ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAGD)

Ενότητα 2: Καμπύλες Bezier

Φίλιππος Αζαριάδης & Σοφία Κυρατζή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ

Θεματική Ενότητα Β: Παραμετρικές Καμπύλες Bezier

Παραμετρική εξίσωση ευθείας

- Ορίζεται από δύο σημεία P_0 και P_1 σε ένα δεδομένο παραμετρικό διάστημα $t \in [t_0, t_1]$.
- Η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$P(t) = (1-t)\overline{P_0} + t\overline{P_1} \quad \gamma\iota\alpha \ \mathrm{t} \in [0,1]$$

$$P(t) = \frac{b-u}{b-a}\overline{P_0} + \frac{u-a}{b-a}\overline{P_1} \quad \gamma\iota\alpha \ \mathrm{u} \in [\mathrm{a,b}]$$

- Ο τύπος της εξίσωσης ευθείας αποτελεί:
  - Γραμμική παρεμβολή των σημείων P_0 και P_1.
  - Σταθμισμένο άθροισμα: καθώς αλλάζει η τιμή της παραμέτρου αλλάζει και η «συμμετοχή» του κάθε σημείου στο τελικό αποτέλεσμα.
  - Κυρτό συνδυασμό των σημείων P_0 και P_1: Το άθροισμα των συντελεστών των σημείων είναι 1. Σημαίνει ότι το νέο σημείο που προκύπτει από τα δύο αυτά σημεία θα βρίσκεται πάντα μέσα στο κυρτό σχήμα που ορίζουν τα σημεία.

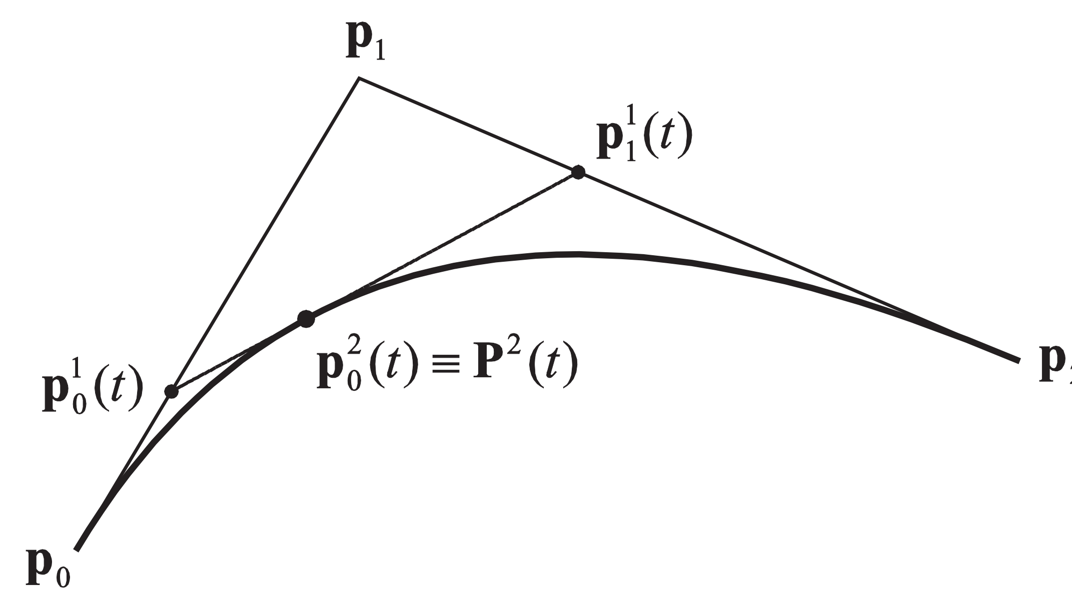
Καμπύλες Bezier 2ου Βαθμού

- Ο σχηματισμός μίας καμπύλης Bezier βασίζεται στη γραμμική παρεμβολή σημείων σε ένα παραμετρικό διάστημα $t \in [t_0, t_1]$.
- Για τις καμπύλες 2ου βαθμού απαιτούνται τρία σημεία P_0, P_1, P_2.
- Για δεδομένη στιγμή $t=k$ με $t \in [0,1]$υπολογίζεται ένα σημείο πάνω στην ευθεία μεταξύ P_0P_1

$$P_0^1(t) = (1-t)\overline{P_0} + t\overline{P_1}$$

και ένα σημείο πάνω στην P_1P_2

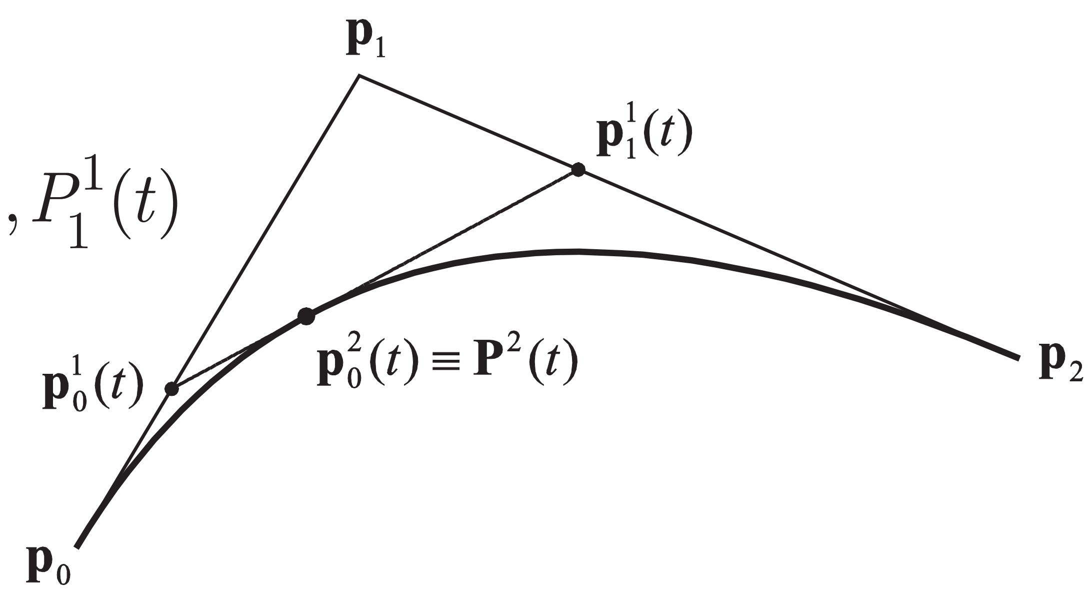
$$P_1^1(t) = (1-t)\overline{P_1} + t\overline{P_2}$$



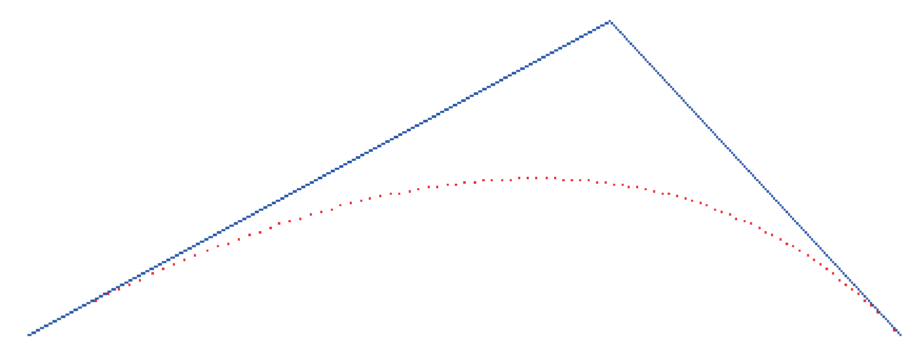
Καμπύλες Bezier 2ου Βαθμού

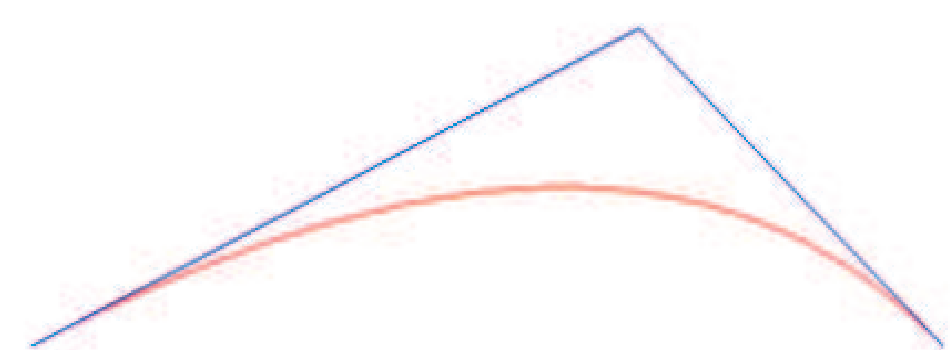
- Τέλος για την ίδια τιμή του $t = k$ υπολογίζεται και ένα σημείο πάνω στην ευθεία που σχηματίζουν τα $P_0^1(t), P_1^1(t)$

