ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (11/17)

Όπως είδαμε διαισθητικά φαίνεται ότι η βέλτιστη λύση θα πρέπει να βρίσκεται όσο το δυνατόν προς τα πάνω και όσο το δυνατόν πιο δεξιά. Θα δούμε πως θα βρούμε ακριβώς ποια είναι η καλύτερη λύση. Η αντικειμενική συνάρτηση θα μπορούσε να γραφτεί στην μορφή

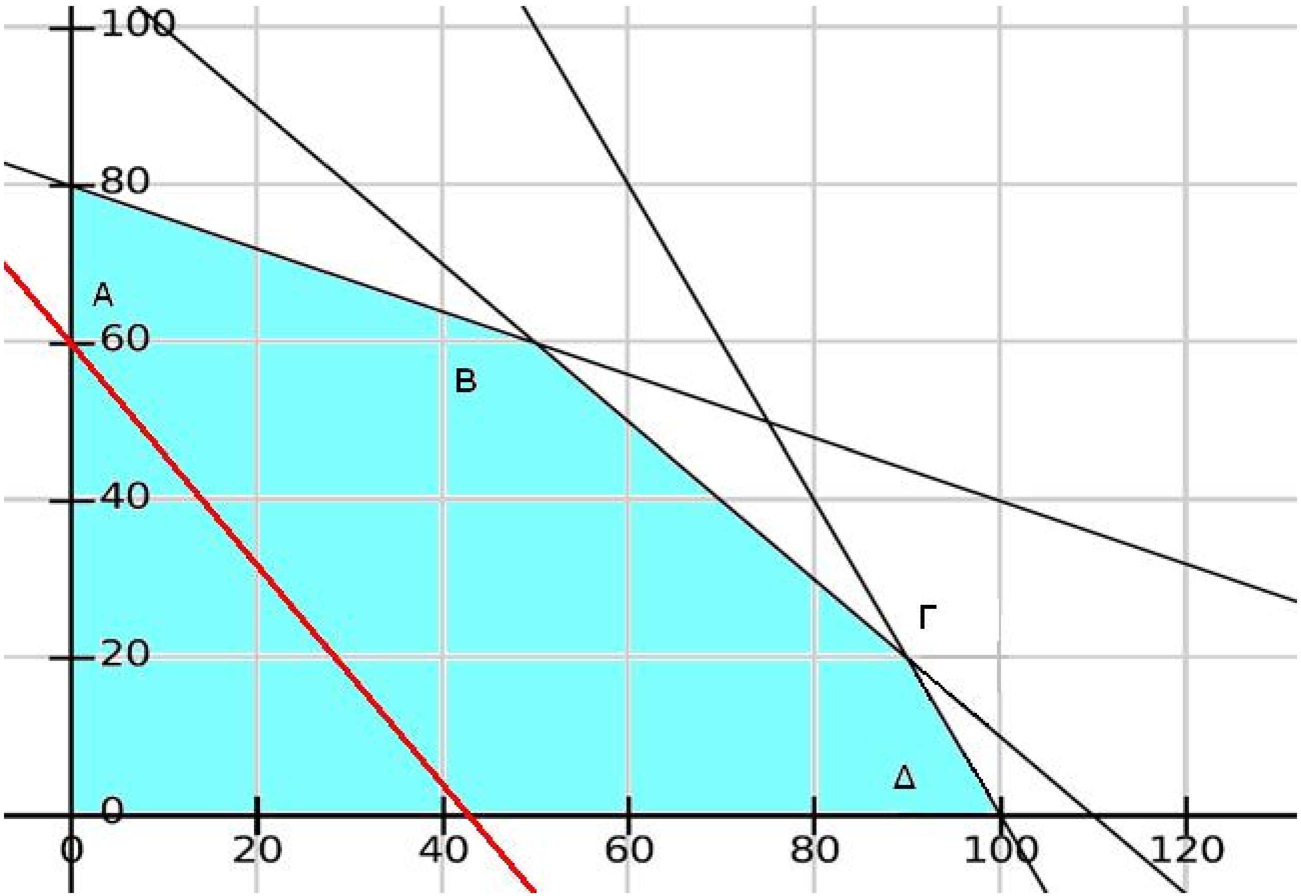
$$X_2 = (0.7/0.5)\cdot X_1 + z/0.5$$

Η εξίσωση αυτή αντιπροσωπεύει μια οικογένεια ευθειών που είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους έχοντας κλίση -0,7/0,5. Δίνοντας μια τιμή στο z η παραπάνω εξίσωση θα παριστάνει μια ευθεία με κλίση -0,7/0,5 που θα τέμνει τον άξονα X_2 στο Z/0,5.

Ας δώσουμε μια αυθαίρετη τιμή στο Z, έστω Z=30.

Η παραπάνω ευθεία θα γίνει $X_2 = -1.4\cdot X_1 + 60$. Αν σχεδιάσουμε επάνω στο διάγραμμα των εφικτών λύσεων (με την ίδια διαδικασία που σχεδιάσαμε τους περιορισμούς) θα προκύψει η το επόμενο σχήμα.

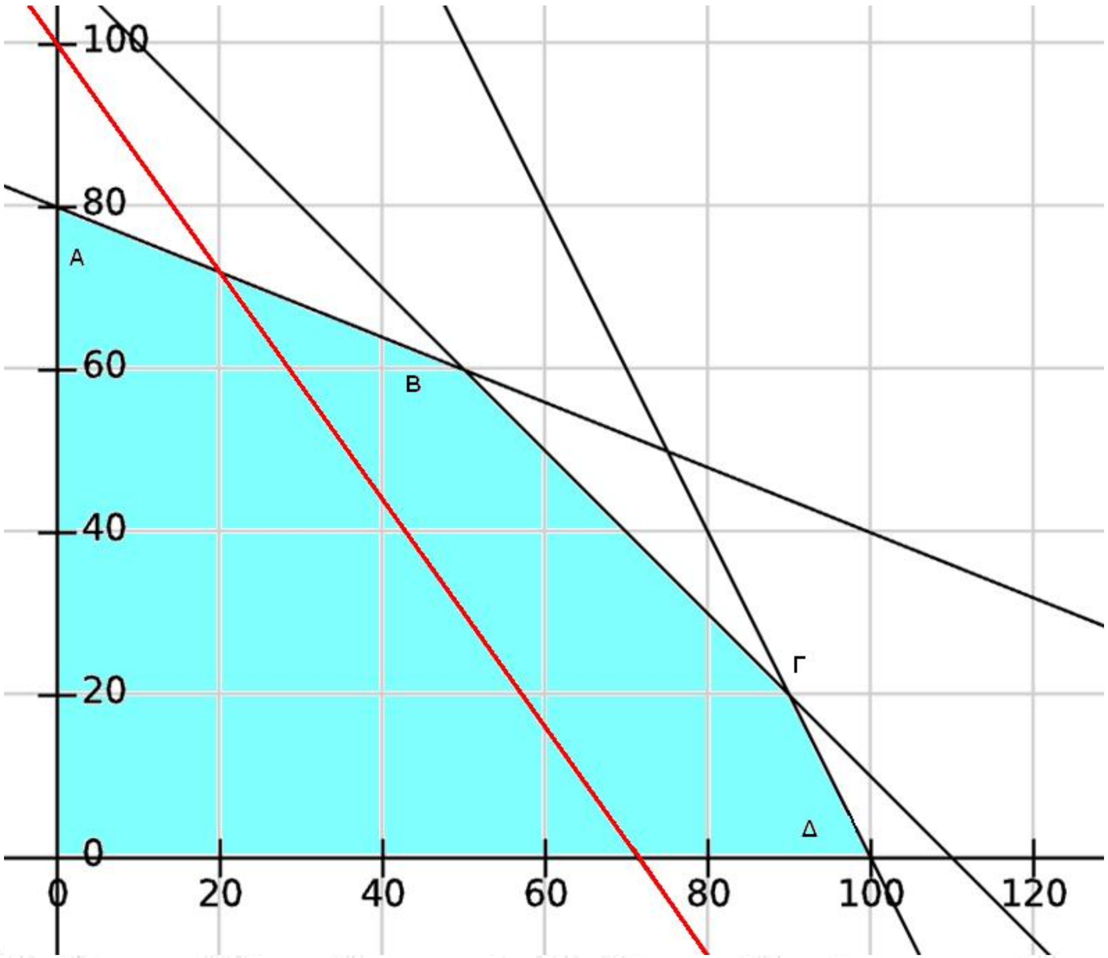
ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (12/17)



ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (13/17)

- Η κόκκινη ευθεία αντιπροσωπεύει την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης για z=30. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σημεία της ευθείας αυτής που βρίσκονται εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής αντιστοιχούν σε συνδιασμούς παραγωγής των δύο προϊόντων X_1 , X_2 που είναι εφικτές λύσεις και δίνουν κέρδος z=30. Υπάρχουν προφανώς άπειροι τέτοιοι συνδυασμοί. Το ερώτημα είναι αν το κέρδος αυτό μπορεί να αυξηθεί. Θέτοντας z=50 η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης θα γίνει $X_2 = -1.4 \cdot X_1 + 60$ οπότε και η ευθεία μετατοπίζεται παράλληλα προς τα επάνω και δεξιά.

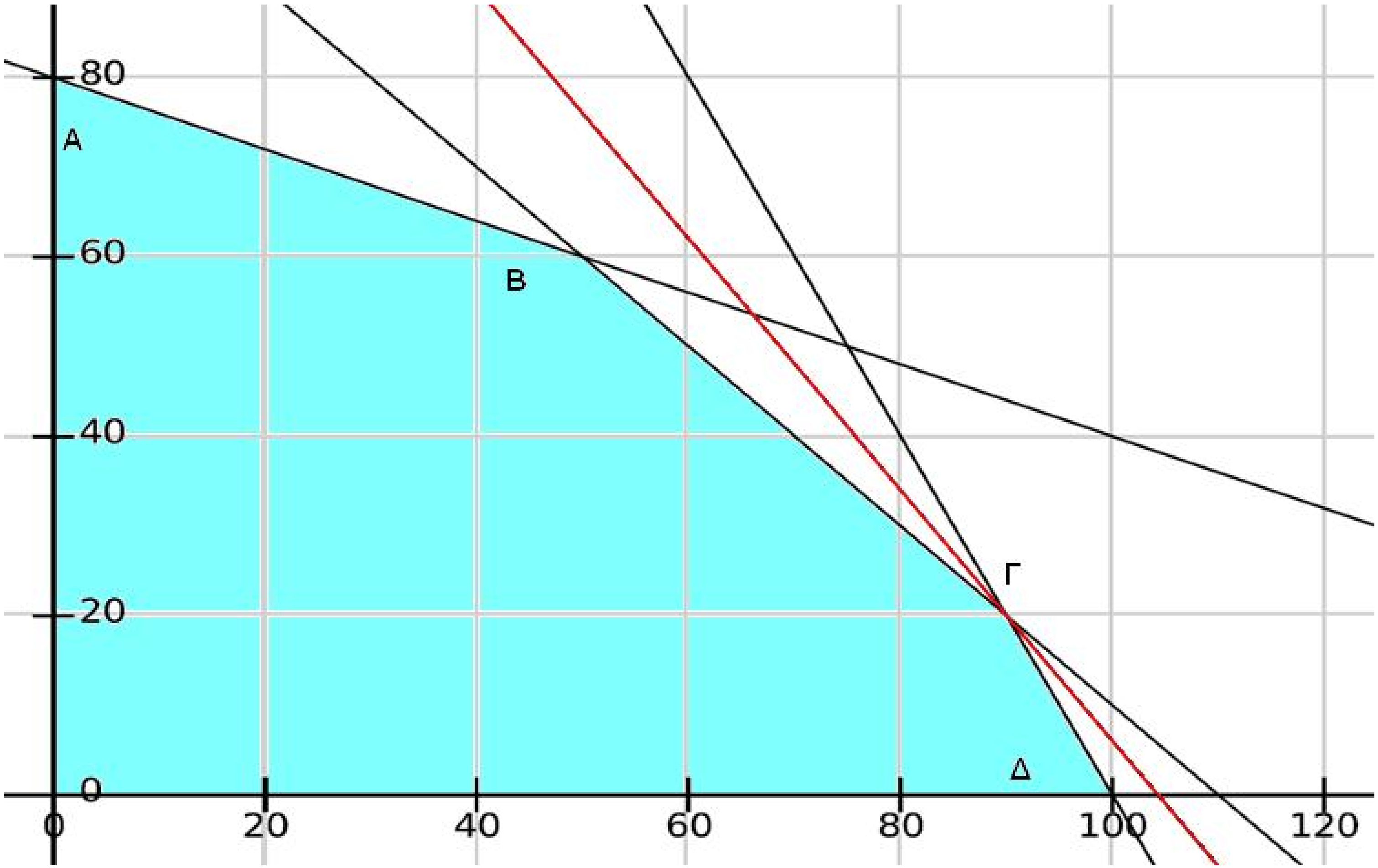
ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (14/17)



ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (15/17)

Όλα τα σημεία που βρίσκονται επάνω στην κόκκινη γραμμή και εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής αντιστοιχούν πλέον σε συνδυασμούς X_1 και X_2 που δίνουν κέρδος 50. Είναι προφανές ότι μπορούμε να μετακινήσουμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης προς την ίδια κατεύθυνση (επάνω και δεξιά) αυξάνοντας σταδιακά το z έτσι ώστε το πρόβλημα να συνεχίσει να έχει λύση. Η αύξηση αυτή όμως δεν μπορεί να συμβαίνει επ' αόριστο. Μπορεί να γίνεται όσο παραμένει κάποιο τμήμα της (κόκκινης) ευθείας εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Αυξάνοντας το z θα συνεχίζεται η μετατόπιση με διατήρηση κάποιου τμήματος της ευθείας εντός της περιοχής των εφικτών λύσεων έως ότου η ευθεία πλησιάσει στο σημείο Γ της περιοχής αυτής. Το σημείο Γ είναι το σημείο που η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης θα εγκαταλείψει την περιοχή των εφικτών λύσεων με περαιτέρω αύξηση του z.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (16/17)



ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (17/17)

Το σημείο Γ είναι σημείο τομής των ευθειών

$$4 \cdot X_1 + 4 \cdot X2 = 440$$

$$2 \cdot X_1 + X_2 = 200$$

Αν λύσουμε αυτό το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους προκύπτει ότι στο σημείο Γ είναι X1=90 και X2=20. Δηλαδή το κέρδος θα μεγισστοποιηθεί αν παραχθούν 90 συσκευασίες λίτρου χυμός πορτοκαλιού και 20 συσκευασίες λίτρου χυμός μήλου. Σε αυτή την περίπτωση το κέρδος θα είναι z=0,7*90+0,2*20=73 Ευρώ

ΣΗΜΕΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (1/5)

Εξετάζοντας το παραπάνω σχήμα προκύπτουν κάποια συμπεράσματα. Το βασικότερο είναι ότι η βέλτιστη λύση βρίσκεται στα όρια της περιοχής των εφικτών λύσεων και μάλιστα στις κορυφές του αντίστοιχου πολυγώνου (εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις που θα εξετάσουμε παρακάτω). Το γεγονός ότι η λύση ήταν στο σημείο Γ και όχι σε ένα από τα Α, Β ή Δ οφείλεται στην κλίση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης (-0,7/0,5) η οποία είναι στραμμένη κατά τέτοιον τρόπο ώστε το τελευταίο σημείο από το οποίο θα εγκαταλείψει την περιοχή εφικτών λύσεων καθώς θα αυξάνει το Ζ θα είναι το Β. Αν η κλίση ήταν διαφορετική τότε θα μπορούσε η βέλτιστη λύση να είναι σε μια άλλη κορυφή.

ΣΗΜΕΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (2/5)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αντί να μελετάμε την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης προκειμένου να οδηγηθούμε στην κορυφή του πολυγώνου που αντιστοιχεί στην βέλτιστη λύση, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το κέρδος σε όλες τις κορυφές και να επιλέξουμε την κορυφή με το υψηλότερο κέρδος. Κάθε κορυφή εκ των Α, Β, Γ και Δ προκύπτει είτε ως σημείο τομής δύο ευθειών που αντιστοιχούν σε περιορισμούς ή ως σημείο μιας ευθείς που αντιστοιχεί σε περιορισμό και σε έναν άξονα.

ΣΗΜΕΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (3/5)

Το σημείο Α είναι σημείο τομής της $X_1 + 2.5 \cdot X_2 = 200$ και του κάθετου άξονα. Οι συντεταγμένες του είναι (0,80). Το σημείο Β είναι σημείο τομής $4 \cdot X_1 + 4 \cdot X2 = 440$ και της

$$X_1 + 2.5 \cdot X_2 = 200$$

και οι συντεταγμένες του είναι (50,60). Το σημείο Γ υπολογίστηκε πριν με συντεταγμένες (90,20) και το σημείο Δ είναι σημείο τομής της $2 \cdot X_1 + X_2 = 200$ με τον οριζόντιο άξονα με συντεταγμένες (100,0). Για κάθε ένα από αυτά τα σημεία υπολογίζουμε το κέρδος που προκύπτει από την αντικειμενική συνάρτηση. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα κέρδη για κάθε έναν από τους συνδυασμούς X1 και X2 που αντιστοιχούν στις τέσσερις κορυφές. Και πάλι καταλήγουμε ότι στο σημείο Γ είναι ο βέλτιστος συνδιαμός που δίνει το καλύτερο κέρδος.

ΣΗΜΕΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (4/5)

ΚΟΡΥΦΗ	ΚΕΡΔΟΣ
Α (0,80)	40
Β (50,60)	65
Γ (90,20)	73
Δ (100,0)	70

ΣΗΜΕΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (5/5)

- Αν η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης συνέπιπτε με την κλίση μιας από τις περιοριστικές ευθείες τότε αυξάνοντας το Ζ η αντικειμενική συνάρτηση δεν θα εγκατέλειπε την περιοχή των εφικτών λύσεων «αγγίζοντας μια κορυφή» αλλά μια ολόκληρη ακμή. Αν π.χ. η αντικειμενική συνάρτηση ήταν $Z = 0.50 \cdot X_1 + 0,50 \cdot X_2$ (δηλαδή αν το μοναδιαίο κέρδος για την παραγωγή και πώληση μιας συσκευασίας ενός λίτρου χυμού πορτοκάλι ήταν 0,50 Ευρώ) τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα ήταν παράλληλη με την $4 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 = 140$

