ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAGD)

Ενότητα 3: Καμπύλες Hermite

Φίλιππος Αζαριάδης & Σοφία Κυρατζή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

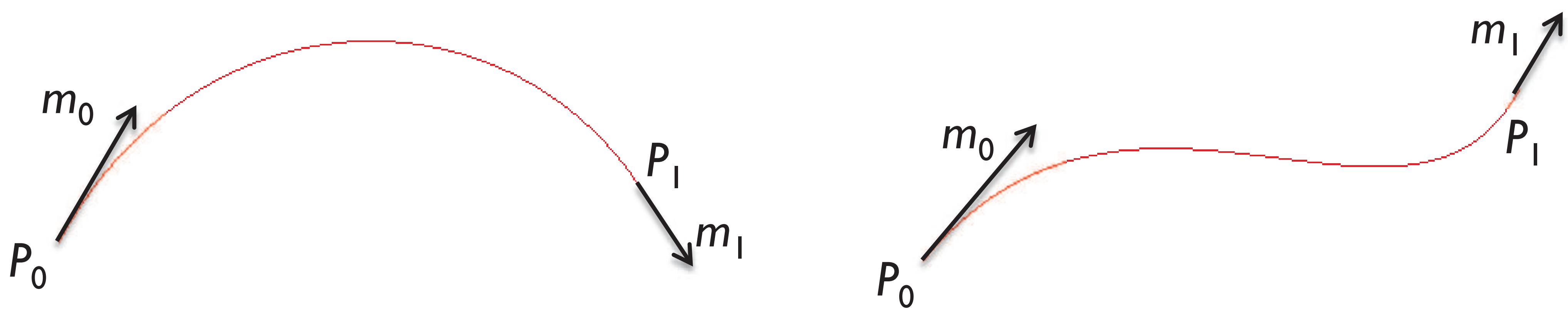
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ

Θεματική Ενότητα Γ: Καμπύλες Παρεμβολής Hermite

Καμπύλες Παρεμβολής Hermite

- Είναι παραμετρικές καμπύλες που παρεμβάλουν δύο σημεία P_0 και P_1 και τα εφαπτόμενα σε αυτά διανύσματα m_0 και m_1.



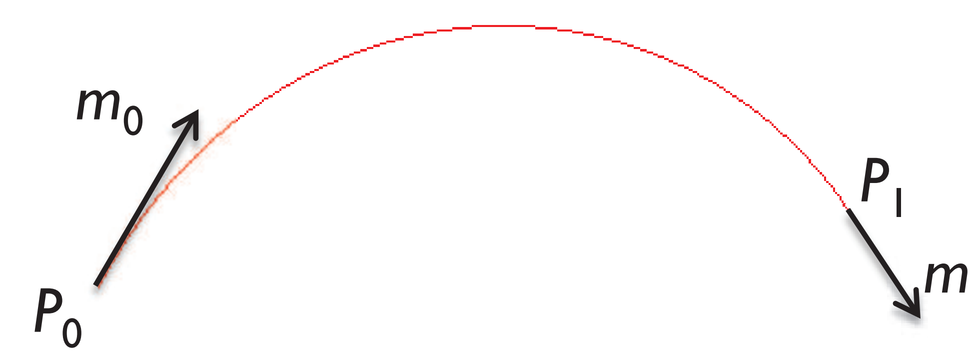
- Η εξίσωση μία καμπύλης Hermite 3ου βαθμού προκύπτει αν το παραπάνω πρόβλημα λυθεί κατασκευάζοντας μία καμπύλη Bezier 3ου βαθμού.

