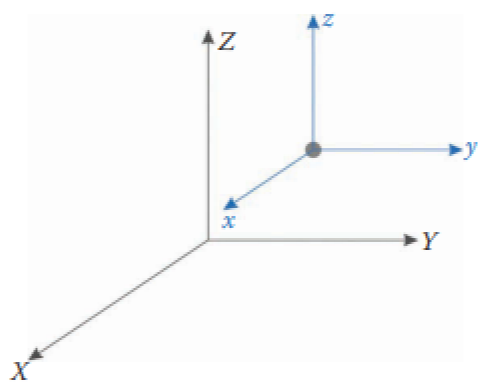
Βαθμοί Ελευθερίας

Κατά το σχεδιασμό ενός μηχανισμού, είναι συχνά σημαντικό να γνωρίζουμε την κινητικότητά του ή τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας (degrees of freedom - DOF) που διαθέτει. Μερικοί μηχανισμοί έχουν τόσους συνδέσμους και αρθρώσεις που είναι αδύνατο να προσδιορίσουμε με μια ματιά αν είναι ικανοί να κινηθούν. Για να προσδιορίσουμε την κινητικότητα ενός μηχανισμού, ορίζουμε τον αριθμό των DOF ως:

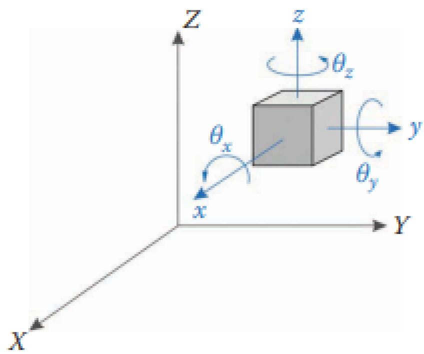
DOF = αριθμός ανεξάρτητων συντεταγμένων που απαιτούνται για τον πλήρη καθορισμό του προσανατολισμού ενός αντικειμένου στο χώρο.

Φανταστείτε μια σημειακή μάζα σε τρισδιάστατο χώρο όπως αυτή που φαίνεται στην εικόνα 1. Το σημείο είναι ελεύθερο να κινείται προς τρεις κατευθύνσεις: x, y και z. Θα χρειαστούν τρεις συντεταγμένες για να προσδιοριστεί πλήρως η θέση της σημειακής μάζας. Επομένως, έχει τρεις DOF.



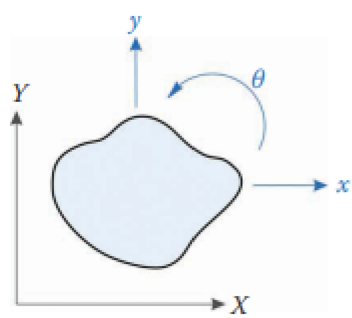
Εικόνα 1 Ένα σημείο στον τρισδιάστατο χώρο έχει τρεις DOF: τρεις μεταφορές.

Τώρα φανταστείτε ένα άκαμπτο σώμα σε τρισδιάστατο χώρο. Το σώμα μπορεί να μεταφερθεί προς τις ίδιες τρεις κατευθύνσεις με τη σημειακή μάζα, αλλά μπορεί επίσης να περιστρέφεται γύρω από τους τρεις άξονές του όπως φαίνεται στην εικόνα 2. Για να καθοριστεί η διαμόρφωση του άκαμπτου σώματος απαιτούνται έξι συντεταγμένες: τρεις μεταφορές και τρεις περιστροφές. Έτσι, ένα άκαμπτο σώμα στον τρισδιάστατο χώρο έχει έξι DOF.



Εικόνα 2 Ένα άκαμπτο σώμα στον τρισδιάστατο χώρο έχει έξι DOF: τρεις μεταφορές και τρεις περιστροφές

Για το μεγαλύτερο μέρος αυτού του μαθήματος, θα περιοριστούμε στον 2D (επίπεδο) χώρο. Θα μπορέσουμε να γενικεύσουμε πολλές από τις έννοιες που αναπτύσσουμε σε 3D, αλλά η παραμονή σε 2D θα απλοποιήσει σημαντικά τις παρουσιάσεις. Επιπλέον, ένας πολύ μεγάλος αριθμός ενδιαφερόντων μηχανισμών είναι ουσιαστικά επίπεδοι, παρά χωρικοί. Μια σημαντική εξαίρεση είναι ο τομέας της σχεδίασης αναρτήσεων αυτοκινήτων. Όπως φαίνεται στην εικόνα 3, ένα άκαμπτο σώμα σε 2D χώρο έχει τρεις DOF: δύο μεταφορές και μία περιστροφή



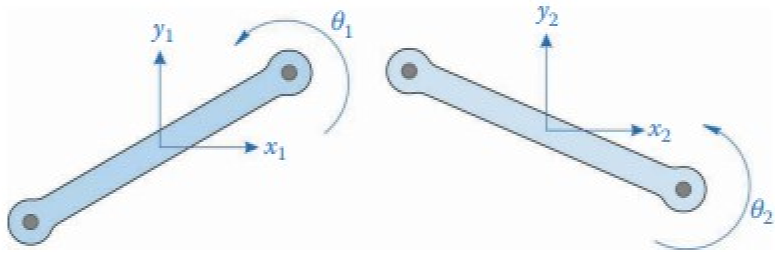
Εικόνα 3 Ένα δισδιάστατο άκαμπτο σώμα έχει τρεις DOF.