$$P_0^2(t) = (1-t)\overline{P_0^1} + t\overline{P_1^1}$$



- Το σημείο αυτό βρίσκεται πάνω σε μία καμπύλη Bezier 2ου βαθμού (τετραγωνική καμπύλη Bezier).
- Αν κάνουμε το ίδιο για κάθε τιμή του $t\in[0,1]$ και ενώσουμε τα σημεία που προκύπτουν παίρνουμε μία τετραγωνική καμπύλη Bezier.





Καμπύλες Bezier 2ου Βαθμού

- Η καμπύλη Bezier 2ου βαθμού γράφεται συναρτήσει των αρχικών σημείων P_0, P_1, P_2 ως εξής:

$$P_0^2(t) = (1-t)^2\overline{P_0} + 2t(1-t)\overline{P_1} + t^2\overline{P_2} \quad \mu\varepsilon \ \mathrm{t} \in [0,1]$$

- Για δεδομένη τιμή του t από τον παραπάνω τύπο λαμβάνεται ένα σημείο πάνω σε μία τετραγωνική καμπύλη Bezier.
- Τα σημεία P_0, P_1, P_2 καλούνται *σημεία ελέγχου* της καμπύλης, διότι η θέση τους ελέγχει τη μορφή της καμπύλης.
- Ο βαθμός της καμπύλης και ο αριθμός των σημείων ελέγχου συνδέονται με τη σχέση:

σημεία ελέγχου = *βαθμός καμπύλης* +1

Καμπύλες Bezier 3ου Βαθμού

- Μια καμπύλη 3ου βαθμού (κυβική καμπύλη) Bezier σχηματίζεται με τρόπο ανάλογο αυτού της τετραγωνικής καμπύλης.
- Χρειάζονται 4 σημεία ελέγχου.
- Ορίζονται τρεις παρεμβολές μεταξύ των διαδοχικών σημείων που εμφανίζονται κατά τον σχηματισμό της καμπύλης:
  - Στο πρώτο επίπεδο παρεμβολής

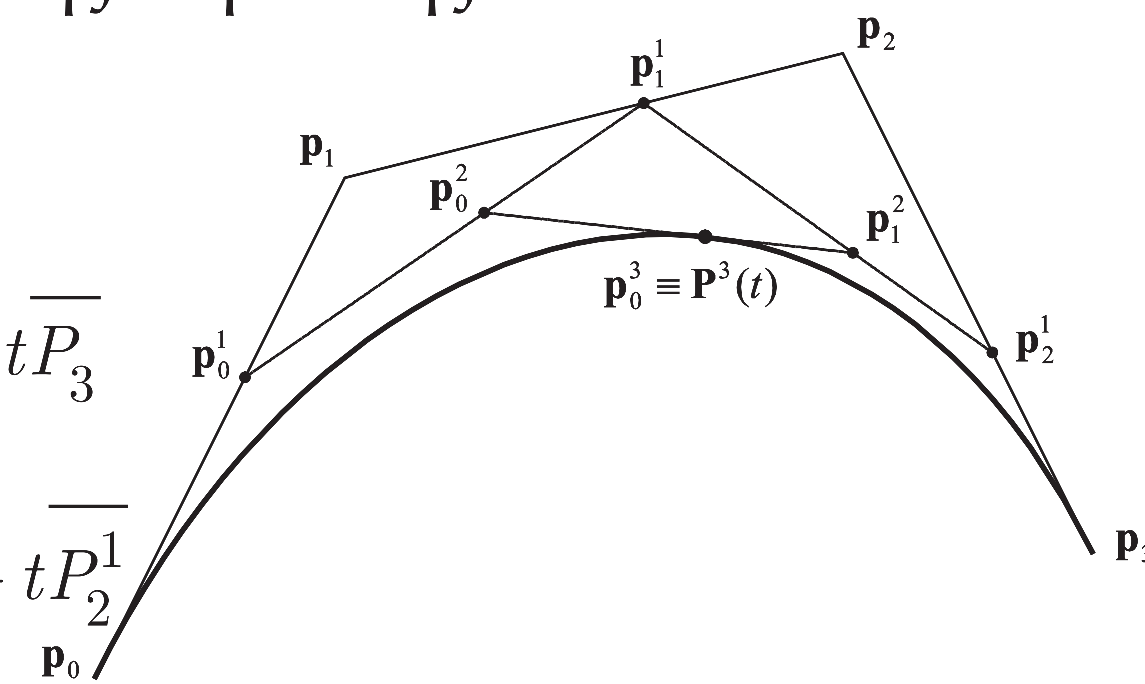
$$P_0^1(t) = (1-t)\overline{P_0} + t\overline{P_1} \quad \gamma\iota\alpha \;\; t \in \left[0,1\right]$$

$$P_1^1(t) = (1-t)\overline{P_1} + t\overline{P_2},\;\; P_2^1(t) = (1-t)\overline{P_2} + t\overline{P_3}$$

  - Στο δεύτερο επίπεδο παρεμβολής

$$P_0^2(t) = (1-t)\overline{P_0^1} + t\overline{P_1^1},\;\; P_1^2(t) = (1-t)\overline{P_1^1} + t\overline{P_2^1}$$

  - Στο τρίτο επίπεδο παρεμβολής (σημείο καμπύλης Bezier) $P_0^3(t) = (1-t)\overline{P_0^2} + t\overline{P_1^2}$