Καμπύλες Παρεμβολής Hermite

- Ο παρακάτω τύπος δίνει σημεία πάνω σε μία καμπύλη Hermite, που ορίζεται μεταξύ δύο σημείων P_0 και P_1 και των εφαπτόμενων σε αυτά διανυσμάτων m_0 και m_1, στο παραμετρικό διάστημα t∈[0,1]:

$$P(t) = H_0^3(t)\overline{P_0} + H_1^3(t)\overline{m_0} + H_2^3(t)\overline{m_1} + H_3^3(t)\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) &= t^2 - t^3 \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

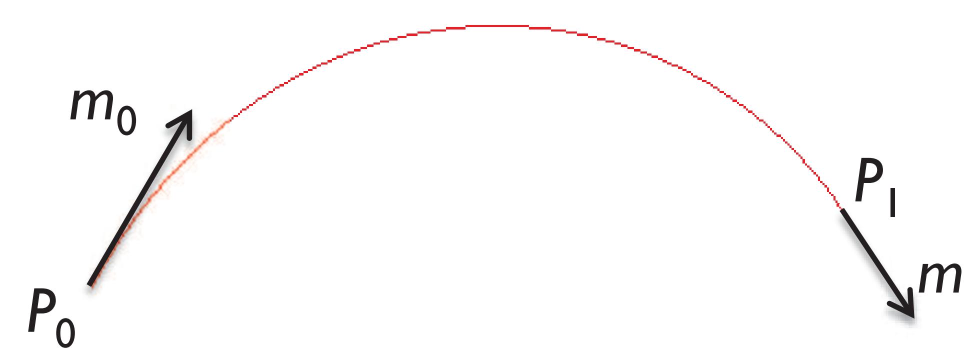


Καμπύλες Παρεμβολής Hermite

- Ο παρακάτω τύπος δίνει σημεία πάνω σε μία καμπύλη Hermite, που ορίζεται μεταξύ δύο σημείων P_0 και P_1 και των εφαπτόμενων σε αυτά διανυσμάτων m_0 και m_1, στο παραμετρικό διάστημα t∈[0,1]:

$$P(t) = H_0^3(t)\overline{P_0} + H_1^3(t)m_0 + H_2^3(t)m_1 + H_3^3(t)\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) &= t^2 - t^3 \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$



Άσκηση 1: Καμπύλη Hermite

Εκφώνηση:

(α) Υπολογίστε καμπύλη Hermite 3ου βαθμού που να διέρχεται από τα σημεία $P_0(0,0)$, $P_1(3,0)$, με εφαπτόμενες σε αυτά $m_0(1, 1)$ και $m_1(3, -1)$.

(β) Ποιο είναι το σημείο της καμπύλης για t=1/3.

Λύση: (α) Χρησιμοποιούμε το τύπο της καμπύλης Hermite με:

$$P(t) = H_0^3(t)\overline{P_0} + H_1^3(t)m_0 + H_2^3(t)m_1 + H_3^3(t)\overline{P_1} \Rightarrow$$

$$P(t) = H_0^3(t)\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + H_1^3(t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + H_2^3(t)\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} + H_3^3(t)\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) &= t^3 - t^2 \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

Άσκηση 1: Καμπύλη Hermite

(β) Για να υπολογιστεί το σημείο της καμπύλης για t=1/3 αντικαθιστούμε στο τύπο όπου t=1/3 :

$$P(1/3) = H_0^3(1/3)\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + H_1^3(1/3)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + H_2^3(1/3)\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} + H_3^3(1/3)\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
H_0^3(1/3) &= 2(1/3)^3 - 3(1/3)^2 + 1 = 20/27\\
H_1^3(1/3) &= (1/3)^3 - 2(1/3)^2 + t = 4/27\\
H_2^3(1/3) &= (1/3)^3 - (1/3)^2 = -2/27\\
H_3^3(1/3) &= -2(1/3)^3 + 3(1/3)^2 = 7/27
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P(1/3) = 20/27\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + 4/27\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + -2/27\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} + 7/27\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19/27\\6/27\end{bmatrix}$$

Άσκηση 2: Καμπύλη Hermite

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Υπολογίστε καμπύλη Hermite 3ου βαθμού που παρεμβάλει την καμπύλη $y=x^2$, για $x\in[0, 1]$, στα άκρα και τις εφαπτόμενες σε αυτά. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα.

