύλης, ο κόμβος 2 επαναλαμβάνεται *r*=2 φορές, οπότε και η συνέχεια της καμπύλη γίνεται $C^{2-2}= C^0$.

(δ) Το κομβικό διάνυσμα αριθμείται ως εξής:

$$\mathrm{U} = \{0,0,0,1,2,2,3,3,3\} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8\}$$

Στη συνέχεια σχηματίζεται η ιεραρχία των συναρτήσεων B-Spline που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της $N_2^2(t)$ (βάσει του αναδρομικού τύπου στη σελ. 13):

$$N_2^2(t)$$

$$N_2^1(t) \quad N_3^1(t)$$

$$N_2^0(t) \quad N_3^0(t) \quad \cancel{N_4^0(t)}$$

Η συνάρτηση $N_4^0(t) = 0$ αφού δεν μπορεί να οριστεί καθώς το διάστημα $[t_4, t_5) = [2, 2)$.

Άσκηση 2: Καμπύλη B-Spline

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις ισχύει:

$$N_2^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_2, t_3) = [0,1) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \qquad \text{και} \qquad N_3^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_3, t_4) = [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της $N_2^1(t)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για i=2 και k=1:

$$N_2^1(t) = \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} N_2^0(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_3} N_3^0(t) = \frac{t-0}{1-0} N_2^0(t) + \frac{2-t}{2-1} N_3^0(t) =$$

$$= t \begin{cases} 1, & t \in [0,1) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} + (2-t) \begin{cases} 1, & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} = \begin{cases} t, & t \in [0,1) \\ 2-t, & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Άσκηση 2: Καμπύλη B-Spline

Για τον υπολογισμό της $N_3^1(t)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=3 και *k*=1:

$$N_3^1(t) = \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} N_3^0(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} N_4^0(t) = \frac{t-1}{2-1} N_3^0(t) =$$

$$= (t-1)\begin{cases} 1, & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} = \begin{cases} t-1, & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της $N_2^2(t)$ χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος της σελ. 13 για *i*=2 και *k*=2:

$$N_2^2(t) = \frac{t - t_2}{t_4 - t_2} N_2^1(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_3} N_3^1(t) = \frac{t-0}{2-0} N_2^1(t) + \frac{2-t}{2-1} N_3^1(t) =$$

$$= \frac{t}{2}\begin{cases} t, & t \in [0,1) \\ 2-t, & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} + (2-t)\begin{cases} t-1, & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \in [0,1) \\ (2-t)(\frac{3t}{2} - 1), & t \in [1,2) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Άσκηση 3: Καμπύλη B-Spline

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη B-Spline 4ου βαθμού η οποία ορίζεται από τα σημεία ελέγχου

$\overline{P_0}(0,0), \overline{P_1}(10,0), \overline{P_2}(10,10), \overline{P_3}(30,10), \overline{P_4}(30,30), \overline{P_5}(60,30), \overline{P_6}(60,10),$
$\overline{P_7}(80,10), \overline{P_8}(80,0), \overline{P_9}(90,0)$

(α) Να υπολογιστεί το αντίστοιχο κομβικό διάνυσμα χρησιμοποιώντας παραμετροποίηση μήκους χορδής. Να συμπεριληφθούν οι πλασματικοί κόμβοι και να επαληθευτεί το τελικό πλήθος των κόμβων.

(β) Ποιες είναι οι κυρτές περιβάλλουσες του τμήματος που ορίζεται στο παραμετρικό διάστημα $[t_7, t_8)$; Ποιο τμήμα της καμπύλης θα επηρεαστεί από την μετακίνηση του σημείου P_5;

(γ) Ποιες είναι οι απαραίτητες μη-ταυτοτικά μηδενικές συναρτήσεις B-Splines που απαιτούνται για τον υπολογισμό της συνάρτησης $N_7^4(t)$;

Άσκηση 3: Καμπύλη B-Spline

Λύση: (α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός της καμπύλης είναι k=4. Επίσης, έχουμε συνολικά 10 σημεία ελέγχου, άρα είναι n+1=10 και n=9.