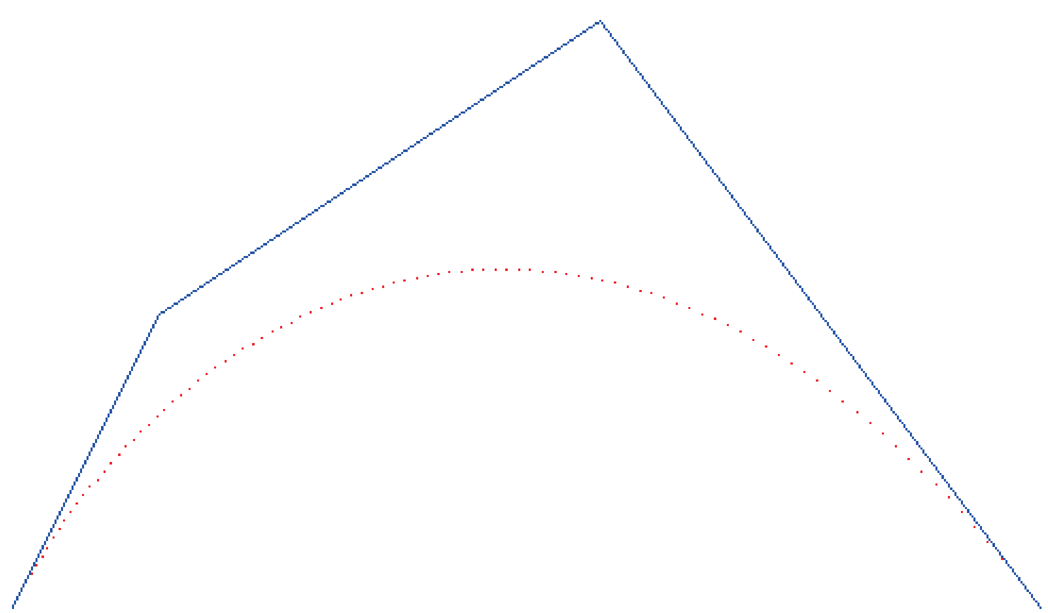


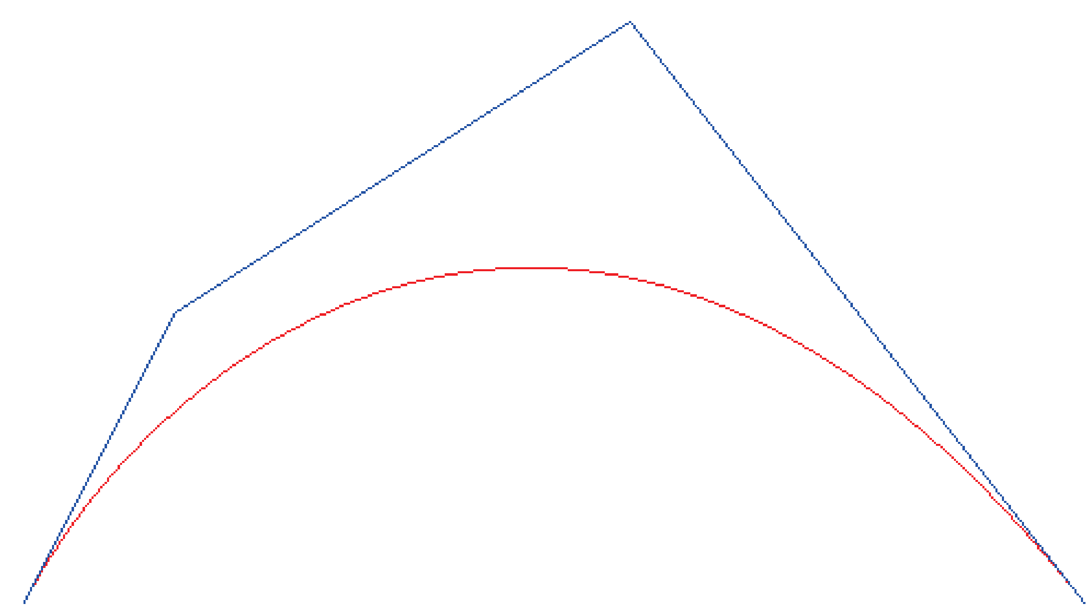
Καμπύλες Bezier 3ου Βαθμού

- Η καμπύλη Bezier 3ου βαθμού γράφεται συναρτήσει των αρχικών σημείων P_0, P_1, P_2, P_3 ως εξής:

$$P_0^3(t) = (1-t)^3\overline{P_0} + 3t(1-t)^2\overline{P_1} + 3t^2(1\text{-}t)\overline{P_2} + t^3\overline{P_3} \quad \gamma\iota\alpha \;\; t \in \left[0,1\right]$$

- Για δεδομένη τιμή του *t* από τον παραπάνω τύπο λαμβάνεται ένα σημείο πάνω σε μία κυβική καμπύλη Bezier.

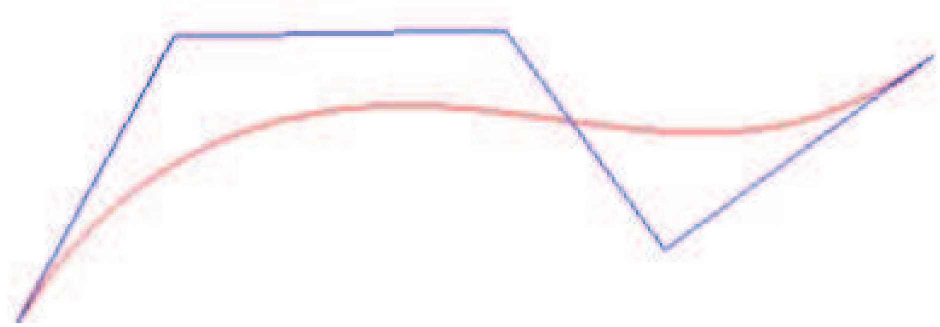




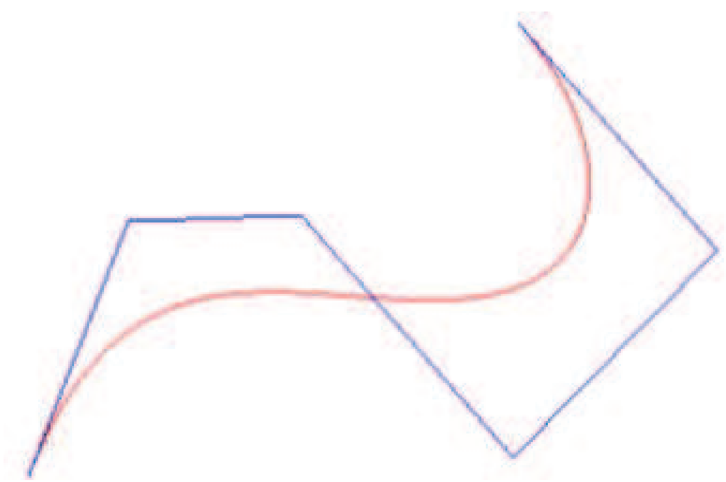
Καμπύλες Bezier n^{ου} Βαθμού

- Για τον ορισμό μίας καμπύλης Bezier n^{ου} βαθμού, απαιτούνται *n+1* σημεία ελέγχου.
- Η καμπύλη γράφεται συναρτήσει των σημείων ελέγχου της ως άθροισμα των σημείων ελέγχου πολλαπλασιαζόμενα με έναν συντελεστή. Οι συντελεστές καλούνται πολυώνυμα Bernstein:

$$P_0^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \overline{P_i} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \overline{P_i} \quad \gamma\iota\alpha \ \mathrm{t} \in [0,1]$$



Καμπύλη Bezier 4^{ου} βαθμού

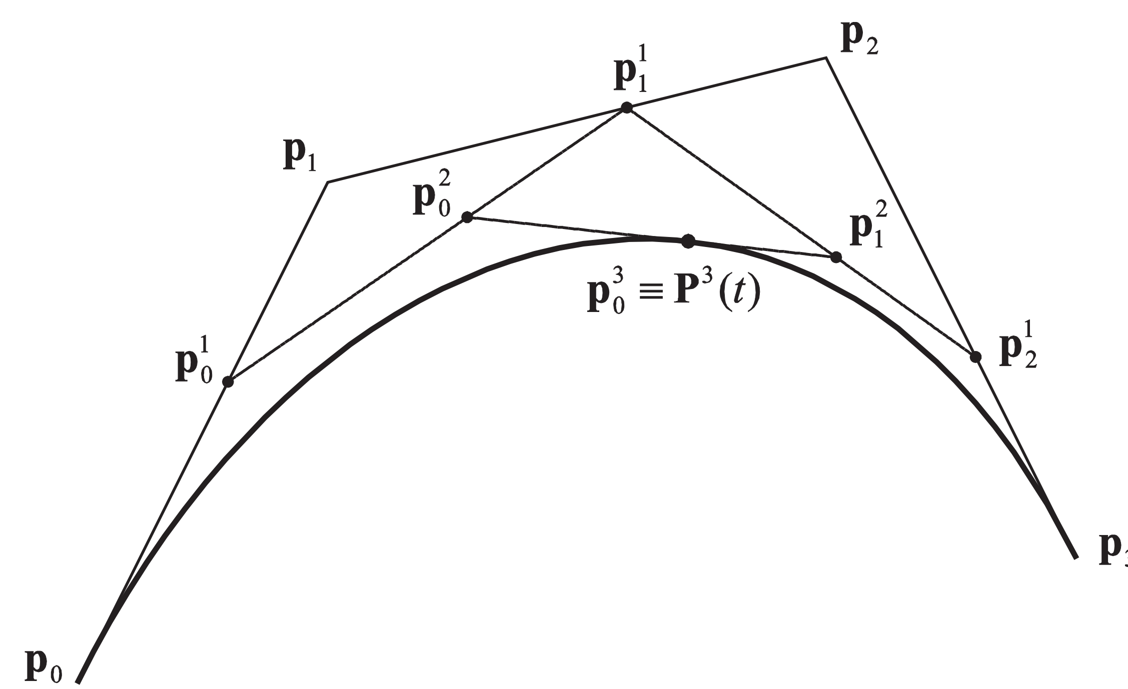


Καμπύλη Bezier 5^{ου} βαθμού

Αλγόριθμος του De Casteljau

- Ο αλγόριθμος του de Casteljau μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ενός σημείου πάνω σε μία καμπύλη n^ου^ για δεδομένη τιμή της παραμέτρου *t*, εναλλακτικά του τύπου της καμπύλης Bezier.
- Για τον υπολογισμό ενός σημείου πάνω στην καμπύλη ο αλγόριθμος βασίζεται στα ενδιάμεσα σημεία που προκύπτουν από τις γραμμικές παρεμβολές κατά την κατασκευή της καμπύλης.
- Για μία κυβική καμπύλη Bezier ορισμένη στο $t \in [0,1]$ και για δεδομένη τιμή του *t* έχουμε:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^0 \arrow[r, "1-t"] & \mathbf{p}_0^1 \arrow[r] & \mathbf{p}_0^2 \arrow[r] & \mathbf{p}_0^3 = \mathbf{P}^3(t) \\
\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1^0 \arrow[ur, "t"] \arrow[r] & \mathbf{p}_1^1 \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbf{p}_1^2 \arrow[ur] & \\
\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2^0 \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbf{p}_2^1 \arrow[ur] & & \\
\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3^0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$