(Πρέπει να γράψετε την αναλυτική μορφή της καμπύλης $y=x^2$ ως παραμετρική για να μπορέσετε να βρείτε τα σημεία από τα οποία διέρχεται η Hermite και τις εφαπτόμενες σε αυτά)

Καμπύλη Παρεμβολή Hermite σε τυχαίο διάστημα [a, b]

- Ο μαθηματικός τύπος που δίνει σημεία πάνω σε μία καμπύλη Hermite ορισμένη σε τυχαίο παραμετρικό διάστημα u ∈[a, b] διαφορετικό του t∈[0,1] είναι:

$$P(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_0} + \widehat{H_1^3(u)}m_0 + \widehat{H_2^3(u)}m_1 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{H_0^3(u)} &= H_0^3(t)\\ \widehat{H_1^3(u)} &= (b-a)H_1^3(t)\\ \widehat{H_2^3(u)} &= (b-a)H_2^3(t)\\ \widehat{H_3^3(u)} &= H_3^3(t)\end{aligned}\right\} u \in [a,b], t = \frac{u-a}{b-a} \quad \kappa\alpha\iota \quad \left.\begin{aligned}H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1\\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t\\ H_2^3(t) &= t^3 - t^2\\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2\end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

Κατά τμήματα καμπύλη Hermite

- Έστω n+1 σημεία P_0, P_1, P_2, …, P_n και οι εφαπτόμενες σε αυτά m_0, m_1, m_2, …, m_n .
- Για να υπολογιστεί καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά με την κλίση που δηλώνουν οι εφαπτόμενες τους μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία *κυβική καμπύλη Hermite ορισμένη κατά τμήματα*:
- Η συνολική καμπύλη $P(u)$ ορίζεται στο διάστημα $u \in [t_0, t_n]$.
- Το τμήμα $P_i(u)$ με $u \in [t_i, t_{i+1}]$, παρεμβάλει τα σημεία P_i, P_{i+1} και τις εφαπτόμενες m_i και m_{i+1} και δίνεται από τη σχέση

$$P_i(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_i} + \widehat{H_1^3(u)}m_i + \widehat{H_2^3(u)}m_i + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_i}$$

- Επειδή το διάστημα $u \in [t_i, t_{i+1}]$ είναι διαφορετικό του [0, 1], ισχύει ο τύπος της σελ. 8 για καμπύλη Hermite σε τυχαίο διάστημα [a, b] με

$$t = \frac{u - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Παραμετροποιήσεις

- *Ομοιόμορφη παραμετροποίηση*:

$$t_0 = k, \quad \Delta t = m, \; \kappa\alpha\iota \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t \; \mu\varepsilon \; i = 0, \ldots, n-1$$

- *Παραμετροποίηση μήκους χορδής*: Σε αυτή την παραμετροποίηση οι κόμβοι υπολογίζονται συναρτήσει των σημείων παρεμβολής, και συνεπώς η παραμετροποίηση αλλάζει αν αλλάξουν τα σημεία από τα οποία διέρχεται η καμπύλη.

$$t_0 = k, \; \kappa\alpha\iota \; t_{i+1} = t_i + \left\| P_{i+1} - P_i \right\| \; \mu\varepsilon \; i = 0, \ldots, n-1$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Εκφώνηση:

(α) Υπολογίστε με την μέθοδο της κατά τμήματα παρεμβολής Hermite καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $P_0(0, 0)$, $P_1(3, 2)$, $P_2(6, 1)$ και $P_3(10, 2)$ και τις εφαπτόμενες σε αυτά $m_0(1, 1)$, $m_1(2, 1)$, $m_2(1, 0)$ και $m_3(1, -1)$. Χρησιμοποιήστε ομοιόμορφη παραμετροποίηση με $t_0=0$ και $\Delta t = 1$, για να υπολογίσετε τα παραμετρικά διαστήματα που ορίζεται η καμπύλη.

(β) Υπολογίστε κατά τμήματα παρεμβολή Hermite που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία και εφαπτόμενες, χρησιμοποιώντας παραμετροποίηση μήκους χορδής με $t_0=0$.

(γ) Υπολογίστε για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις καμπύλης, το σημείο αντίστοιχα για $u=1.5$.