1. Κινητικότητα μηχανισμών

Με δύο σώματα (συνδέσμους) έχουμε έξι DOF, αφού κάθε σώμα έχει τρεις δικούς του (Εικόνα 4). Μπορούμε να το γενικεύσουμε λέγοντας

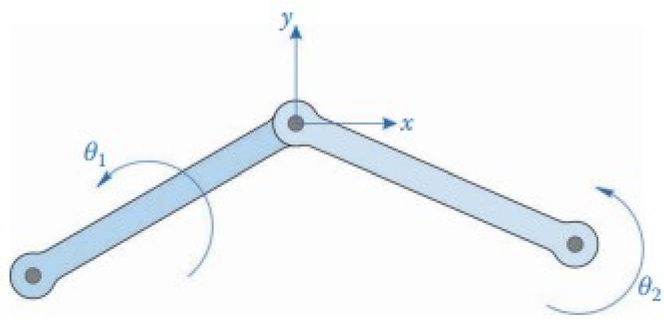
DOF = 3L (1)

όπου L είναι ο αριθμός των συνδέσμων.



Εικόνα 4 Δύο σύνδεσμοι έχουν έξι DOF: τέσσερις μεταφορές και δύο περιστροφές.

Τι γίνεται όμως αν συνδέσουμε τους δύο συνδέσμους με μια άρθρωση; (Εικόνα 5). Η προσθήκη της άρθρωσης περιορίζει τη μεταφορά κάθε συνδέσμου στη θέση της άρθρωσης χωρίς να περιορίζει την περιστροφή κάθε συνδέσμου. Υποδηλώστε αυτή τη θέση (x_1, y_1) στον σύνδεσμο 1 και (x_2, y_2) στον σύνδεσμο 2.



Εικόνα 5 Μια άρθρωση αφαιρεί δύο DOF.

Στη συνέχεια, για την άρθρωση ακίδων, έχουμε:

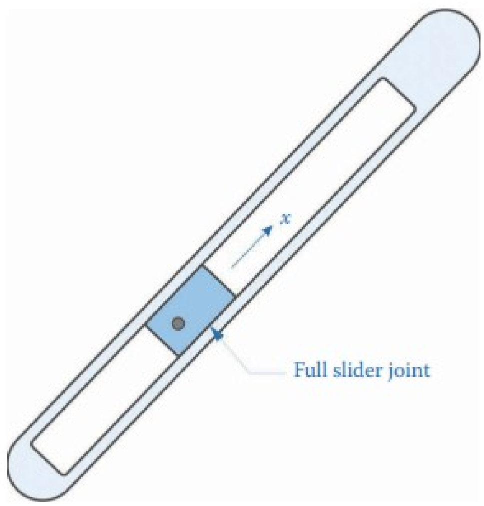
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x \\ y_1 = y_2 = y \end{cases} \tag{2}$$

Φαίνεται τώρα ότι οι συντεταγμένες x_2, y_2 (ή x_1, y_1) δεν είναι ανεξάρτητες. Στην πραγματικότητα, έχουν εξαλειφθεί ως DOF. Έτσι, η προσθήκη μιας άρθρωσης αφαιρεί δύο DOF από έναν μηχανισμό.

$$DOF = 3L - 2J_p \tag{3}$$

όπου J_p είναι ο αριθμός των αρθρώσεων. Όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα, μια άρθρωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για να αρθρώσετε δύο συνδέσμους μεταξύ τους. Για να συνδέσετε τρεις συνδέσμους σε ένα σημείο απαιτούνται δύο αρθρώσεις (δηλαδή, ένας πείρος για τη σύνδεση των συνδέσμων 1 και 2 και ένας άλλος πείρος για τη σύνδεση των συνδέσμων 1 και 3).

Ένας άλλος κοινός τύπος αρμού είναι ο πλήρης ολισθητήρας (full slider) ή έμβολο σε κύλινδρο. Η εικόνα 6 δείχνει ένα μπλοκ που είναι τοποθετημένο μέσα σε μια υποδοχή σε μια σύνδεση. Το μπλοκ δεν είναι ελεύθερο να περιστρέφεται και δεν μπορεί να κινηθεί σε κατεύθυνση κάθετη προς την υποδοχή.



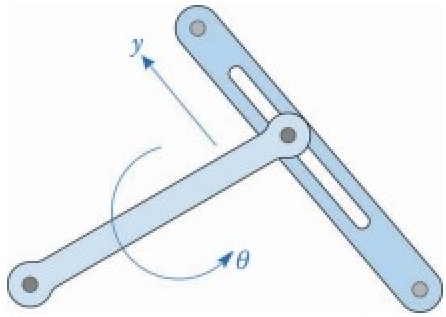
Εικόνα 6 Ο πλήρης ολισθητήρας αφαιρεί δύο DOF.

Έτσι, βάζοντας το έμβολο στον κύλινδρο του έχουν αφαιρεθεί επίσης δύο DOF.

$$DOF = 3L-2J_p-2J_{fs} \quad (4)$$

Το "fs" στο J_{fs} σημαίνει "πλήρης ολισθητήρας". Θέλουμε να το αντιπαραβάλουμε με την άρθρωση "μισού ολισθητήρα" που φαίνεται παρακάτω.