Άσκηση 1: Αλγόριθμος de Casteljau

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού με σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(2,2)$, $P_2(6,4)$ και $P_3(8,2)$. Υπολογίστε με τη χρήση του αλγορίθμου του de Casteljau το σημείο της καμπύλης για t=1/4.

Λύση:

$$P_0 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{3/4} P_0^1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\[2pt] \frac{1}{2}\end{bmatrix} \xrightarrow{3/4} P_0^2\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}\frac{9}{8}\\[2pt] 1\end{bmatrix} \xrightarrow{3/4} P_0^3\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}\frac{29}{16}\\[2pt] \frac{23}{16}\end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \overset{1/4}{\nearrow} \xrightarrow{3/4} P_1^1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}3\\[2pt] \frac{5}{2}\end{bmatrix} \overset{1/4}{\nearrow} \xrightarrow{3/4} P_0^2\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}\frac{31}{8}\\[2pt] \frac{11}{4}\end{bmatrix} \overset{1/4}{\nearrow}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} \overset{1/4}{\nearrow} \xrightarrow{3/4} P_2^1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix}\frac{13}{2}\\[2pt] \frac{7}{2}\end{bmatrix} \overset{1/4}{\nearrow}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix} \overset{1/4}{\nearrow}$$

Άσκηση 1: Αλγόριθμος de Casteljau

Ενδεικτικά για τις πράξεις της πρώτης στήλης:

$$P_0^1(1/4) = (1 - 1/4)\overline{P_0} + 1/4\,\overline{P_1} = 3/4\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + 1/4\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$P_1^1(1/4) = (1 - 1/4)\overline{P_1} + 1/4\,\overline{P_2} = 3/4\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + 1/4\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6/4 + 6/4\\6/4 + 4/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5/2\end{bmatrix}$$

$$P_2^1(1/4) = (1 - 1/4)\overline{P_2} + 1/4\,\overline{P_3} = 3/4\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} + 1/4\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18/4 + 8/4\\12/4 + 2/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/2\\7/2\end{bmatrix}$$

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται και τα σημεία των υπόλοιπων στηλών.

Καμπύλες Bezier - Ιδιότητες

- *Ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος (ή κυρτής περιβάλλουσας)*: Η καμπύλη Bezier βρίσκεται πάντα μέσα στο κυρτό περίβλημα που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου της. Αυτό συμβαίνει γιατί οι συντελεστές των σημείων ελέγχου (πολυώνυμα Bernstein) αθροίζουν σε 1, δηλαδή η καμπύλη Bezier αποτελεί κυρτό συνδυασμό των σημείων ελέγχου της.
- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς*: Αυτό σημαίνει ότι αν πρόκειται να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός σε μία καμπύλη Bezier, αρκεί να εφαρμοστεί στα σημεία ελέγχου της και να υπολογιστεί η μετασχηματισμένη καμπύλη με βάση αυτά.
- *Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς παραμέτρου*: Η καμπύλη παραμένει η ίδια αν το παραμετρικό διάστημα μεταβληθεί από $t \in [0,1]$ σε $u \in [a, b]$. Ο μαθηματικός τύπος της καμπύλης παραμένει ίδιος και όπου υπάρχει η μεταβλητή t, αντικαθίσταται με την τιμή

$$t = \frac{u - a}{b - a}$$

Καμπύλες Bezier - Ιδιότητες

- *Συμμετρία ως προς τα σημεία ελέγχου της*: Αν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης χρησιμοποιηθούν σε αντίστροφη σειρά, η καμπύλη παραμένει η ίδια απλά διατρέχεται κατά αντίστροφή φορά.
- *Γραμμική ακρίβεια*: Αν όλα τα σημεία ελέγχου βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, τότε η καμπύλη έχει το σχήμα ευθύγραμμου τμήματος.
- *Ιδιότητα φθίνουσας διακύμανσης*: Μία επίπεδη καμπύλη Bezier τέμνεται από μία τυχαία ευθεία το πολύ τόσες φορές όσες φορές τέμνει η ευθεία το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης. Αυτό σημαίνει ότι αν μία ευθεία τέμνει το πολύγωνο ελέγχου σε ένα σημείο τότε μπορεί να τέμνει την καμπύλη σε ένα ή σε κανένα σημείο. Ως συνέπεια της ιδιότητας αυτής, μία καμπύλη με κυρτό πολύγωνο ελέγχου είναι επίσης κυρτή, χωρίς όμως να ισχύει το αντίθετο. Δηλαδή μία κυρτή καμπύλη δεν σημαίνει ότι έχει κυρτό πολύγωνο ελέγχου.
- *Παρεμβολή ακραίων σημείων ελέγχου*: Μία καμπύλη Bezier ξεκινά πάντα από το πρώτο σημείο ελέγχου της, για $u = a$ ή $t = 0$ και καταλήγει στο τελευταίο σημείο ελέγχου της για $u = b$ ή $t = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} P^n(0) = P_0 \\ P^n(1) = P_1 \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \left.\begin{array}{l} P^n(a) = P_0 \\ P^n(b) = P_1 \end{array}\right\}$$

Καμπύλες Bezier - Ιδιότητες

- *Ψευδο-τοπικός έλεγχος:* Ο τοπικός έλεγχος υποδηλώνει ότι αν μετακινηθεί ένα σημείο ελέγχου της καμπύλης, τότε το σχήμα της θα επηρεαστεί μόνο τοπικά. Αυτό δεν ισχύει στις καμπύλες Bezier, καθώς όλα τα σημεία ελέγχου της καμπύλης συνεισφέρουν στη μορφή του σχήματος της σε όλο το παραμετρικό διάστημα (δηλ. οι συντελεστές των σ.ε. είναι μη – μηδενικοί για τις τιμές της παραμέτρου t). Επειδή όμως παρατηρείτε ότι το αποτέλεσμα της μετακίνησης ενός σημείου ελέγχου P_i είναι πιο ισχυρό στο τμήμα της καμπύλης γύρω από την παραμετρική τιμή $t = i/n$, λέμε ότι μία καμπύλη Bezier παρουσιάζει ψευδο-τοπικό έλεγχο.
  - Οπότε μπορεί να προβλεφθεί που θα γίνει η μεγαλύτερη αλλαγή στη μορφή της καμπύλης κατά τη μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου.