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Λύση:

(α) Σε κάθε σημείο P_i, με i = 0,1,2,3 αντιστοιχεί και ένας κόμβος t_i. Βάσει της ομοιόμορφης παραμετροποίησης προκύπτει ότι

$$\overline{P}_0 \to t_0 = 0,$$
$$\overline{P}_1 \to t_1 = t_0 + \Delta t = 0 + 1 = 1 \Rightarrow t_1 = 1$$
$$\overline{P}_2 \to t_2 = t_1 + \Delta t = 1 + 1 = 2 \Rightarrow t_2 = 2$$
$$\overline{P}_3 \to t_3 = t_2 + \Delta t = 2 + 1 = 3 \Rightarrow t_3 = 3$$

Από τα δεδομένα 4 σημεία προκύπτουν τρία τμήματα Hermite που παρεμβάλουν αντίστοιχα:

$$P(u) = \begin{cases} P_0(u) : \overline{P}_0, \overline{P}_1, m_0, m_1, t \in [0,1] \\ P_1(u) : \overline{P}_1, \overline{P}_2, m_1, m_2, t \in [1,2] \\ P_2(u) : \overline{P}_2, \overline{P}_3, m_2, m_3, t \in [2,3] \end{cases}$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Το κάθε τμήμα ορίζεται βάσει του τύπου Hermite για τυχαίο παραμετρικό διάστημα. Για το πρώτο τμήμα ισχύει

$$P_0(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_0} + \widehat{H_1^3(u)}m_0 + \widehat{H_2^3(u)}m_1 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{H_0^3(u)} &= H_0^3(t) \\ \widehat{H_1^3(u)} &= H_1^3(t) \\ \widehat{H_2^3(u)} &= H_2^3(t) \\ \widehat{H_3^3(u)} &= H_3^3(t) \end{aligned}\right\} u \in [0,1], t = u \quad \kappa\alpha\iota \quad \left.\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) &= t^3 - t^2 \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Αντίστοιχα για το δεύτερο τμήμα ισχύει

$$P_1(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_1} + \widehat{H_1^3(u)}m_1 + \widehat{H_2^3(u)}m_2 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_2}$$

και στα πολυώνυμα Hermite έχουμε όπου $t = \dfrac{u-1}{2-1} \Rightarrow t = u-1$

Αντίστοιχα για το τρίτο τμήμα ισχύει

$$P_2(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_2} + \widehat{H_1^3(u)}m_2 + \widehat{H_2^3(u)}m_3 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_3}$$

και στα πολυώνυμα Hermite έχουμε όπου $t = \dfrac{u-2}{3-2} \Rightarrow t = u-2$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

(β) Στην παραμετροποίηση μήκους χορδής η παραμετροποίηση είναι:

$$\overline{P_0} \to t_0 = 0,$$

$$\overline{P_1} \to t_1 = t_0 + \left\| \overline{P_1} - \overline{P_0} \right\| = 0 + \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \simeq 3.6$$

$$\overline{P_2} \to t_2 = t_1 + \left\| \overline{P_2} - \overline{P_1} \right\| = 3.6 + \left\| \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = 3,6 + \sqrt{10} \simeq 6.76$$

$$\overline{P_3} \to t_3 = t_2 + \left\| \overline{P_3} - \overline{P_2} \right\| = 6.76 + \left\| \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 6,76 + \sqrt{17} \simeq 10.88$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Τα τρία τμήματα Hermite είναι ίδια όπως και στο (α) αλλά ορίζονται σε διαφορετικά παραμετρικά διαστήματα:

$$P(u) = \begin{cases} P_0(u): P_0, P_1, m_0, m_1, t \in [0, 3.6] \\ P_1(u): P_1, P_2, m_1, m_2, t \in [3.6, 6.76] \\ P_2(u): P_2, P_3, m_2, m_3, t \in [6.76, 10.88] \end{cases}$$

- Το πρώτο τμήμα ορίζεται ως εξής:

$$P_0(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_0} + \widehat{H_1^3(u)}m_0 + \widehat{H_2^3(u)}m_1 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{H_0^3(u)} = H_0^3(t) \\ \widehat{H_1^3(u)} = 3.6H_1^3(t) \\ \widehat{H_2^3(u)} = 3.6H_2^3(t) \\ \widehat{H_3^3(u)} = H_3^3(t) \end{array}\right\} u \in [0, 3.6], t = \frac{u}{3.6} \quad \kappa\alpha\iota \quad \left.\begin{array}{l} H_0^3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) = t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) = t^3 - t^2 \\ H_3^3(t) = -2t^3 + 3t^2 \end{array}\right\} t \in [0, 1]$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