Στην άρθρωση μισού ολισθητήρα, που φαίνεται στην Εικόνα 7, ο πείρος είναι ελεύθερος να κινείται κατά μήκος της σχισμής και ο σύνδεσμος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον πείρο. Έτσι, ο μισός ολισθητήρας, J_{hs}, αφαιρεί μόνο ένα DOF: εμποδίζει τον πείρο να κινηθεί σε κατεύθυνση κάθετη προς την υποδοχή.

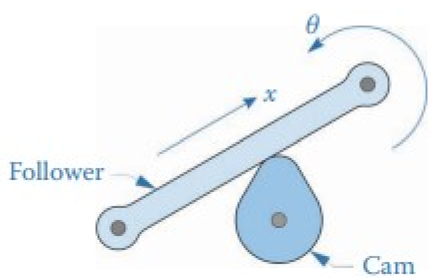


Εικόνα 7 Ο μισός ολισθητήρας αφαιρεί μόνο ένα DOF

Συνεπώς:

$DOF = 3L\text{-}2J_p\text{-}2J_{fs}\text{-}J_{hs}$ (5)

Ένα άλλο παράδειγμα μισού ολισθητήρα είναι το παράδειγμα έκκεντρου-ακόλουθου, που φαίνεται στην εικόνα 8. Ένα έκκεντρο είναι ένα περιστρεφόμενο σώμα με ένα καλά καθορισμένο σχήμα που έχει σχεδιαστεί για να έρχεται σε συνεχή επαφή με ένα άλλο σώμα (τον ακόλουθο) και του μεταδίδει μια συγκεκριμένη κίνηση. Στην εικόνα 8, το έκκεντρο έχει σχήμα αυγού και αναγκάζει τον ακόλουθο να κινείται πάνω-κάτω καθώς περιστρέφεται. Το κάτω κάτω μπορεί να γλιστρήσει εμπρός και πίσω κατά μήκος του έκκεντρου και μπορεί επίσης να περιστραφεί. Ο ακόλουθος δεν μπορεί, ωστόσο, να περάσει μέσα από το έκκεντρο, γεγονός το οποίο αφαιρεί ένα DOF. Έτσι, η άρθρωση έκκεντρου-ακόλουθου είναι πανομοιότυπη με τον ημι-ολισθητήρα. Σημειώστε ότι έχουμε υποθέσει ότι το έκκεντρο παραμένει σε επαφή με τον ακόλουθο ανά πάσα στιγμή. αν χαθεί η επαφή τότε η άρθρωση δεν υπάρχει πλέον!



Εικόνα 8 Ένας συνδυασμός έκκεντρου-ακολούθου είναι ένα άλλο παράδειγμα συνδέσμου μισού ολισθητήρα.

Τέλος, σημειώνουμε ότι ένας γειωμένος σύνδεσμος (αυτός που είναι σταθερός στο χώρο) έχει απωλέσει και τους τρεις DOF, όπως φαίνεται στην εικόνα 9. Κάθε μηχανισμός έχει έναν γειωμένο σύνδεσμο, ενώ όλοι οι άλλοι σύνδεσμοι μπορούν να κινηθούν, συμπληρώνοντας την εξίσωση του Gruebler που παρουσιάζεται στην Εξίσωση (6).

Εικόνα 9 Ο γειωμένος σύνδεσμος έχει μηδενικούς DOF

$$DOF = 3L - 2J_p - 2J_{fs} - J_{hs} - 3G \quad (6)$$

όπου G είναι ο αριθμός των γειωμένων συνδέσμων. Στην περίπτωση που ολόκληρος ο μηχανισμός κινείται, όπως στον κινητήρα ενός αυτοκινήτου, επιλέγουμε έναν σύνδεσμο (συνήθως το μπλοκ τoy κινητήρα) ως γειωμένο και αναλύουμε την κίνηση των υπόλοιπων συνδέσμων σε σχέση με αυτόν. Δεδομένου ότι όλοι οι γειωμένοι σύνδεσμοι σε έναν μηχανισμό έχουν την ίδια κίνηση (δηλαδή μηδέν), συνήθως τους συγκεντρώνουμε ως έναν ενιαίο σύνδεσμο, έτσι ώστε G=1

$$DOF = 3(L-1) - 2J_p - 2J_{fs} - J_{hs} \quad (7)$$

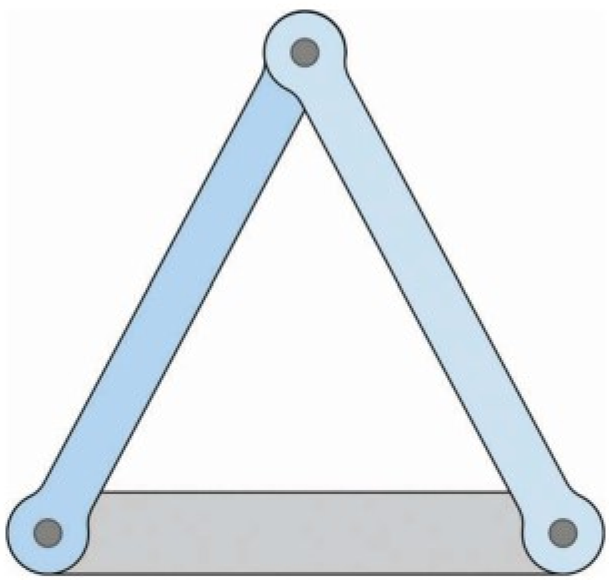
Για το υπόλοιπο αυτού του μαθήματος θα υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας και μόνο ένας γειωμένος σύνδεσμος. Η εξίσωση (7) είναι γνωστή ως «τροποποιημένη εξίσωση Gruebler» και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της κινητικότητας οποιασδήποτε δισδιάστατης σύνδεσης.