Καμπύλες Bezier - Ιδιότητες

- *Εφαπτόμενες στα άκρα*: Οι εφαπτόμενες στα άκρα (δηλαδή στις ακραίες τιμές του παραμετρικού διαστήματος) για οποιαδήποτε καμπύλη n[ου] βαθμού μπορούν να δοθούν από τους παρακάτω τύπους
  - Για t∈[0,1]

$$\frac{d}{dt}P^n(0) = n(\overline{P_1} - \overline{P_0})$$
$$\frac{d}{dt}P^n(1) = n(\overline{P_n} - \overline{P_{n-1}})$$

Για u∈[a, b]

$$\frac{d}{dt}P^n(a) = \frac{1}{b-a}n(\overline{P_1} - \overline{P_0})$$
$$\frac{d}{dt}P^n(b) = \frac{1}{b-a}n(\overline{P_n} - \overline{P_{n-1}})$$

- *Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα*: Για τις δεύτερες παραγώγους τα άκρα ισχύει
  - Για t∈[0,1]

$$\frac{d^2}{dt^2}P^n(0) = n(n-1)(\overline{P_2} - 2\overline{P_1} + \overline{P_0})$$
$$\frac{d^2}{dt^2}P^n(1) = n(n-1)(\overline{P_n} - 2\overline{P_{n-1}} + \overline{P_{n-2}})$$

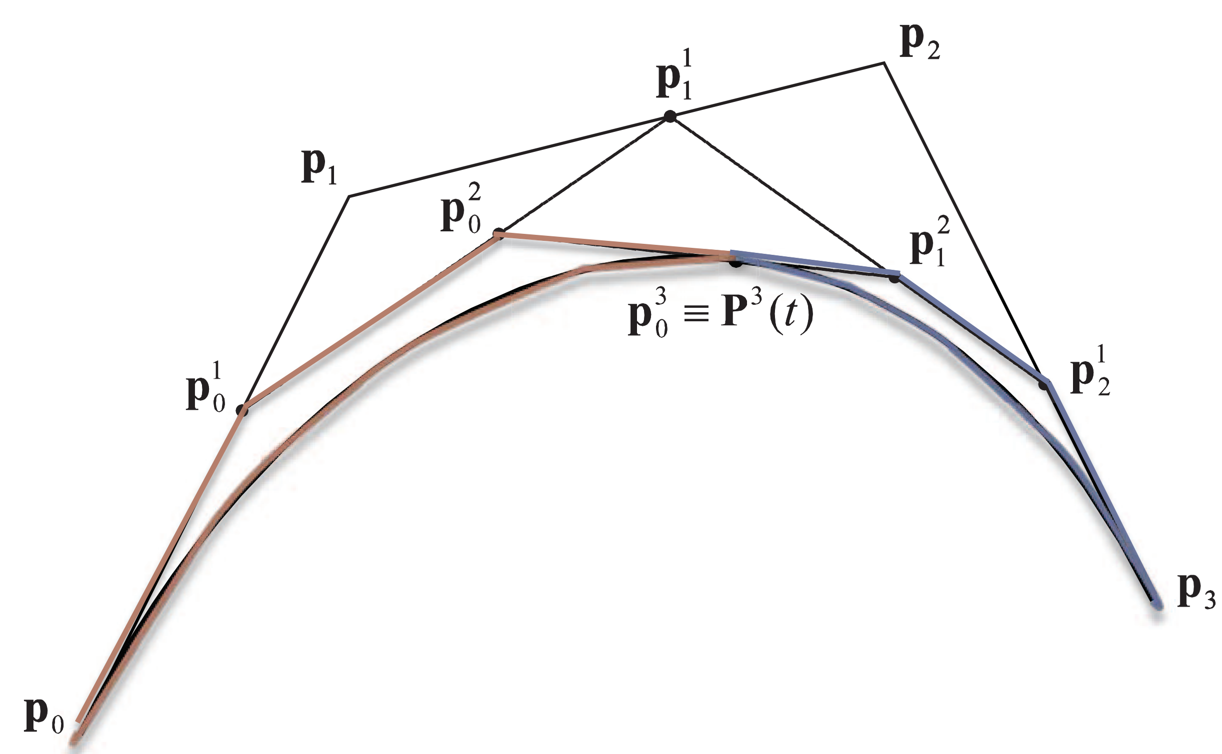
Για u∈[a, b]

$$\frac{d^2}{du^2}P^n(a) = \frac{1}{(b-a)^2}n(n-1)(\overline{P_2} - 2\overline{P_1} + \overline{P_0})$$
$$\frac{d^2}{du^2}P^n(1) = \frac{1}{(b-a)^2}n(n-1)(\overline{P_n} - 2\overline{P_{n-1}} + \overline{P_{n-2}})$$

Υποδιαίρεση καμπύλης Bezier

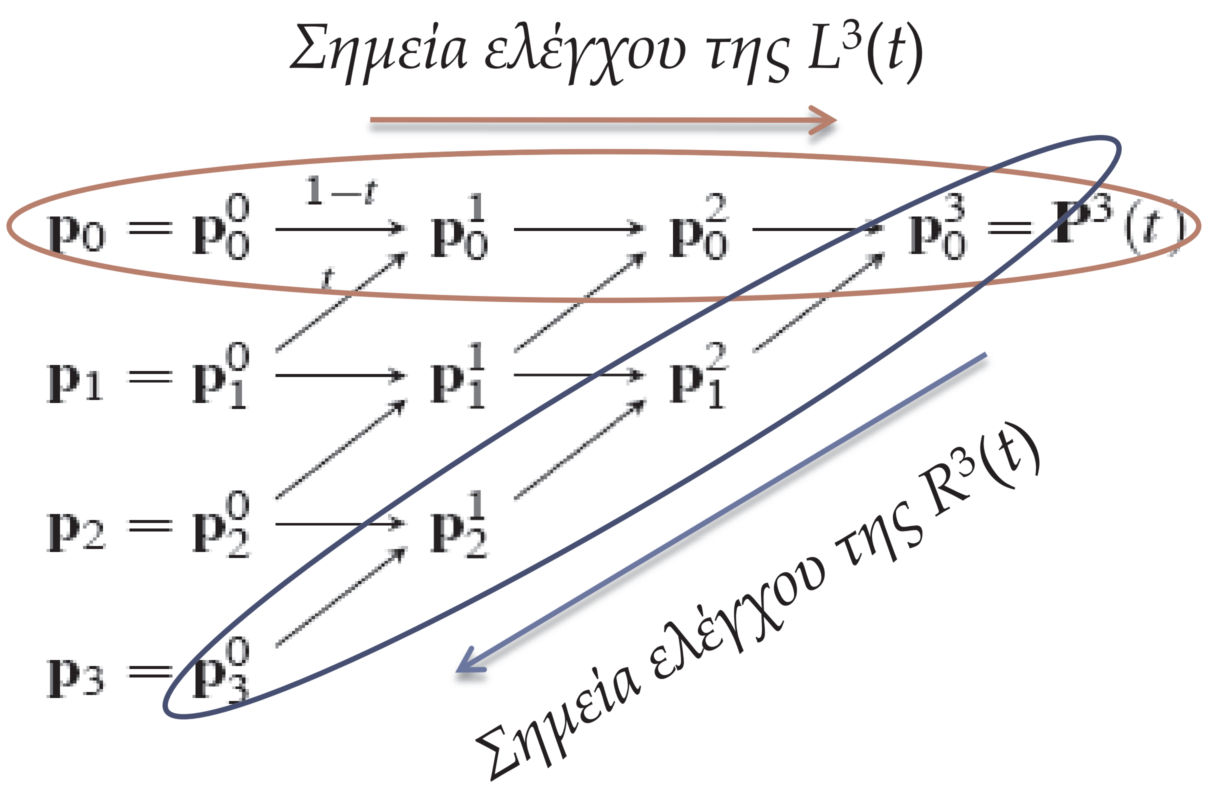
- Βασίζεται στον τρόπο κατασκευής μίας καμπύλης Bezier και στον αλγόριθμο του de Casteljau που υπολογίζει τα ενδιάμεσα σημεία που προκύπτουν από τις γραμμικές παρεμβολές.
- Για δεδομένη τιμή της παραμέτρου $t = t_0$ με $t \in [0,1]$, ένα σημείο σε μία καμπύλη $n^{ου}$ βαθμού μπορεί να διαιρέσει την αρχική καμπύλη Bezier σε δύο καμπύλες Bezier επίσης $n^{ου}$ βαθμού.