- Αντίστοιχα το δεύτερο τμήμα ορίζεται ως εξής:

$$P_1(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_1} + \widehat{H_1^3(u)}m_1 + \widehat{H_2^3(u)}m_2 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_2}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{H_0^3(u)} &= H_0^3(t) \\ \widehat{H_1^3(u)} &= 3.16H_1^3(t) \\ \widehat{H_2^3(u)} &= 3.16H_2^3(t) \\ \widehat{H_3^3(u)} &= H_3^3(t) \end{aligned}\right\} u \in [3.6, 6.76], t = \frac{u - 3.6}{3.16} \quad \kappa\alpha\iota \quad \left.\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) &= t^3 - t^2 \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

- Και για το τρίτο τμήμα είναι

$$P_2(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_2} + \widehat{H_1^3(u)}m_2 + \widehat{H_2^3(u)}m_3 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_3}$$

και $$t = \frac{u - 6.76}{4.12}$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

(γ) Για την καμπύλη όπως έχει οριστεί στο ερώτημα (α):

Για u=1.5 η καμπύλη ορίζεται από το δεύτερο τμήμα της

$$P_1(u) : \overline{P_1}, \overline{P_2}, m_1, m_2, t \in [1,2]$$

Επομένως χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο τύπο

$$P_1(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_1} + \widehat{H_1^3(u)}m_1 + \widehat{H_2^3(u)}m_2 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_2}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{H_0^3(u)} &= H_0^3(t) \\ \widehat{H_1^3(u)} &= H_1^3(t) \\ \widehat{H_2^3(u)} &= H_2^3(t) \\ \widehat{H_3^3(u)} &= H_3^3(t) \end{aligned}\right\} u \in [1,2], t = u - 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left.\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) &= t^3 - t^2 \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Βάσει του τύπου αυτού, όπου u=1.5 και όπου t = u-1=1.5-1=0.5

$$P_1(1.5) = \widehat{H_0^3(1.5)}\overline{P_1} + \widehat{H_1^3(1.5)}m_1 + \widehat{H_2^3(1.5)}m_2 + \widehat{H_3^3(1.5)}\overline{P_2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{H_0^3(1.5)} &= H_0^3(0.5) = 2(0.5)^3 - 3(0.5)^2 + 1 = 0.5 \\
\widehat{H_1^3(1.5)} &= H_1^3(0.5) = (0.5)^3 - 2(0.5)^2 + 0.5 = 0.125 \\
\widehat{H_2^3(1.5)} &= H_2^3(0.5) = (0.5)^3 - (0.5)^2 = -0.125 \\
\widehat{H_3^3(1.5)} &= H_3^3(0.5) = -2(0.5)^3 + 3(0.5)^2 = 0.5
\end{aligned}\right\}$$

$$P_1(1.5) = 0.5\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + 0.125\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - 0.125\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 0.5\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.625\\1.625\end{bmatrix}$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Για την καμπύλη όπως έχει οριστεί στο ερώτημα (α):

Για u=1.5 η καμπύλη ορίζεται από το πρώτο τμήμα της

$$P_0(u) : P_0, P_1, m_0, m_1, t \in [0, 3.6]$$

Επομένως χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο τύπο

$$P_0(u) = \widehat{H_0^3(u)}\overline{P_0} + \widehat{H_1^3(u)}m_0 + \widehat{H_2^3(u)}m_1 + \widehat{H_3^3(u)}\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{H_0^3(u)} = H_0^3(t) \\ \widehat{H_1^3(u)} = 3.6H_1^3(t) \\ \widehat{H_2^3(u)} = 3.6H_2^3(t) \\ \widehat{H_3^3(u)} = H_3^3(t) \end{array}\right\} u \in [0, 3.6], t = \frac{u}{3.6} \quad \kappa\alpha\iota \quad \left.\begin{array}{l} H_0^3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1^3(t) = t^3 - 2t^2 + t \\ H_2^3(t) = t^3 - t^2 \\ H_3^3(t) = -2t^3 + 3t^2 \end{array}\right\} t \in [0, 1]$$

