

Πολλαπλοί περιορισμοί ελαφριά, ανθεκτική και άκαμπτη ράβδος σύνδεσης



1^{ος} περιορισμός: $\sigma \leq \sigma_f \Rightarrow \frac{F}{A} \leq \sigma_f \Rightarrow \frac{FL\rho}{m} \leq \sigma_f \Rightarrow m_1 \geq FL \left(\frac{\rho}{\sigma_f} \right)$

στόχος: $m = \rho AL$ → ελεύθερη μεταβλητή

2^{ος} περιορισμός: $\frac{F}{\delta l} \geq S^* \Rightarrow \frac{F}{\varepsilon L} \geq S^* \Rightarrow \frac{\sigma A}{\varepsilon L} \geq S^* \Rightarrow \frac{Em}{\rho L^2} \geq S^* \Rightarrow m_2 \geq \frac{L^2}{S^*} \left(\frac{\rho}{E} \right)$

δείκτες απόδοσης υλικού: $M_1 = \frac{\sigma_f}{\rho} \quad M_2 = \frac{E}{\rho}$

Πολλαπλοί περιορισμοί γενική θεώρηση

αν ο κυριάρχος περιορισμός είναι η αντοχή η μάζα είναι m_1 – αν είναι η ακαμψία η μάζα είναι m_2 · αν η ράβδος πρέπει να καλύπτει τους δύο περιορισμούς ταυτόχρονα, τότε θα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη των δύο: $\tilde{m} = \max(m_1, m_2)$

παράδειγμα προβλήματος ελάχιστου – μέγιστου: ψάχνουμε την ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους που είναι το μέγιστο δύο ή περισσότερων εναλλακτικών

αναλυτική μέθοδος: τα αναλυτικά εργαλεία για την λύση των προβλημάτων ελάχιστου – μέγιστου αναφέρονται σε μεγέθη που είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών (εδώ, ρ , σ_f , E)· τα υλικά δεν έχουν συνεχείς τιμές αυτών των μεταβλητών κι επομένως το πρόβλημα είναι διακριτό και θα πρέπει να γίνει καταγραφή σε πίνακα και επιλογή της ελάχιστης από τις μέγιστες τιμές

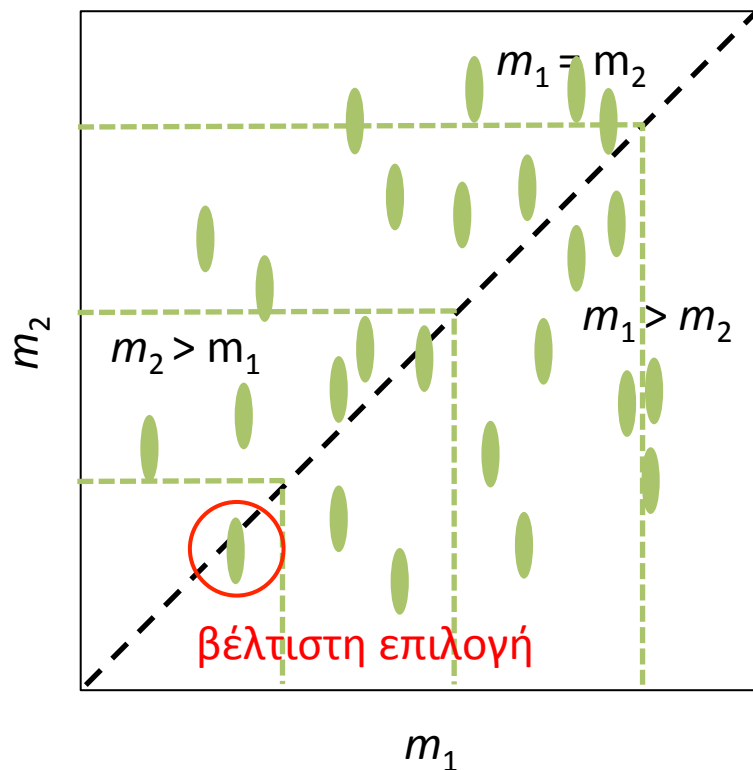
έστω $L = 1\text{m}$, $S^* = 3 \times 10^7 \text{ N/m}$, $F = 10^5 \text{ N}$ – για τρία κοινά υλικά (χάλυβας 1020, αλουμίνιο 6061, τιτάνιο Ti-6-4) προκύπτει ο εξής πίνακας