Για την παραμετροποίηση χρησιμοποιούμε τη σχέση που δίνει το κομβικό διάνυσμα μήκους χορδής, για τα παραπάνω δεδομένα:

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1,\ldots,4 \\ t_{i-1} + \left|\overline{P_{i-k}} - \overline{P_{i-k-1}}\right|, & i = 5,\ldots,9 \\ \sum_{j=0}^{5} \left|\overline{P_{j+1}} - \overline{P_{j}}\right|, & i = 10,\ldots,14 \end{cases}$$

Επομένως έχουμε για i=1,…,4: $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$

Για i=5,…,9 έχουμε βάσει του τύπου

$$t_i = t_{i-1} + \left|\overline{P_{i-k}} - \overline{P_{i-k-1}}\right|$$

Άσκηση 3: Καμπύλη B-Spline

$$t_5 = t_4 + \left|\overline{P_1} - \overline{P_0}\right| = 0 + \left\|\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}\right\| = 10$$

$$t_6 = t_5 + \left|\overline{P_2} - \overline{P_1}\right| = 10 + \left\|\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}\right\| = 10 + \left\|\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}\right\| = 10 + 10 = 20$$

$$t_7 = t_6 + \left|\overline{P_3} - \overline{P_2}\right| = 20 + \left\|\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}\right\| = 20 + \left\|\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}\right\| = 20 + 20 = 40$$

$$t_8 = t_7 + \left|\overline{P_4} - \overline{P_3}\right| = 40 + \left\|\begin{bmatrix}30\\30\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}\right\| = 40 + \left\|\begin{bmatrix}0\\20\end{bmatrix}\right\| = 40 + 20 = 60$$

$$t_9 = t_8 + \left|\overline{P_5} - \overline{P_4}\right| = 60 + \left\|\begin{bmatrix}60\\30\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}30\\30\end{bmatrix}\right\| = 60 + \left\|\begin{bmatrix}30\\0\end{bmatrix}\right\| = 60 + 30 = 90$$

Για *i*=10,…,14 υπολογίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{j=0}^{5}\left|\overline{P_{j+1}} - \overline{P_j}\right| = \left|\overline{P_1} - \overline{P_0}\right| + \left|\overline{P_2} - \overline{P_1}\right| + \left|\overline{P_3} - \overline{P_2}\right| + \left|\overline{P_4} - \overline{P_3}\right| + \left|\overline{P_5} - \overline{P_4}\right| + \left|\overline{P_6} - \overline{P_5}\right|$$

$$= 10 + 10 + 20 + 20 + 30 + 20 = 110$$

Άσκηση 3: Καμπύλη B-Spline

Επομένως έχουμε για i=10,…,14: $t_{10} = t_{11} = t_{12} = t_{13} = t_{14} = 110$

Επιβεβαιώνουμε ότι ισχύει $m = n+k+1 = 9+4+1=14$. Επομένως έχουμε $m+1=15$, όπως συμβαίνει.

(β) Το τμήμα της καμπύλης που ορίζεται στο παραμετρικό διάστημα $[t_7, t_8)$ ανήκει ταυτόχρονα σε δύο κυρτές περιβάλλουσες.

Η πρώτη ορίζεται από όλα τα σημεία ελέγχου της καμπύλης.

Η δεύτερη ορίζεται από τα σημεία ελέγχου που είναι υπεύθυνα για τον σχηματισμό του τμήματος στο διάστημα $[t_7, t_8)$, δηλαδή από τα σημεία που η συνάρτηση βάσης τους $N_i^4(t)$ είναι διάφορη του μηδενός στο διάστημα αυτό. Στο διάστημα $[t_7, t_8)$ υπάρχουν $k+1 = 5$ συναρτήσεις βάσεις διάφορες του μηδενός: η $N_3^4(t)$, $N_4^4(t)$, $N_5^4(t)$, $N_6^4(t)$, και η $N_7^4(t)$.

Άρα το τμήμα της καμπύλης μεταξύ $[t_7, t_8)$ περιβάλλεται από το κυρτό πολύγωνο που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου P_3, P_4, P_5, P_6, και P_7.

Η μετακίνηση του σημείου ελέγχου P_5 επηρεάζει το τμήμα της καμπύλης που ορίζεται στο διάστημα $[t_i, t_{i+k+1}) = [t_7, t_8)$. Είναι το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση βάσης $N_5^4(t) \neq 0$.