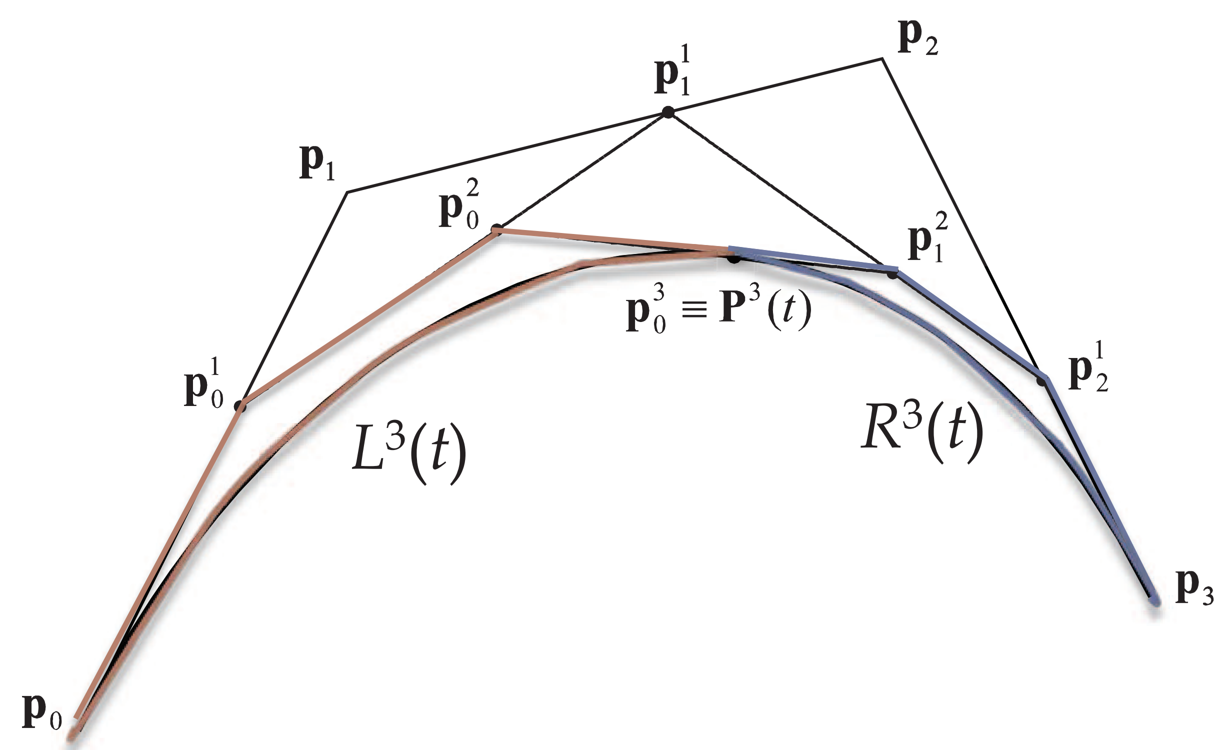
Για το παράδειγμα της καμπύλης Bezier $3^{ου}$ βαθμού οι δύο καμπύλες που προκύπτουν από την υποδιαίρεση, καθώς και το πολύγωνο και τα σημεία ελέγχου τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Υποδιαίρεση καμπύλης Bezier

- Έστω ότι οι καμπύλες ονομάζονται $L^3(t)$ και $R^3(t)$.
- Με τη βοήθεια του αλγορίθμου de Casteljau μπορούν να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου της κάθε μία καμπύλης.





- Η $L^3(t)$, ορίζεται στο $t \in [0,t_0]$ και έχει 4 σ.ε.: $\overline{L_0} = \overline{P_0}$, $\overline{L_1} = \overline{P_0^1}(t_0)$, $\overline{L_2} = \overline{P_0^2}(t_0)$, $\overline{L_3} = \overline{P_0^3}(t_0)$
- Η $R^3(t)$ ορίζεται στο $t \in [t_0,1]$ και έχει 4 σ.ε.: $\overline{R_0} = \overline{P_0^3}(t_0)$, $\overline{R_1} = \overline{P_1^2}(t_0)$, $\overline{R_2} = \overline{P_2^1}(t_0)$, $\overline{R_3} = \overline{P_3}$

Εφαπτόμενη σε τυχαίο σημείο καμπύλης Bezier

- Η εφαπτόμενη σε ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης Bezier $P^n(t_0)$ με $t = t_0 \in [0,1]$ μπορεί να υπολογιστεί:
  - Αν υπολογιστεί για τον τύπο της καμπύλης Bezier $P_0^n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\overline{P_i}$

η πρώτη παράγωγος του

$$\frac{d}{dt}P^n(t) = n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(\overline{P_{i+1}} - \overline{P_i})$$

και στη συνέχεια υπολογιστεί η τιμή της παραγώγου για $t = t_0$.

  - Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του de Casteljau και οι δύο καμπύλες Bezier που προκύπτουν από την υποδιαίρεση. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$\frac{d}{dt}P^n(t_0) = \frac{d}{dt}L^n(t_0) = \frac{1}{t_0}n(\overline{L_n} - \overline{L_{n-1}})$$

$$\frac{d}{dt}P^n(t_0) = \frac{d}{dt}R^n(t_0) = \frac{1}{1-t_0}n(\overline{R_1} - \overline{R_0})$$

Άσκηση 2: Εφαπτόμενη καμπύλης για τυχαία τιμή του *t*.

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού, με $t\in[0,1]$ και σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(2,2)$, $P_2(4,2)$, και $P_3(6,0)$. Υπολογίστε την εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο $P^3(1/2)$.

Λύση: Με τη βοήθεια του αλγορίθμου του de Casteljau υπολογίζουμε τις δύο καμπύλες στις οποίες υποδιαιρείται η καμπύλη $P^3(t)$ στο σημείο για t=1/2.

$$
\begin{array}{llllll}
P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{1/2} P_0^1(1/2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{1/2} P_0^2(1/2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{1/2} P_0^3(1/2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix} \\
P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{1/2}{\nearrow} & \xrightarrow{1/2} P_1^1(1/2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{1/2}{\nearrow} & \xrightarrow{1/2} P_0^2(1/2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \end{bmatrix} \overset{1/2}{\nearrow} & \\
P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{1/2}{\nearrow} & \xrightarrow{1/2} P_2^1(1/2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{1/2}{\nearrow} & & \\
P_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{1/2}{\nearrow} & & &
\end{array}
$$

Άσκηση 2: Εφαπτόμενη καμπύλης για τυχαία τιμή του *t*.

Η καμπύλη L^3(t) ορίζεται στο διάστημα $t\in[0,1/2]$ και έχει σημεία ελέγχου

$$\overline{L_0} = \overline{P_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{L_1} = \overline{P_0^1}(1/2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overline{L_2} = \overline{P_0^2}(1/2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix},\ \overline{L_3} = \overline{P_0^3}(1/2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Η καμπύλη R^3(t) ορίζεται στο διάστημα $t\in[0,1/2]$ και έχει σημεία ελέγχου

$$\overline{R_0} = \overline{P_0^3}(1/2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix},\ \overline{R_1} = \overline{P_1^2}(1/2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \end{bmatrix},\ \overline{R_2} = \overline{P_2^1}(1/2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overline{R_3} = \overline{P_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο $P^3(1/2)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της εφαπτόμενης της καμπύλης L^3(t) στο τέλος του παραμετρικού της διαστήματος (σημείο $L^3(1/2)$) ή μέσω της εφαπτόμενης της καμπύλης R^3(t) στην αρχή του παραμετρικού της διαστήματος (σημείο $R^3(1/2)$) .

$$\frac{d}{dt}P^3(1/2) = \frac{d}{dt}L^3(1/2) = \frac{1}{1/2}3(\overline{L_3} - \overline{L_2}) = 6(\begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}P^3(1/2) = \frac{d}{dt}R^3(1/2) = \frac{1}{1/2}3(\overline{R_1} - \overline{R_0}) = 6(\begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Φυσικά, όποια καμπύλη και αν χρησιμοποιηθεί, το διάνυσμα της εφαπτόμενης πρέπει να είναι το ίδιο.

Άσκηση 3: Αλγόριθμος de Casteljau και Εφαπτόμενη καμπύλης για τυχαία τιμή του t.

Άσκηση προς λύση …

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 2ου βαθμού με σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(2,2)$, $P_2(4,6)$. Υπολογίστε με τη χρήση του αλγορίθμου του de Casteljau

(α) Το σημείο της καμπύλης για t=1/2.

(β) Την εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο για t=1/2 (σημείο $P^2(1/2)$).

Άσκηση 4: Εφαπτόμενη καμπύλης για τυχαία τιμή του t.