Υλικό	ρ (kg/m ³)	E (GPa)	σ_f (MPa)	m_1 (kg)	m_2 (kg)	\tilde{m}
1020	7850	200	320	1.12	2.45	2.45
6061	2700	70	120	1.16	2.25	2.25
Ti-6-4	4400	115	950	1.15	0.46	1.15

για $L = 3\text{m}$, $S^* = 10^8 \text{ N/m}$, $F = 3 \times 10^4 \text{ N}$ η επιλογή αλλάζει!

Πολλαλοί περιορισμοί γραφική μέθοδος

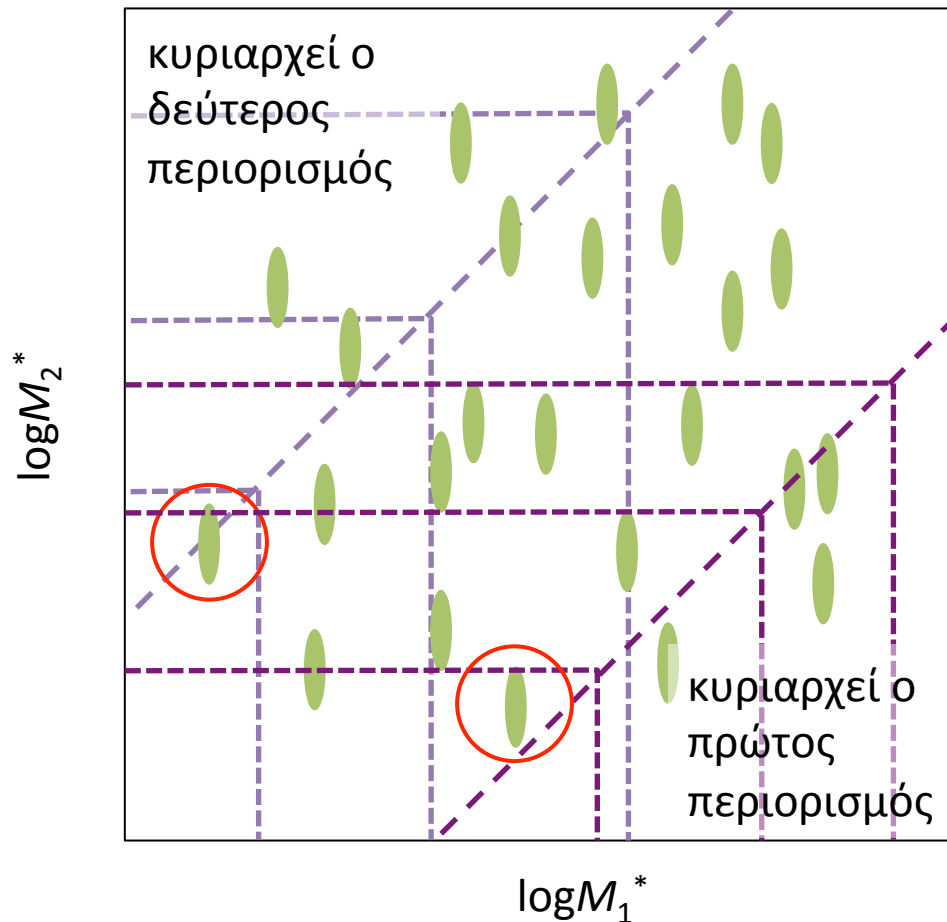
έστω ότι τοποθετούμε τα υλικά σε
διάγραμμα βάσει των τιμών m_1, m_2



η ευθεία $m_1 = m_2$ χωρίζει το διάγραμμα
σε μια περιοχή που κυριαρχεί ο
περιορισμός ακαμψίας ($m_2 < m_1$) και μια
που κυριαρχεί ο περιορισμός αντοχής
($m_1 > m_2$). αυτό ορίζει μια ορθογώνια
περιοχή επιλογής με κορυφή την ευθεία
 $m_1 = m_2$ – όμως το διάγραμμα αντιστοιχεί
σε συγκεκριμένες τιμές για τις
παραμέτρους L, S^*, F

εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί
διάγραμμα με άξονες τους
(αντίστροφους) δείκτες απόδοσης ($M_1^*,$
 M_2^*)

Πολλαπλοί περιορισμοί καλύτερη γραφική μέθοδος

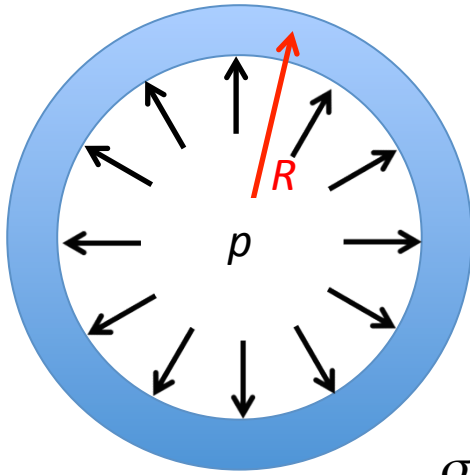


$$m_2 = m_1 \Rightarrow \frac{L^2}{S^*} \frac{\rho}{E} = FL \frac{\rho}{\sigma_f} \Rightarrow M_2^* = \frac{FS^*}{L} M_1^*$$

η ευθεία $m_1 = m_2$ αντιστοιχεί σε μια γραμμική σχέση μεταξύ των δεικτών απόδοσης και ο συντελεστής αναλογίας είναι η σταθερά συσχέτισης

για κάθε τιμή της σταθεράς συσχέτισης προκύπτει και μια ευθεία, η *ευθεία συσχέτισης*, στο διάγραμμα $\log M_1^* - \log M_2^*$ (επιλέγονται οι αντίστροφοι δείκτες απόδοσης για λόγους οπτικής συνέπειας ως προς τον στόχο – ελαχιστοποίηση)

Πολλαπλοί περιορισμοί ελαφρύ σφαιρικό δοχείο πίεσης (1)



στόχος: $m = 4\pi R^2 t \rho$

1^{ος} περιορισμός:

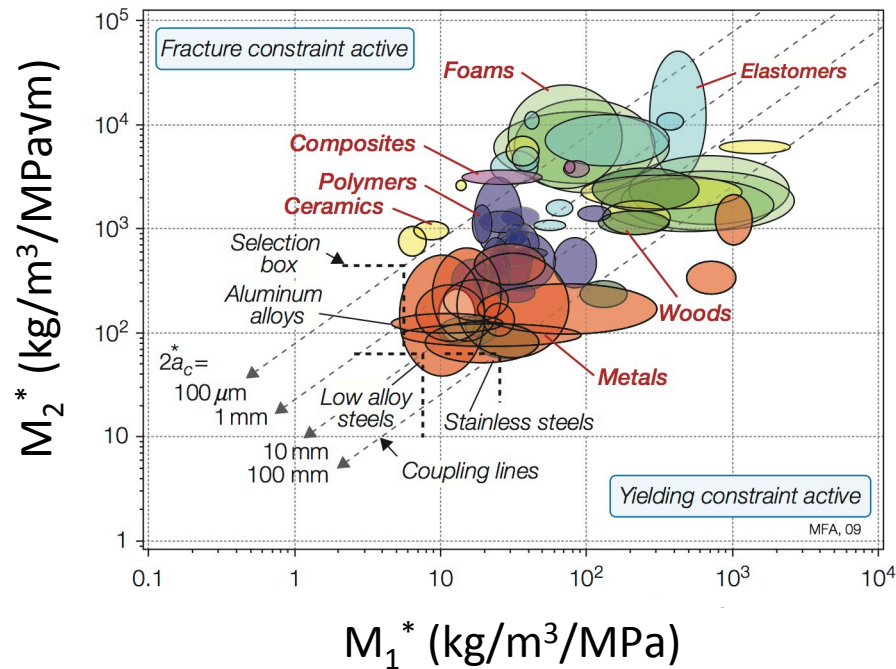
$$\sigma_{\theta} \leq \sigma_f \Rightarrow \frac{pR}{2t} \leq \sigma_f \Rightarrow \frac{4\pi R^3 p \rho}{2m} \leq \sigma_f \Rightarrow m_1 \geq 2\pi R^3 p \frac{\rho}{\sigma_f}$$