  και αυξάνοντας το Ζ θα εγκατέλειπε την περιοχή εφικτών λύσεων εφαπτόμενη στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Σε αυτή την περίπτωση θα υπήρχαν άπειρες βέλτιστες λύσεις. Κάθε δηλαδή ζεύγος σημείων Χ1, Χ2 επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ θα έδινε ίδιο κέρδος. Το κέρδος στο Β θα ήταν ίσο με το κέρδος στο Γ. Αν επομένως δεν μελετήσουμε την κλίση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης και απλά ελέγξουμε το κέρδος σε κάθε κρυφή, τότε αν σε δυο διαδοχικές κορυφές βρούμε ίδιο κέρδος σημαίνει ότι υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις (τα σημεία δηλαδή που βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από δύο διαδοχικές κορυφές που δίνουν ίδιο κέρδος)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ένα ζαχαροπλαστείο προμηθεύεται ζάχαρη και γάλα για την παραγωγή διάφορων γεύσεων παγωτού. Τα μόνα συστατικά που έχουν κόστος είναι η ζάχαρη και το γάλα, ενώ τα υπόλοιπα συστατικά που απαιτούνται, το ζαχαροπλαστείο τα αποκτά χωρίς κόστος λόγω μεγάλης υπερπροσφοράς. Το κόστος απόκτησης της ζάχαρης είναι 0,80 Ευρώ το κιλό ενώ το κόστος απόκτησης του γάλακτος είναι 1,20 Ευρώ το λίτρο. Μικρό μέρος του κόστους αγοράς υλικών αφορά σε ένα ειδικό τέλος για τα ζαχαροπλαστεία. Συγκεκριμένα το 3/4 του κόστους αγοράς ζάχαρης αφορά στο ειδικό τέλος και το 1/3 του κόστους της αγοράς του γάλακτος αφορά το ειδικό τέλος. Υπάρχει όμως ένα ελάχιστο ποσό ειδικού τέλους που το ζαχαροπλατείο είναι υποχρεωμένο να καλύπτει εβδομαδιαίως ανεξάρτητα από την ποσότητα προμήθειας και είναι ίσο με 3 Ευρώ (διαφορετικά υπάρχουν κυρώσεις) γεγονός που οδηγεί ούτως ή άλλως στην αγορά κάποιας ποσότητας πρώτων υλών. Η προμήεθεια των δύο πρώτων υλών πραγματοποιείται από τον ίδιο προμηθευτή ο οποίος παρέχει ένα πρόγραμμα επιβράβευσης. Συγκεκριμένα για την αγορά κάθε κιλού ζάχαρης παρέχει ένα πόντο επιβράβευσης ενώ για την αγορά κάθε λίτρου γάλακτος παρέχει 5 πόντους επιβράβευσης. Το ζαχαροπλιαστείο επιθυμεί να συγκεντρώσει τουλάχιστον 18 πόντους την επόμενη εβδομάδα προκειμένου να αποκτήσει κάποια ειδικά προνόμια. Για την παρασκευή μιας συσκευασίας παγωτού λεμόνι απαιτούνται 6 λίτρα γάλακτος ενώ δεν χρησιμοποιείται ζάχαρη λόγω χρήσης άλλης γλυκαντικής ουσίας που το ζαχαροπλαστείο διαθέτει σε άφθονη ποσότητα χωρίς κόστος. Λόγω παραγγελιών που έχουν γίνει για την επόμενη εβδομάδα το ζαχαροπλαστείο θα πρέπει να παρασκευάσει τουλαχιστον 12 μεγάλες συσκευασίες παγωτό λεμόνι ενώ δεν υπάρχουν άλλες παραγγελίες που να την δεσμεύουν. Όμως οποιαδήποτε ποσότητα παραχθεί πέραν των ελάχιστων απαιτούμενων από τις παραγγελίες είναι δεδομένο ότι θα πουληθεί λόγω μεγάλης ζήτησης. Για λόγους ρευστότητας το ζαχαροπλαστείο επιθυμεί να παρασκευάσει τέτοια ποσότητα ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος αγοράς πρώτων υλών ικανοποιώντας όμως τις απαιτήσεις του ειδικού τέλους, και ταυτόχρονα αποκτώντας το επιθυμητό μπόνους και ικανοποιώντας την ζήτηση.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (1/6)