Ένας μηχανισμός με μηδενικό DOF δεν είναι καθόλου μηχανισμός, αφού δεν μπορεί να κινηθεί. Όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, συνήθως επιθυμούμε η κινητικότητα ενός μηχανισμού να είναι ένα. Εάν θέλουμε να ελέγξουμε τη θέση κάθε τμήματος της σύνδεσης, πρέπει να παρέχουμε έναν ενεργοποιητή (π.χ. έναν κινητήρα, έναν πνευματικό κύλινδρο κ.λπ.) για κάθε DOF. Εφόσον οι ενεργοποιητές προσθέτουν κόστος και πολυπλοκότητα στον μηχανισμό, στόχος μας πρέπει να είναι να επιτύχουμε την επιθυμητή κίνηση με τον μικρότερο δυνατό αριθμό DOF. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως οι ρομποτικοί βραχίονες, μια κινητικότητα μεγαλύτερη από 1 είναι αναπόφευκτη και θα απαιτήσει πολλαπλούς ενεργοποιητές. Για το μεγαλύτερο μέρος αυτού του μαθήματος, θα επικεντρωθούμε σε μηχανισμούς με ένα μόνο DOF, αλλά οι μέθοδοι που παρουσιάζονται εδώ μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε συστήματα πολλαπλών DOF.

2. Παραδείγματα προβλημάτων υπολογισμού βαθμών ελευθερίας

Παράδειγμα 1: Μηχανισμός τριών συνδέσμων

Ο μηχανισμός στην εικόνα 10 έχει τρεις συνδέσμους, ένας από τους οποίους είναι γειωμένος. Υπάρχουν τρεις αρθρώσεις και δεν υπάρχουν πλήρεις ή ημι-ολισθητήρες.



Εικόνα 10 Μηχανισμός 3 ραβδών

Έτσι, έχουμε

$L = 3$

$J_p=3$

$J_{fs} = 0$

$J_{hs} = 0$

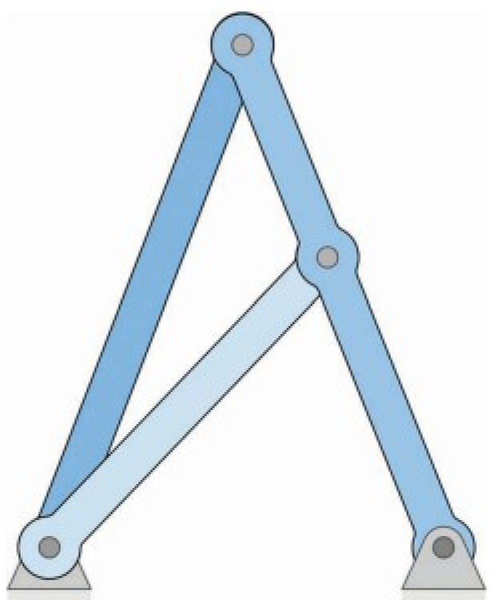
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(3-1)-2(3)=0$

Εφόσον DOF = 0, ο μηχανισμός δεν μπορεί να κινηθεί, και επομένως ονομάζεται "δομή". Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι το σχήμα του συνδέσμου των τριών ράβδων είναι ένα τρίγωνο. Δεδομένου ότι το τρίγωνο έχει μια εγγενώς άκαμπτη δομή (δηλαδή μηδενική κινητικότητα), χρησιμοποιείται συχνά ως θεμελιώδες στοιχείο σε δοκούς και πλαίσια. Για τους σκοπούς μας, όμως, ο μηχανισμός τριών ραβδών έχει ελάχιστο ενδιαφέρον. Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι κανένας από τους τρεις συνδέσμους δεν μπορεί να μετακινηθεί, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και οι τρεις είναι μέρη ενός ενιαίου συνδέσμου «γείωσης».

Παράδειγμα 2

Η εικόνα 11 δείχνει μια μέθοδο για την κατασκευή μιας σύνδεσης τεσσάρων ράβδων. Υπάρχουν τέσσερις σύνδεσμοι, συμπεριλαμβανομένου του γειωμένου συνδέσμου. Θυμηθείτε ότι οι δύο γειωμένες αρθρώσεις μετρούν ως ένας σύνδεσμος, αφού έχουν την ίδια (μηδενική) κίνηση!



Εικόνα 11 Ένας τρόπος κατασκευής μιας σύνδεσης τεσσάρων ράβδων.