2^{ος} περιορισμός:

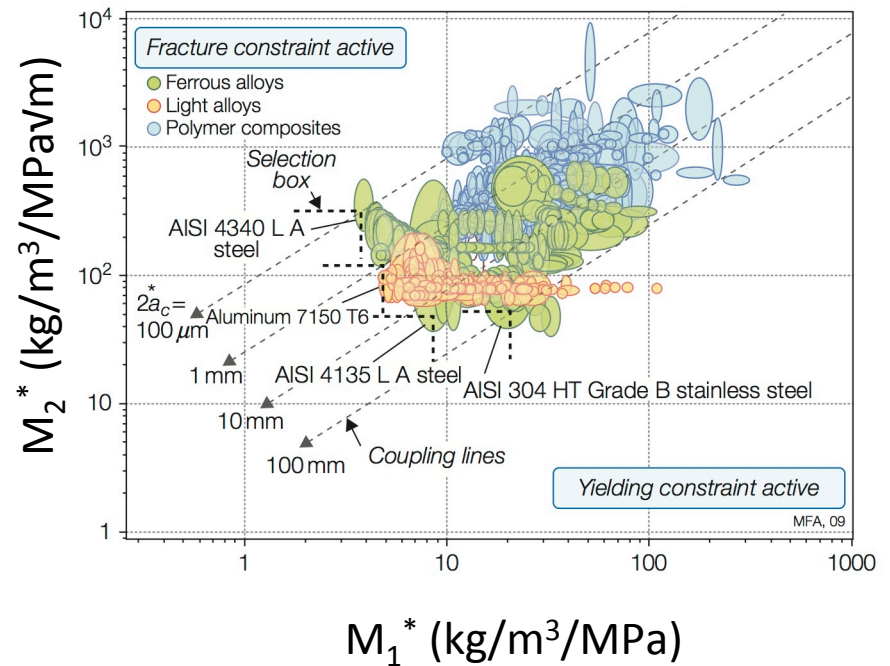
$$\sigma_{\theta} \leq K_{Ic} \sqrt{\pi \alpha} \Rightarrow \frac{pR}{2t} \leq \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \alpha}} \Rightarrow \frac{4\pi R^3 p \rho}{2m} \leq \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \alpha}} \Rightarrow m_2 \geq 2\pi R^3 p \sqrt{\pi \alpha} \frac{\rho}{K_{Ic}}$$

$$m_2 = m_1 \Rightarrow 2\pi R^3 p \sqrt{\pi \alpha} \frac{\rho}{K_{Ic}} = 2\pi R^3 p \frac{\rho}{\sigma_f} \Rightarrow M_2^* = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} M_1^*$$

Πολλαπλοί περιορισμοί ελαφρύ σφαιρικό δοχείο πίεσης (2)



επιλογή υλικού για διαφορετικές τιμές της μέγιστης ρωγμής (αδρομερώς) για ρωγή $2\alpha = 0.1, 1, 10$ και 100 mm

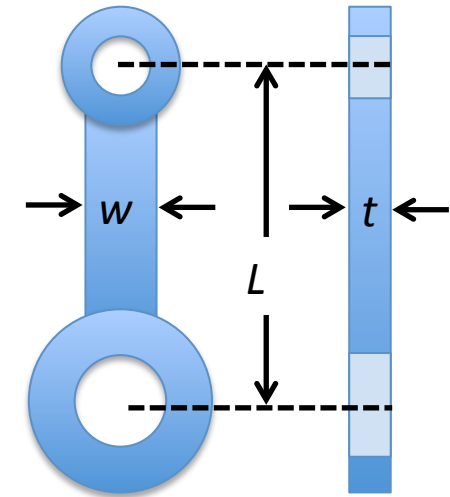
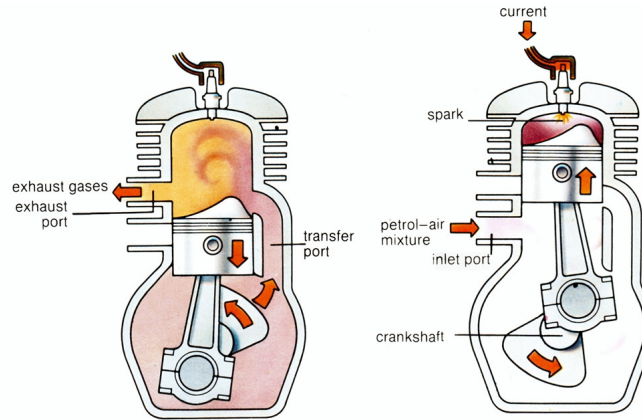