Άσκηση 3: Καμπύλη B-Spline

(γ) Το κομβικό διάνυσμα της καμπύλης, όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα (α) είναι:

$$U = \{0,0,0,0,0,10,20,40,60,90,110,110,110,110,110\}$$
$$= \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}\}$$

Για τον υπολογισμός της $N_7^4(t)$ χρησιμοποιούμε την ιεραρχία των συναρτήσεων βάσης όπως προκύπτουν από την αναδρομική σχέση της σελ. 13.

$$N_7^4(t)$$
$$N_7^3(t) \quad N_8^3(t)$$
$$N_7^2(t) \quad N_8^2(t) \quad N_9^2(t)$$
$$N_7^1(t) \quad N_8^1(t) \quad N_9^1(t) \quad \xcancel{N_{10}^1(t)}$$
$$N_7^0(t) \quad N_8^0(t) \quad N_9^0(t) \quad \xcancel{N_{10}^0(t)} \quad \xcancel{N_{11}^0(t)}$$

Επειδή η $N_{10}^0(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[t_{10}, t_{11}) = [110, 110)$, είναι $N_{10}^0(t) = 0$.
Αντίστοιχα, η $N_{11}^0(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[t_{11}, t_{12}) = [110, 110)$, είναι επίσης $N_{11}^0(t) = 0$.
Άρα και η $N_{10}^1(t) = 0$ αφού προκύπτει από τις δύο προηγούμενες.
Όλες οι υπόλοιπες συναρτήσεις είναι ταυτοτικά μη μηδενικές και χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της $N_7^4(t)$.

Άσκηση 4: Καμπύλη B-Spline

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη B-Spline με κομβικό διάνυσμα U = {0,0,0,1,1,1}.

(α) Ποιος είναι ο βαθμός της καμπύλης; Πόσα σημεία ελέγχου έχει η καμπύλη;

(β) Υπολογίστε όλες τις ταυτοτικά μη – μηδενικές συναρτήσεις βάσεις της καμπύλης.

(*Σημ.*: Προφανώς είναι όσες ορίζονται στο διάστημα [0,1) = [t_2, t_3).)

Άσκηση 5: Καμπύλη B-Spline

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη B-Spline με κομβικό διάνυσμα

U = {0,0,0,1,2,2,3,3,3}.

(α) Ποιος είναι ο βαθμός της καμπύλης; Πόσα σημεία ελέγχου έχει η καμπύλη; Ποιος είναι ο βαθμός συνέχειας της καμπύλης;

(β) Να υπολογιστεί αναλυτικά η συνάρτηση B-Spline $N_3^2(t)$.

(γ) Να υπολογιστεί η συνάρτηση B-Spline $N_2^2(t)$, για t=0.5.

Άσκηση 6: Καμπύλη B-Spline

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη B-Spline με κομβικό διάνυσμα

$$U = \{0,0,0,0,\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},1,1,1,1\}$$

(α) Ποιος είναι ο βαθμός της καμπύλης; Πόσα σημεία ελέγχου έχει η καμπύλη;

(β) Θεωρώντας πως τα σημεία ελέγχου της καμπύλης είναι τυχαία και πως δεν ισχύει καμία ιδιαίτερη συνθήκη για αυτά εκτός ότι $P_i \neq P_j$, για $i \neq j$, ποιος είναι ο βαθμός συνέχειας της καμπύλης;

(γ) Ποιο τμήμα της καμπύλης επηρεάζει το σημείο ελέγχου P_2 και ποιο το P_5;

(δ) Ποια σημεία ελέγχου επηρεάζουν την καμπύλη στο παραμετρικό διάστημα $t \in [\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2})$; Ομοίως για το $t \in [\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4})$.

Βιβλιογραφία

- Γραφικά και Οπτικοποίηση – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Γ. Παπαϊωάννου, Ν. Πλατής, Ν. Μ. Πατρικαλάκης, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2010.
- Γραφικά – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Α. Μπεμ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999.
- «Σημειώσεις στη Σχεδίαση με Η/Υ», Φ. Αζαριάδης-Τοπάλογλου, 2013-2014.
- Συστήματα CAM/CAD και Τρισδιάστατη Μοντελοποίηση, Ν. Μπιλάλης, Ε. Μαραβελάκης, Εκδόσεις Κριτική, 2014.
- The NURBS Book, Les Piegl and Wayne Tiller, Springer-Verlag Berlin Heidelberg,1997.