Μπορεί να φανεί με την πρώτη ματιά ότι υπάρχουν τέσσερις αρθρώσεις, αλλά παρατηρήστε ότι ο κάτω αριστερός πείρος συνδέει δύο συνδέσμους με τη γείωση, επομένως μετράει ως δύο αρθρώσεις. Επομένως, υπάρχουν συνολικά πέντε αρθρώσεις. Δεν υπάρχουν ολισθητήρες, έτσι ώστε να έχουμε

L = 4

J_p=5

J_{fs} = 0

J_{hs} = 0

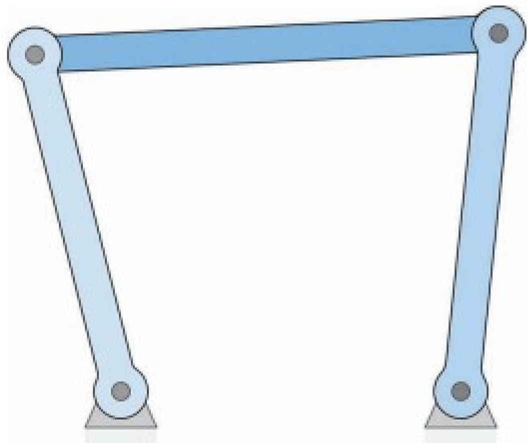
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(4-1)-2(5)=-1$

Δεδομένου ότι DOF=−1, ο μηχανισμός δεν μπορεί να κινηθεί και ονομάζεται «δομή προφόρτισης». Για να δείτε γιατί, φανταστείτε να προσπαθείτε να συναρμολογήσετε τη δομή: πρώτα, συνδέουμε τους πιο εξωτερικούς συνδέσμους στη γείωση και, στη συνέχεια, μαζί στις ανώτατες οπές τους. Όταν προσπαθούμε να καρφιτσώσουμε τον κεντρικό σύνδεσμο μεταξύ των εξωτερικών συνδέσμων, οποιοδήποτε κατασκευαστικό σφάλμα θα τον αποτρέψει από την εφαρμογή - ειδικά επειδή υποθέτουμε άκαμπτους συνδέσμους! Δηλαδή, η απόσταση μεταξύ των δύο οπών πρέπει να είναι ακριβώς ίδια με το μήκος του συνδέσμου, κάτι που είναι αδύνατο στην πράξη. Αν πιέσουμε τον σύνδεσμο δύναμης για να χωρέσει, θα αναγκαστούμε να λυγίσουμε (προφορτίσουμε) τον εξωτερικό δεξιό σύνδεσμο. Αυτός είναι ο λόγος για την αρνητική τιμή DOF. Κάθε πρόσθετο αρνητικό DOF σημαίνει ότι ένας άλλος σύνδεσμος πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση του, εκτός εάν οι οπές των πείρων είναι υπερμεγέθεις έτσι ώστε οι αρθρώσεις να έχουν μια «χαλαρή» εφαρμογή.

Παράδειγμα 3

Η εικόν 12 δείχνει έναν δεύτερο τρόπο κατασκευής μιας σύνδεσης τεσσάρων ράβδων



Εικόνα 12 Ένας καλύτερος τρόπος κατασκευής μιας σύνδεσης τεσσάρων ράβδων.

Εδώ, έχουμε τέσσερις συνδέσμους (συμπεριλαμβανομένης της γείωσης) και μόνο τέσσερις αρθρώσεις. Ετσι,

$L = 4$

$J_p=4$

$J_{fs} = 0$

$J_{hs} = 0$

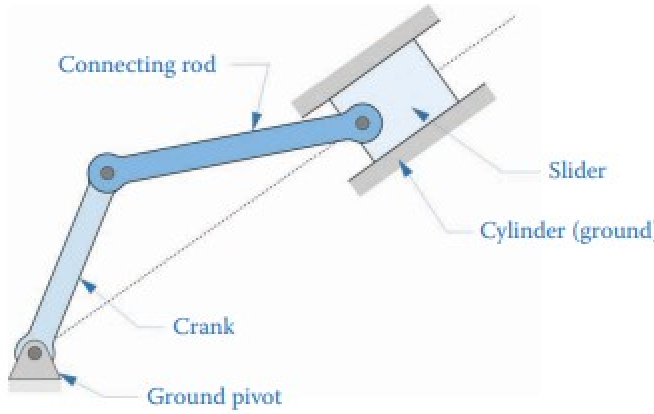
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(4-1)-2(4)=1$

Ο σωστά συναρμολογημένος σύνδεσμος τεσσάρων ράβδων έχει ένα DOF, που σημαίνει ότι αρκεί μία συντεταγμένη για να καθορίσει τη διαμόρφωση ολόκληρης της σύνδεσης. Θα έχουμε πολλά να πούμε για τη σύνδεση των τεσσάρων ράβδων στα επόμενα.

Παράδειγμα 4

Ένας άλλος πολύ συνηθισμένος μηχανισμός είναι αυτός ολισθητήρα-μανιβέλας, που φαίνεται στην εικόνα 13. Αυτός ο μηχανισμός βρίσκεται μέσα σε μονοκύλινδρους κινητήρες όπως αυτοί που βρίσκονται σε χλοοκοπτικό ή αλυσοπρίονο. Ο μηχανισμός έχει δύο συνηθισμένους συνδέσμους, τον στρόφαλο και τη μπιέλα, και έναν ολισθητήρα ή έμβολο. Συμπεριλαμβανομένου του εδάφους, υπάρχουν τέσσερις σύνδεσμοι συνολικά.