Ο στόχος του προβλήματος είναι προφανώς η ελαχιστοποίηση του κόστους προμήθειας πρώτων υλών. Το κόστος προμήθειας πρώτων υλών εξαρτάται από την ποσότητα ζάχαρης και γάλακτος που θα αγοραστούν. Επομένως οι μεταβλητές απόφασης θα είναι:

X1: ποσότητα ζάχαρης που θα αγοραστεί για την παραγωγή παγωγού την επόμενη εβδομάδα

X2: ποσότητα ζάχαρης που θα αγοραστεί για την παραγωγή παγωγού την επόμενη εβδομάδα

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (2/6)

Έχοντας προσδιορίσει τις μεταβλητές απόφασης η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι:

$$z = 0.80 \cdot X_1 + 1.20 \cdot X_2$$

η οποία θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Οι περιορισμοί προκύπτουν από τις απαιτήσεις για κάποια ελάχιστη αγορά που προσδιορίζεται από το ειδικό τέλος, την συγκέντρωση πόντων και την κάλυψη της ζήτησης σε παγωτό λεμόνι.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (3/6)

Ο πρώτος περιορισμός προκύπτει από το γεγονός ότι θα πρέπει να γίνει τόση αγορά πρώτων υλών ώστε να καλυφθεί η απαίτηση για πληρωμή ειδικού τέλους.

Για κάθε ένα κιλό ζάχαρης που αγοράζεται και πληρώνεται με 0,80 Ευρώ τα 3/4*0,80=0,60 Ευρώ αφορούν στο ειδικό τέλος ενώ για κάθε ένα λίτρο γάλακτος που αγοράζεται και πληρώνεται με 1,20 Ευρώ τα 1/3*1,20=0,40 Ευρώ αφορουν στο ειδικό τέλος. Επομένως το συνολικό ειδικό τέλος που θα πληρώσει το ζαχαροπλαστείο αν αγοράσει X_1 κιλά ζάχαρης και X_2 λίτρα γάλακτος είναι $0.6 \cdot X_1 + 0.4 \cdot X_2$ τα οποία θα πρέπει να είναι ίσα με τουλάχιστον 3 Ευρώ. Επομένως:

$$0.6 \cdot X_1 + 0.4 \cdot X_2 \geq 3$$

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (4/6)

Ο δεύτερος περιορισμός αφορά στην απαίτηση για συγκέντρωση τουλάχιστον 180 πόντων επιβράβευσης από την αγορά πρώτων υλών. Για κάθε κιλό ζάχαρης που αγοράζεται συγκεντρώνεται 1 πόντος επιβράβευσης ενώ για κάθε λίτρο ζάχαρης που αγοράζεται συγκεντρώνονται 5 πόντοι επιβράβευσης. Ο περιορισμός επομένως που προκύπτει είναι:

$$X_1 + 5 \cdot X_2 \geq 18$$

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (5/6)

Ο τελευταίος περιορισμός αφορά στην απαίτηση της ικανοποίησης της παραγγελίας για το παγωτό λεμόνι. Έχει γίνει παραγγελία για 12 συσκευασίες παγωτού λεμόνι και κάθε μια από αυτές απαιτεί 6 λίτρα γάλακτος. Επομένως θα είναι

$$6 \cdot X_2 \geq 12$$

Επίσης επειδή τα X_1 και X_2 αφορούν σε ποσότητα παραγγελίας δεν μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές. Επομένως θα ισχύει και πάλι $X_1 \geq 0$ και $X_2 \geq 0$ (φυσικοί περιορισμοί)

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (6/6)

Το μοντέλο του προβλήματος έχει τελικά ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\min z = 0.80 \cdot X_1 + 1.20 \cdot X_2 \\
&\upsilon.\pi. \\
&0.6 \cdot X_1 + 0.4 \cdot X_2 \geq 3 \\
&\quad X_1 + \quad 5 \cdot X_2 \geq 18 \\
&\qquad\qquad 6 \cdot X_2 \geq 12 \\
&\quad X_1 \qquad\qquad \geq 0 \\
&\qquad\qquad\quad X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$