λεπτομερής επιλογή μέσα από τα υλικά που προέκυψαν στην αδρομερή

Πολλαπλοί περιορισμοί διωστήρας για κινητήρες υψηλής απόδοσης (1)



στόχος: $m = \beta AL\rho$



1^{ος} περιορισμός (κόπωση):

$$\sigma \leq \sigma_e \Rightarrow \frac{F}{A} \leq \sigma_e \Rightarrow \frac{F\beta L\rho}{m} \leq \sigma_e \Rightarrow m_1 \geq F\beta L \frac{\rho}{\sigma_e}$$

2^{ος} περιορισμός (λυγισμός):

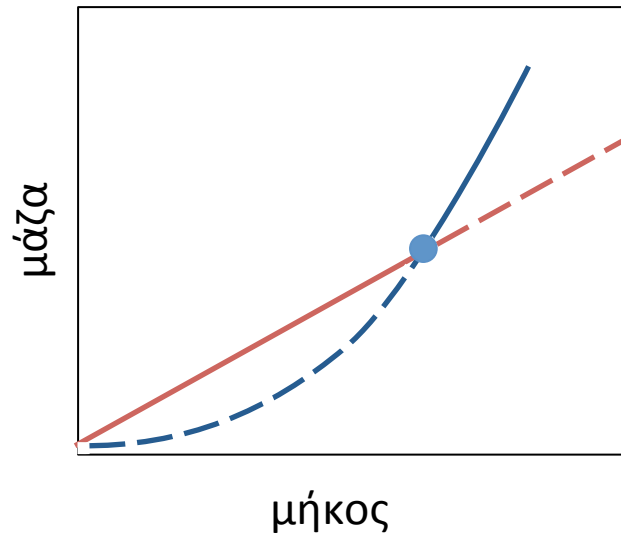
$$F \leq F_c \Rightarrow F \leq \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow F \leq \frac{\pi^2 Ewt^3}{12L^2} \Rightarrow m_2 \geq \beta \left(\frac{12F}{a\pi^2} \right)^{1/2} L^2 \frac{\rho}{E^{1/2}}$$

$$m_2 = m_1 \Rightarrow \beta \left(\frac{12F}{a\pi^2} \right)^{1/2} L^2 \frac{\rho}{E^{1/2}} = F\beta L \frac{\rho}{\sigma_e} \Rightarrow M_2^* = \left(\frac{a\pi^2 F}{12L^2} \right)^{1/2} M_1^*$$