Εικόνα 13 Ο μηχανισμός ολισθητήρα-μανιβέλας αποτελείται από ολισθητήρα, στρόφαλο, μπιέλα και κύλινδρο

Ο μηχανισμός έχει τρεις συνδέσμους πείρων και το έμβολο κινείται σε έναν σύνδεσμο πλήρους ολίσθησης. Έτσι, έχουμε:

$L = 4$

$J_p=3$

$J_{fs} = 1$

$J_{hs} = 0$

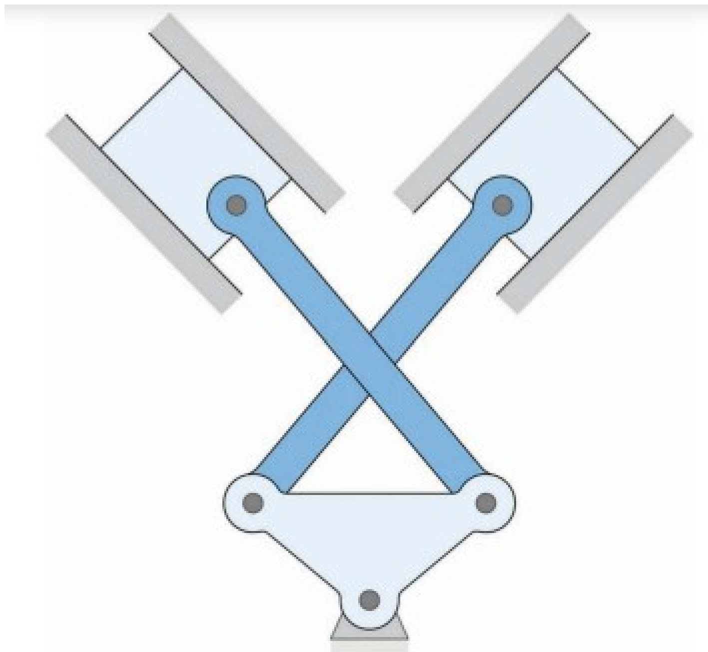
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(4-1)-2(3+1)=1$

Όπως και ο σύνδεσμος τεσσάρων ράβδων, ο μηχανισμός έχει ένα DOF. Αν καθορίσουμε τη γωνία του στρόφαλου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις θέσεις της μπιέλας και του εμβόλου

Παράδειγμα 5

Η εικόνα 14 δείχνει έναν μηχανισμό διπλού ολισθητήρα-μανιβέλας, όπως μπορεί να βρεθεί σε έναν πολυκύλινδρο κινητήρα. Είναι το ίδιο με τον μονό ολισθητήρα-μανιβέλα του Παραδείγματος 4, αλλά έχει δύο έμβολα, δύο μπιέλες και ένα στρόφαλο με μια πρόσθετη οπή πείρου.



Εικόνα 14 Ο διπλός ολισθητήρας-μανιβέλα.

Συμπεριλαμβανομένης της γείωσης, ο αριθμός των συνδέσμων είναι έξι και υπάρχουν πέντε αρθρώσεις. Έτσι:

$L = 6$

$J_p=5$

$J_{fs} = 2$

$J_{hs} = 0$

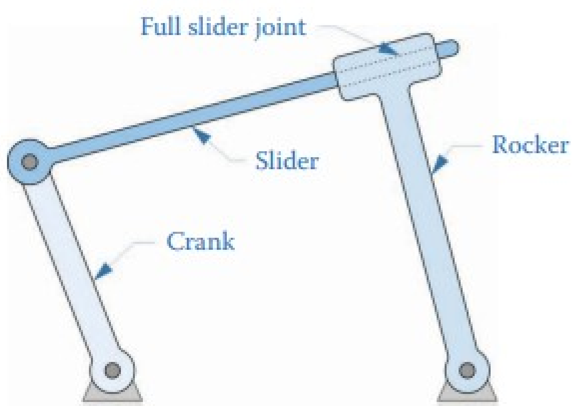
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(6-1)-2(5+2)=1$

Ο διπλός ολισθητήρας-μανιβέλα έχει επίσης ένα DOF, που σημαίνει ότι η γωνία στροφάλου είναι επαρκής για τον προσδιορισμό των θέσεων και των δύο εμβόλων. Εάν δεν ήταν έτσι, τότε δεν θα ήταν δυνατό να χρονομετρηθεί ένας κινητήρας, δηλαδή να χρονομετρηθεί η πυροδότηση κάθε μπουζί όταν το αντίστοιχο έμβολό του φτάσει στο επιθυμητό ύψος στον κύλινδρο.