Άσκηση 3: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Βάσει του τύπου αυτού, όπου u=1.5 και όπου t = u/3.6=1.5/3.6=0.417

$$P_0(1.5) = \widehat{H_0^3(1.5)}\overline{P_0} + \widehat{H_1^3(1.5)}m_0 + \widehat{H_2^3(1.5)}m_1 + \widehat{H_3^3(1.5)}\overline{P_1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{H_0^3(1.5)} &= H_0^3(0.417) = 2(0.417)^3 - 3(0.417)^2 + 1 = 0.624 \\
\widehat{H_1^3(1.5)} &= 3.6H_1^3(0.417) = 3.6\left[(0.417)^3 - 2(0.417)^2 + 0.417\right] = 0.5112 \\
\widehat{H_2^3(1.5)} &= 3.6H_2^3(0.417) = 3.6\left[(0.417)^3 - (0.417)^2\right] = 0.3636 \\
\widehat{H_3^3(1.5)} &= H_3^3(0.417) = -2(0.417)^3 + 3(0.417)^2 = -0.129
\end{aligned}\right\}$$

$$P_0(1.5) = 0.624\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + 0.5112\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 0.3636\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - 0.129\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.8514\\0.6168\end{bmatrix}$$

Εφαπτόμενα Διανύσματα

- *Μέθοδος FMILL*: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της εφαπτόμενης μόνο σε ενδιάμεσα σημεία αλλά όχι στα ακραία σημεία P_0 και P_{n}:

$$m_i = \overline{P_{i+1}} - \overline{P_{i-1}} \;\; \mu\varepsilon \;\; i = 1, \ldots, n-1$$

- *Μέθοδος Bessel*:
  - Για τα ενδιάμεσα σημεία ισχύει:

$$m_i = -\frac{t_{i+1} - t_i}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})}\overline{P_{i-1}} + \frac{t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_i - t_{i-1})}\overline{P_i} + \frac{t_i - t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})}\overline{P_{i+1}}$$

Εφαπτόμενα Διανύσματα

- *Μέθοδος Bessel*:
  - Για τα ακραία σημεία ισχύει:

$$m_0 = \frac{-t_2 - t_1 + 2t_0}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)}\overline{P_0} + \frac{t_2 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)}\overline{P_1} + \frac{t_1 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)}\overline{P_2}$$

$$m_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{(t_n - t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})}\overline{P_{n-2}} + \frac{t_n - t_{n-2}}{(t_n - t_{n-1})(t_{n-1} - t_{n-2})}\overline{P_{n-1}} + \frac{2t_n - t_{n-1} - t_{n-2}}{(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2})}\overline{P_n}$$

Άσκηση 4: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Εκφώνηση:

(α) Δίνεται καμπύλη y=3x^2+2. Με τη μέθοδο της κατά τμήματα παρεμβολής Hermite προσεγγίστε το τμήμα της καμπύλης που ορίζεται για $x \in [0,3]$.

Χρησιμοποιήστε ομοιόμορφή παραμετροποίηση με t_0=0 και Δt=1. Για τις εφαπτόμενες, χρησιμοποιήστε την μέθοδο FMILL για τα ενδιάμεσα σημεία και τη μέθοδο Bessel για τις εφαπτόμενες στα ακραία σημεία.

Λύση: Για την καμπύλη Hermite δεν γνωρίζουμε τίποτα. Επομένως, πρέπει να υπολογιστούν τα σημεία παρεμβολής, οι εφαπτόμενες σε αυτά και οι κόμβοι που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο παρεμβολής και θα ορίσουν τα παραμετρικά διαστήματα της καμπύλης.

Για τα σημεία θα λάβουμε δειγματοληπτικά 4 σημεία πάνω στην αρχική καμπύλη y=3x^2+2 για x=0, 1, 2, 3.