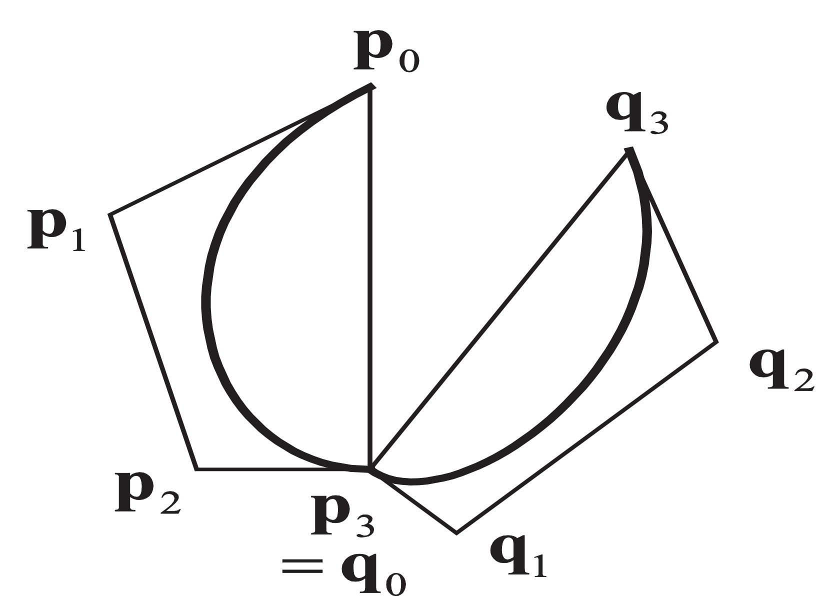
Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού με σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(2,2)$, $P_2(6,4)$ και $P_3(8,2)$. Υπολογίστε την εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο $P^3(1/4)$.

Συνένωση καμπυλών Bezier

- Έστω δύο καμπύλες Bezier $P^n(t)$ με $t \in [t_0, t_1]$ και $Q^m(t)$ με $t \in [t_1, t_2]$.
- Δύο καμπύλες Bezier με συνεχόμενα παραμετρικά διαστήματα μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους με παραμετρική συνέχεια.
  - C^0: Έχουν ένα κοινό σημείο που αντιστοιχεί στην κοινή παραμετρική τιμή $t = t_1$.

    $$P^n(t_1) = Q^m(t_1)$$



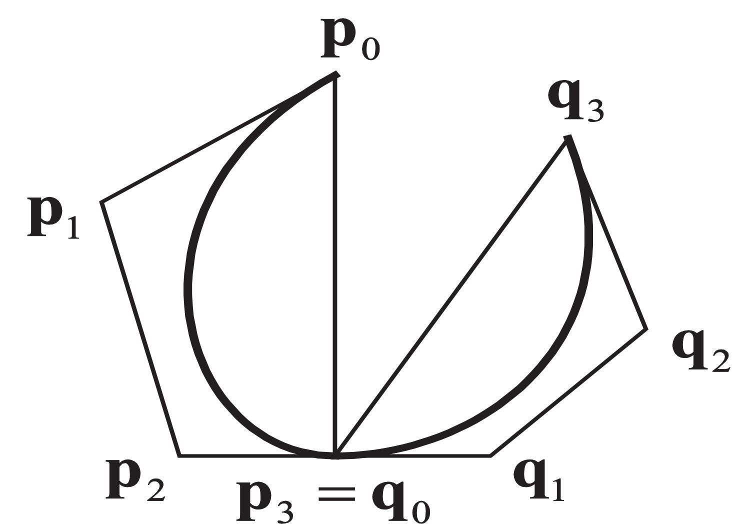
Συνένωση καμπυλών Bezier

- C^1: Στο σημείο ένωσης τους (για $t = t_1$) έχουν κοινή εφαπτόμενη (πρώτες παράγωγοι ίσες):

$$\frac{d}{dt}P^n(t_1) = \frac{d}{dt}Q^m(t_1)$$

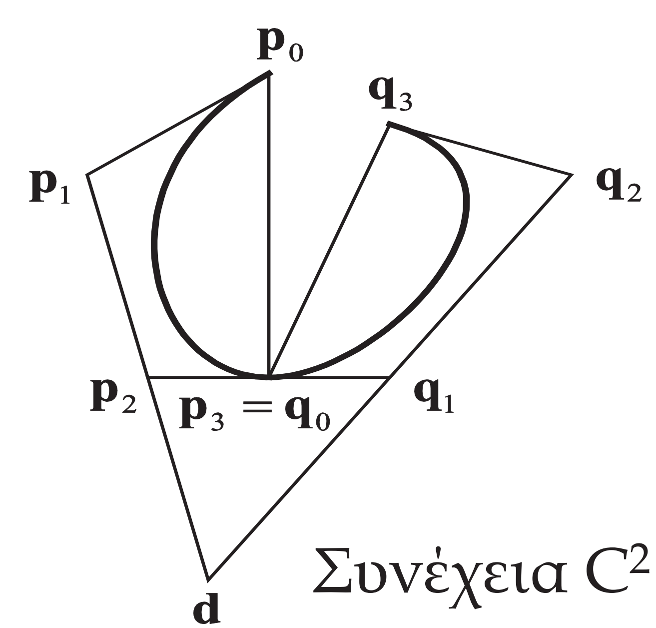
- C^2: Στο σημείο ένωσης τους (για $t = t_1$) έχουν και κοινή δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2}{dt^2}P^n(t_1) = \frac{d^2}{dt^2}Q^m(t_1)$$



Συνέχεια C^1

- Για να υπάρχει συνέχεια C^2 απαιτείται η ύπαρξη της συνέχειας C^1 και C^0.
- Όταν υπάρχει όμως C^0 δεν σημαίνει ότι υπάρχουν και υπόλοιπες συνέχειες. Για να διαπιστωθεί αν ισχύουν πρέπει να ελεχθούν βάσει των παραπάνω τύπων.



Συνέχεια C^2

Συνένωση καμπυλών Bezier

- Έστω $P^n(t)$ με $t \in [t_0, t_1]$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε καμπύλη $Q^m(t)$ που θα έχει παραμετρική συνέχεια C^2 με την $P^n(t)$ στο $t = t_1$.
- Η παραμετρική συνέχεια C^2 απαιτεί να εξασφαλιστεί πρώτα η παραμετρική συνέχεια C^0 και C^1 μεταξύ των δύο καμπυλών.
- Επίσης, η καμπύλη $Q^m(t)$ πρέπει να οριστεί σε ένα διάστημα $t \in [t_1, t_2]$, ώστε οι δύο καμπύλες να έχουν συνεχόμενα παραμετρικά διαστήματα.
  - C^0: Επειδή για $t = t_1$ ορίζεται το τελευταίο σημείο της $P^n(t)$ και το πρώτο της $Q^m(t)$ ισχύει: $P^n(t_1) = Q^m(t_1) \Rightarrow P_n = Q_0$

Αυτό σημαίνει ότι το σ.ε. Q_0 πρέπει να έχει την παραπάνω μοναδική θέση ώστε οι καμπύλες να ενώνονται.

Συνένωση καμπυλών Bezier

- C^1: Επειδή για $t = t_1$ ορίζεται το τελευταίο σημείο της $P^n(t)$ και το πρώτο της $Q^m(t)$ ισχύει:

$$\frac{d}{dt}P^n(t_1) = \frac{d}{dt}Q^m(t_1) \Rightarrow \frac{1}{t_1 - t_0}n(\overline{P_n} - \overline{P_{n-1}}) = \frac{1}{t_2 - t_1}m(\overline{Q_1} - \overline{Q_0})$$

Καθώς το σημείο Q_0 είναι γνωστό από την απαίτηση για συνέχεια C^0, και τα σ.ε. της καμπύλης $P^n(t)$ είναι γνωστά, λύνοντας ως προς Q_1, υπολογίζεται η μοναδική θέση που πρέπει να έχει το σημείο αυτό ώστε οι δύο καμπύλες να έχουν συνέχεια C1.