Παράδειγμα 6

Ο μηχανισμός στην εικόνα 15 μπορεί να φαίνεται περίεργος στην αρχή, αλλά είναι εκπληκτικά κοινός. Ο ανεστραμμένος μηχανισμός ολισθητήρα-μανιβέλας, εμφανίζεται συχνότερα σε αντλίες ποδηλάτου που λειτουργούν με πόδι, αλλά μπορεί επίσης να βρεθεί ως ανάρτηση «γόνατου McPherson» σε πολλά αυτοκίνητα. Όπως φαίνεται στην εικόνα, ο σύνδεσμος αποτελείται από μια μανιβέλα, ένα ολισθητήρα και έναν παλινδρομητή, όπου ο ολισθητήρας και ο βραχίονας συνδέονται μέσω ενός συνδέσμου πλήρους ολίσθησης. Όπως και με τον μηχανισμό ολισθητήρα-μανιβέλας, υπάρχουν τέσσερις σύνδεσμοι (συμπεριλαμβανομένης της γείωσης), τρεις αρθρώσεις και ένας πλήρης ολισθητήρας.



Εικόνα 15 Ο ανεστραμμένος μηχανισμός ολισθητήρα-μανιβέλας

Έτσι:

$L = 4$

$J_p=3$

$J_{fs} = 1$

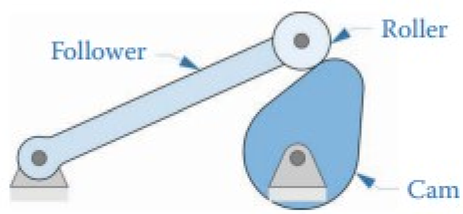
$J_{hs} = 0$

Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(4-1)-2(3+1)=1$

Παράδειγμα 7

Ένας μηχανισμός έκκεντρου-ακολούθου φαίνεται στην εικόνα 16. Καθώς το έκκεντρο περιστρέφεται, ο κύλινδρος περιστρέφεται στον πείρο της άρθρωσης του, ο οποίος είναι προσαρτημένος στον ακόλουθο. Υπάρχουν τέσσερις σύνδεσμοι στον μηχανισμό: έκκεντρο, κύλινδρος, ακόλουθος και γείωση. Υπάρχουν τρεις αρθρώσεις και ένας μισός ολισθητήρας μεταξύ του έκκεντρου και του κυλίνδρου.



Εικόνα 16 Ο ακόλουθος περιστρέφεται στον πείρο γείωσης του καθώς το έκκεντρο περιστρέφεται.

Έτσι:

$L = 4$

$J_p=3$

$J_{fs} = 0$

$J_{hs} = 1$

Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

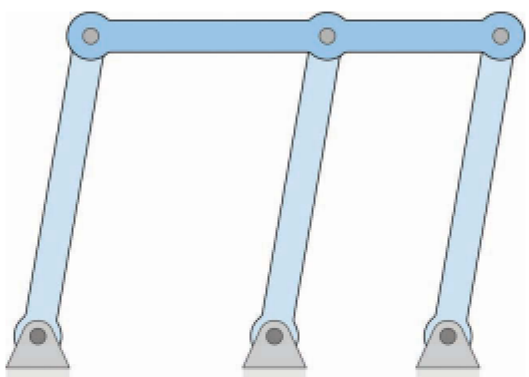
$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(4-1)-2(3)-1=2$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να σας εκπλήξει, καθώς φαίνεται ότι η περιστροφική θέση του έκκεντρου θα πρέπει να καθορίζει τη διαμόρφωση ολόκληρου του μηχανισμού. Ωστόσο, εάν κρατήσουμε το έκκεντρο σταθερό, μπορούμε ακόμα να περιστρέψουμε τον κύλινδρο και ο κύλινδρος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε γωνιακή συντεταγμένη χωρίς να επηρεάσει το υπόλοιπο σύστημα. Ως εκ τούτου, οι δύο DOF είναι οι γωνιακές συντεταγμένες του έκκεντρου και του κυλίνδρου.

Από αυτό το παράδειγμα, βλέπουμε ότι η εξίσωση του Gruebler είναι ένας καλός «έλεγχος λογικής» για το σχεδιασμό, αλλά ο σχεδιαστής θα πρέπει πάντα να φροντίζει να ταιριάζει τον αριθμό DOF που προκύπτει με τις πραγματικές κινήσεις του μηχανισμού.

Παράδειγμα 8

Η εικόνα 17 δείχνει μια σύνδεση πέντε ράβδων διατεταγμένη σε παραλληλόγραμμη μορφή.



Εικόνα 17 Ένας άλλος σύνδεσμος πέντε ράβδων διατεταγμένος σε παραλληλόγραμμο

Υπάρχουν πέντε σύνδεσμοι και έξι αρθρώσεις έτσι ώστε,

$L = 5$

$J_p=6$

$J_{fs} = 0$

$J_{hs} = 0$

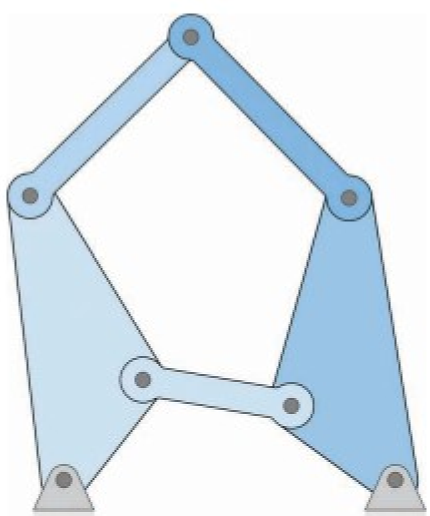
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(5-1)-2(6)=0$