Άσκηση 4: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Επομένως έχουμε:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \rightarrow \overline{P_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x = 1 \Rightarrow y = 5 \rightarrow \overline{P_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 14 \rightarrow \overline{P_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x = 3 \Rightarrow y = 29 \rightarrow \overline{P_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Σε κάθε ένα σημείο παρεμβολής αντιστοιχίζεται και ένας παραμετρικός κόμβος βάσει ομοιόμορφής παραμετροποίησης. Επομένως:

$$\overline{P_0} \rightarrow t_0 = 0,$$

$$\overline{P_1} \rightarrow t_1 = t_0 + \Delta t = 0 + 1 = 1 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$\overline{P_2} \rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t = 1 + 1 = 2 \Rightarrow t_2 = 2$$

$$\overline{P_3} \rightarrow t_3 = t_2 + \Delta t = 2 + 1 = 3 \Rightarrow t_3 = 3$$

Άσκηση 4: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Για τις εφαπτόμενες χρησιμοποιούμε για τα ενδιάμεσα σημεία την μέθοδο FMILL:

$$\overline{P_1} \rightarrow m_1 = \overline{P_2} - \overline{P_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P_2} \rightarrow m_2 = \overline{P_3} - \overline{P_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Και για τα ακραία σημεία χρησιμοποιούμε την μέθοδο Bessel:

$$m_0 = \frac{-t_2 - t_1 + 2t_0}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)}\overline{P_0} + \frac{t_2 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)}\overline{P_1} + \frac{t_1 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)}\overline{P_2} \Rightarrow$$

$$m_0 = \frac{-2 - 1 + 0}{(2-0)(1-0)}\overline{P_0} + \frac{2 - 0}{(2-1)(1-0)}\overline{P_1} + \frac{1 - 0}{(2-1)(2-0)}\overline{P_2} \Rightarrow$$

$$m_0 = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

$$m_3 = \frac{t_3 - t_2}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}\overline{P_1} + \frac{t_3 - t_1}{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}\overline{P_2} + \frac{2t_3 - t_2 - t_1}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)}\overline{P_3} \Rightarrow$$

$$m_3 = \frac{3-2}{(3-1)(2-1)}\overline{P_1} + \frac{3-1}{(3-2)(2-1)}\overline{P_2} + \frac{6-2-1}{(3-2)(3-1)}\overline{P_3} \Rightarrow$$

$$m_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\14\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}3\\29\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\74\end{bmatrix}$$

Η καμπύλη αποτελειται από τρία τμήματα που ορίζονται από τον τύπο που ισχύει για τις καμπύλες Hermite για τυχαίο παραμετρικό διάστημα. Ανάλογα με το διάστημα στο οποίο ορίζονται έχουμε:

$$P(u) = \begin{cases} P_0(u) : \overline{P_0}, \overline{P_1}, m_0, m_1, t \in [0,1], t = u \\ P_1(u) : \overline{P_1}, \overline{P_2}, m_1, m_2, t \in [1,2], t = u - 1 \\ P_2(u) : \overline{P_2}, \overline{P_3}, m_2, m_3, t \in [2,3], t = u - 2 \end{cases}$$

Άσκηση 5: Κατά τμήματα παρεμβολή Hermite

Άσκηση για λύση…

Εκφώνηση:

(α) Δίνονται σημεία παρεμβολής $P_0(0, 0)$, $P_1(10,0)$, $P_2(10, 10)$ και $P_3(20, 10)$. Να υπολογιστεί με τη μέθοδο της κατά τμήματα παρεμβολής Hermite καμπύλη P(u), η οποία παρεμβάλει τα ανωτέρω σημεία.

(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου P(1.5).

Χρησιμοποιήστε ομοιόμορφη παραμετροποίηση με t_0=0 και Δt = 1, για να υπολογίσετε τα παραμετρικά διαστήματα που ορίζεται η καμπύλη. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο FMILL για τις εφαπτόμενες στα ενδιάμεσα σημεία. Τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα να υπολογιστούν έτσι ώστε να είναι παράλληλα με το P_0P_1 και P_2P_3 διανύσματα αντίστοιχα.

Βιβλιογραφία

- Γραφικά και Οπτικοποίηση – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Γ. Παπαϊωάννου, Ν. Πλατής, Ν. Μ. Πατρικαλάκης, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2010.
- Γραφικά – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Α. Μπεμ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999.