- C^2: Επειδή για $t = t_1$ ορίζεται το τελευταίο σημείο της $P^n(t)$ και το πρώτο της $Q^m(t)$ ισχύει: $\frac{d^2}{dt^2}P^n(t_1) = \frac{d^2}{dt^2}Q^m(t_1) \Rightarrow$

$$\frac{1}{(t_1 - t_0)^2}n(n-1)(\overline{P_n} - 2\overline{P_{n-1}} + \overline{P_{n-2}}) = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2}m(m-1)(\overline{Q_2} - 2\overline{Q_1} + \overline{Q_0})$$

Λύνοντας ως προς το άγνωστο Q_2 υπολογίζεται η μοναδική θέση που πρέπει να έχει το σημείο ώστε να υπάρχει και συνέχεια C^2.

Συνένωση καμπυλών Bezier

- Συνεπώς, κατά την κατασκευή μίας καμπύλης $Q^m(t)$ που πρόκειται να ενωθεί με μία δεδομένη καμπύλη $P^n(t)$ με παραμετρική συνέχεια C^i, η απαίτηση
  - C^0: δεσμεύει για την $Q^m(t)$ τη θέση ενός σημείου ελέγχου.
  - C^1: δεσμεύει για την $Q^m(t)$ τη θέση άλλου ένα σημείου ελέγχου (δύο συνολικά αφού για να υπάρχει C^1 πρέπει να υπάρχει πρώτα C^0).
  - C^2: δεσμεύει για την $Q^m(t)$ τη θέση άλλου ένα σημείου ελέγχου (τρία συνολικά αφού για να υπάρχει C^2 πρέπει να υπάρχει πρώτα C^0 και C^1).

Άσκηση 5: Συνένωση καμπυλών Bezier

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού P^3(t), με $t \in [0, 1]$ και σημεία ελέγχου $P_0(3,5)$, $P_1(1,4)$, $P_2(0,2)$ και $P_3(2,0)$. Επίσης, δίνεται καμπύλη Bezier 2ου βαθμού Q^2(t), με $t \in [2, 3]$ και σημεία ελέγχου $Q_0(8,0)$, $Q_1(11,1)$, και $Q_2(10,5)$. Υπολογίστε καμπύλη Bezier R(t), ελαχίστου βαθμού που έχει συνέχεια C^1 με την καμπύλη P^3(t), στο $P^3(1)$ και συνέχεια C^1 με την Q^2(t), στο $Q^2(2)$.

Λύση: Η καμπύλη $R(t)$ πρέπει να ορίζεται στο διάστημα $t \in [1, 2]$ ώστε να μπορεί να έχει συνέχεια με την P^3(t) στο t = 1 και με την Q^2(t) στο t = 2. Ο ελάχιστος βαθμός της $R(t)$ ώστε να ικανοποιεί και τις δύο συνέχειες με τις αντίστοιχες καμπύλες είναι n = 3, διότι για να έχει συνέχεια C^1 με την καμπύλη P^3(t), στο $P^3(1)$ απαιτείται ο ακριβής προσδιορισμός της θέσης 2 σ.ε. της $R(t)$. Αντίστοιχα, για να επιτευχθεί συνέχεια C^1 με την Q^2(t), στο $Q^2(2)$ απαιτείται ο προσδιορισμός άλλων δύο σ.ε. της $R(t)$. Συνεπώς απαιτούνται τουλάχιστον 4 σ.ε. για να υπολογιστεί η καμπύλη $R(t)$ με αυτές τις συνθήκες. Άρα πρέπει η καμπύλη να είναι 3 βαθμού.

Άσκηση 5: Συνένωση καμπυλών Bezier

- Πρέπει να υπολογιστούν τα σ.ε. της καμπύλης.
- Από την συνέχεια C^1 στο $P^3(1)$ θα υπολογιστούν τα δύο πρώτα σ.ε. της καμπύλης, τα R_0 και R_1. Για να εξασφαλιστεί η C^1 συνέχεια πρέπει πρώτα να εξασφαλιστεί συνέχεια C^0.
  - Από C^0 έχουμε: $P^3(1) = R^3(1) \Rightarrow P_3 = R_0 = (2,0)$
  - Από C^1 έχουμε: $\frac{d}{dt}P^3(1) = \frac{d}{dt}R^3(1) \Rightarrow 3(\overline{P_3} - \overline{P_2}) = \frac{1}{2-1}3(\overline{R_1} - \overline{R_0}) \Rightarrow$

$$\overline{R_1} = \overline{P_3} - \overline{P_2} + \overline{R_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Από την συνέχεια C^1 στο $Q^2(2)$ θα υπολογιστούν τα δύο τελευταία σ.ε. της καμπύλης, τα R_3 και R_2. Για να εξασφαλιστεί η C^1 συνέχεια πρέπει πρώτα να εξασφαλιστεί συνέχεια C^0.

Άσκηση 5: Συνένωση καμπυλών Bezier

- Από C^0 έχουμε: $R^3(2) = Q^2(2) \Rightarrow R_3 = Q_0 = (8,0)$

- Από C^1 έχουμε:

$$\frac{d}{dt}R^3(2) = \frac{d}{dt}Q^2(2) \Rightarrow \frac{1}{2-1}3(\overline{R_3} - \overline{R_2}) = \frac{1}{3-2}2(\overline{Q_1} - \overline{Q_0}) \Rightarrow$$

$$3\overline{R_2} = 3\overline{R_3} - 2\overline{Q_1} + 2\overline{Q_0} = 3\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{R_2} = \begin{pmatrix}6\\-2/3\end{pmatrix}$$

Άσκηση 6: Συνένωση καμπυλών Bezier

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού P^3(t), με $t \in [0, 1]$ και σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(2,2)$, $P_2(4,2)$ και $P_3(6,0)$. Υπολογίστε καμπύλη Bezier Q(t), 3ου βαθμού με $t \in [1, 2]$ που έχει συνέχεια C^2 με την καμπύλη P^3(t), στο $P^3(1)$.

Άσκηση 7: Συνένωση καμπυλών Bezier

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού $P^3(t)$, με $t \in [0, 1]$ και σημεία ελέγχου $P_0(0, 0)$, $P_1(0, 4)$, $P_2(4, 8)$ και $P_3(6, 6)$. Επίσης, δίνεται καμπύλη Bezier 3ου βαθμού $Q^3(t)$, με $t \in [1, 2]$ και σημεία ελέγχου $Q_0(6, 6)$, $Q_1(6, 4)$, $Q_2(8, 2)$ και $Q_3(12, 3)$.

(α) Τι είδους παραμετρική συνέχεια έχουν οι καμπύλες $P^3(t)$ και $Q^3(t)$; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

(β) Πόσα και ποια σημεία ελέγχου της καμπύλης $Q^3(t)$ πρέπει να αλλάξουν, ώστε οι καμπύλες $P^3(t)$ και $Q^3(t)$ να ενώνονται μεταξύ τους με παραμετρική συνέχεια C^1; Ποια είναι η νέα θέση των σημείων αυτών;

(γ) Πόσα και ποια σημεία ελέγχου της καμπύλης $Q^3(t)$ πρέπει να αλλάξουν, ώστε οι καμπύλες $P^3(t)$ και $Q^3(t)$ να ενώνονται μεταξύ τους με παραμετρική συνέχεια C^2; Ποια είναι η νέα θέση των σημείων αυτών;

Άσκηση 7: Συνένωση καμπυλών Bezier

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται καμπύλη Bezier P^3(t), με $t \in [0, 1]$ και σημεία ελέγχου $P_0(0, 0)$, $P_1(2, 2)$, $P_2(4, 2)$ και $P_3(6, 0)$. Επίσης, δίνεται καμπύλη Bezier R^2(t), με $t \in [2, 3]$ και σημεία ελέγχου $R_0(9,0)$, $R_1(11, 0)$, και $R_2(10, 2)$. Υπολογίστε ελαχίστου βαθμού καμπύλη Bezier Q(t), που έχει συνέχεια C^2 με την καμπύλη P^3(t), στο σημείο $P^3(1/2)$ και συνέχεια C^0 με την R^2(t) στο $R^2(2)$.

Βιβλιογραφία

- Γραφικά και Οπτικοποίηση – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Γ. Παπαϊωάννου, Ν. Πλατής, Ν. Μ. Πατρικαλάκης, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2010.
- Γραφικά – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Α. Μπεμ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999.