Η εξίσωση του Gruebler προβλέπει ότι ο μηχανισμός έχει μηδενικούς DOF και δεν μπορεί να κινηθεί, αλλά η διαίσθησή μας φαίνεται να δείχνει ότι μπορεί να κινηθεί. Στην πραγματικότητα, φαίνεται να είναι πανομοιότυπο με τον μηχανισμό κίνησης που παρατηρήθηκε στις ατμομηχανές από το 1800. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως Gruebler's Paradox και ενισχύει την ιδέα ότι πρέπει πάντα να συνοδεύουμε τους υπολογισμούς μας για τους DOF με μια υγιή δόση σκεπτικισμού και διαίσθησης. Για να κατασκευάσουμε τον μηχανισμό θα χρειαστεί να πιέσουμε τον τελικό σύνδεσμο στη θέση του, εκτός εάν οι αρμοί των πείρων έχουν αρκετή κλίση για να επιτρέπεται η εύκολη εισαγωγή. Εάν οι αρμοί των πείρων έχουν μια σφιχτή εφαρμογή, ο μηχανισμός θα είχε κάποια δυσκολία να κινηθεί, όπως προβλέπει η εξίσωση DOF. Η δημιουργία κάποιου «παιχνιδιού» στις αρθρώσεις μας δίνει τον μηχανισμό ενός DOF που προβλέπει η διαίσθησή μας.

Παράδειγμα 9

Η εικόνα 18 δείχνει μια διαμόρφωση της σύνδεσης έξι ράβδων Stephenson. Δύο από τους συνδέσμους έχουν τρεις αρθρώσεις, ενώ οι άλλοι σύνδεσμοι έχουν δύο. Υπάρχουν έξι σύνδεσμοι στον μηχανισμό, συμπεριλαμβανομένης της γείωσης, και επτά αρθρώσεις.



Εικόνα 18 Ένας σύνδεσμος έξι ράβδων Stephenson Type I

L = 6

J_p=7

J_{fs} = 0

J_{hs} = 0

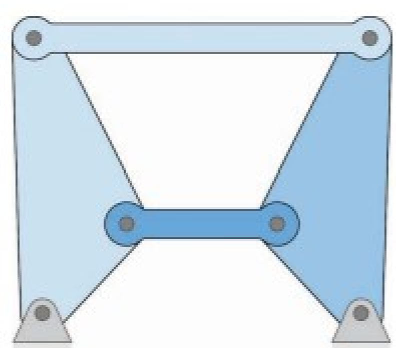
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

DOF = $3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(6-1)-2(7)=1$

Παραδόξως, αυτή η περίπλοκη σύνδεση έχει μόνο ένα DOF. Η σύνδεση έξι ράβδων βρίσκει πολλές εφαρμογές στη δημιουργία συναρτήσεων και σε πρώιμους «μηχανικούς υπολογιστές».

Παράδειγμα 10

Ο μηχανισμός στην εικόνα 19 φαίνεται παρόμοιος με το Stephenson sixbar, αλλά έχει έναν σύνδεσμο λιγότερο



Εικόνα 19 Μια σύνδεση πέντε ράβδων

L = 5

J_p=6

J_{fs} = 0

J_{hs} = 0

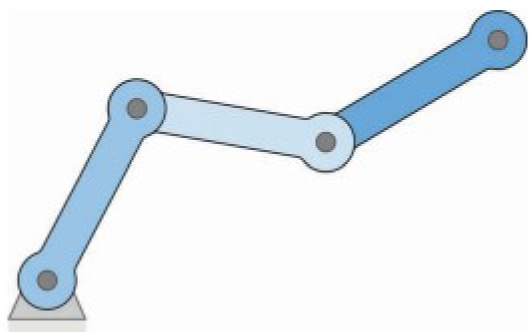
Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(5-1)-2(6)=0$

Φαίνεται ότι η αφαίρεση του έκτου συνδέσμου έχει οδηγήσει σε μια δομή, παρά σε έναν μηχανισμό

Παράδειγμα 11

Η εικόνα 20 δείχνει έναν ρομποτικό βραχίονα με τρία τμήματα. Υπάρχουν τέσσερις σύνδεσμοι (συμπεριλαμβανομένης της γείωσης) και τρεις αρθρώσεις.



Εικόνα 20 Ένας ρομποτικός βραχίονας με τρία τμήματα.

$L = 4$

$J_p=3$

$J_{fs} = 0$

$J_{hs} = 0$

Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Gruebler δίνει

$DOF = 3(L-1)-2J_p-2J_{fs}-J_{hs}=3(4-1)-2(3)=3$

Ο παραπάνω ρομποτικός βραχίονας έχει τρεις DOF, που σημαίνει ότι χρειαζόμαστε τρεις συντεταγμένες (γωνίες) για να καθορίσουμε μοναδικά τη διαμόρφωση του βραχίονα. Ως σχεδιαστές, αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον τρεις κινητήρες ή ενεργοποιητές για τον έλεγχο του βραχίονα. Ορισμένες επιλογές περιλαμβάνουν σερβοκινητήρες ή βηματικούς κινητήρες σε κάθε άρθρωση, υδραυλικούς ή πνευματικούς κύλινδρους σε κάθε άρθρωση, μηχανισμούς κίνησης με μπίλια και πολλά άλλα.