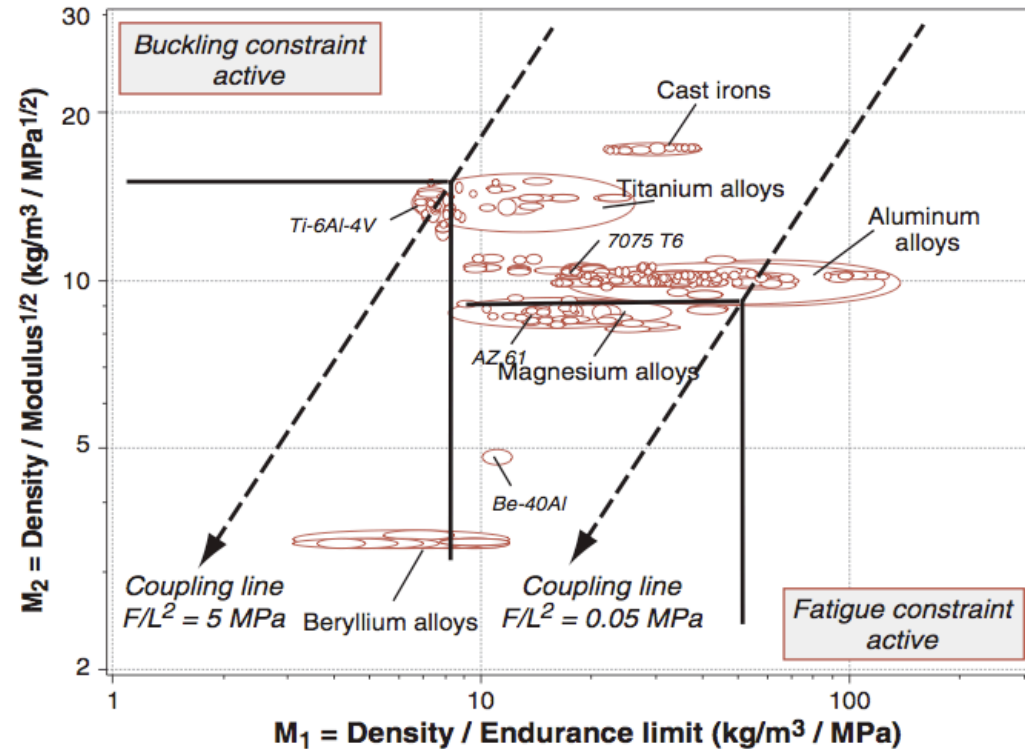
(α) τα «κουτιά»
στα άκρα είναι
ένα ποσοστό του
όγκου ($\beta - 1$)

(β) το προφίλ
είναι δεδομένο
($\alpha = t/w$)

Πολλαπλοί περιορισμοί διωστήρας για κινητήρες υψηλής απόδοσης (2)



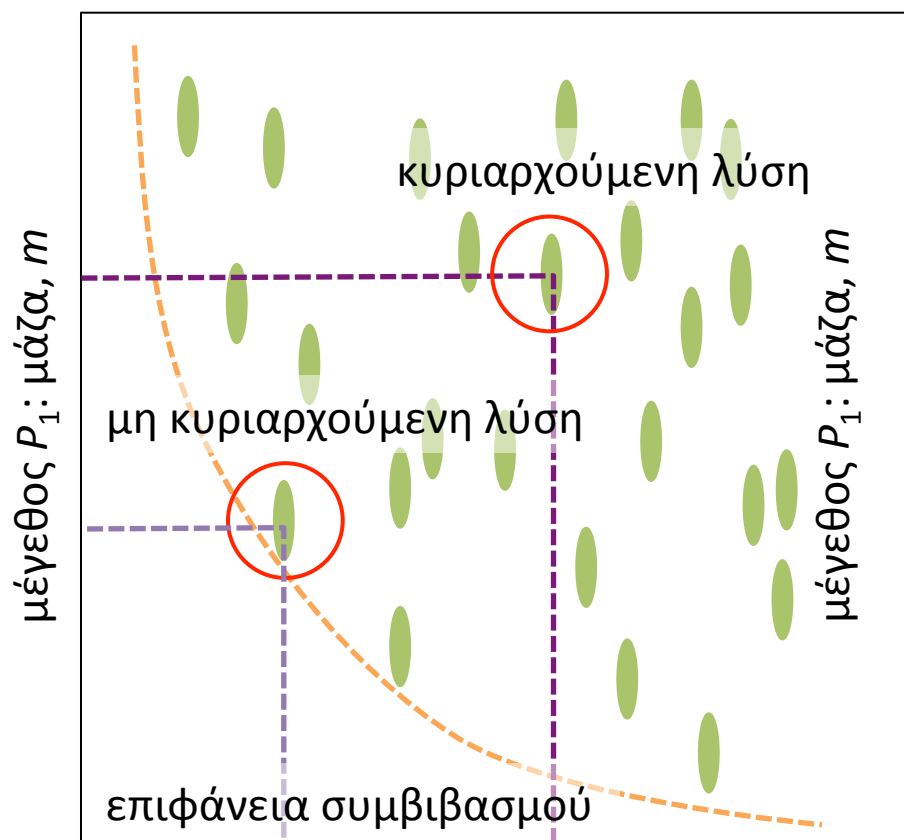
σε μικρά μήκη κυριαρχεί
ο περιορισμός της
κόπωσης – σε μεγάλα
αυτός του λυγισμού



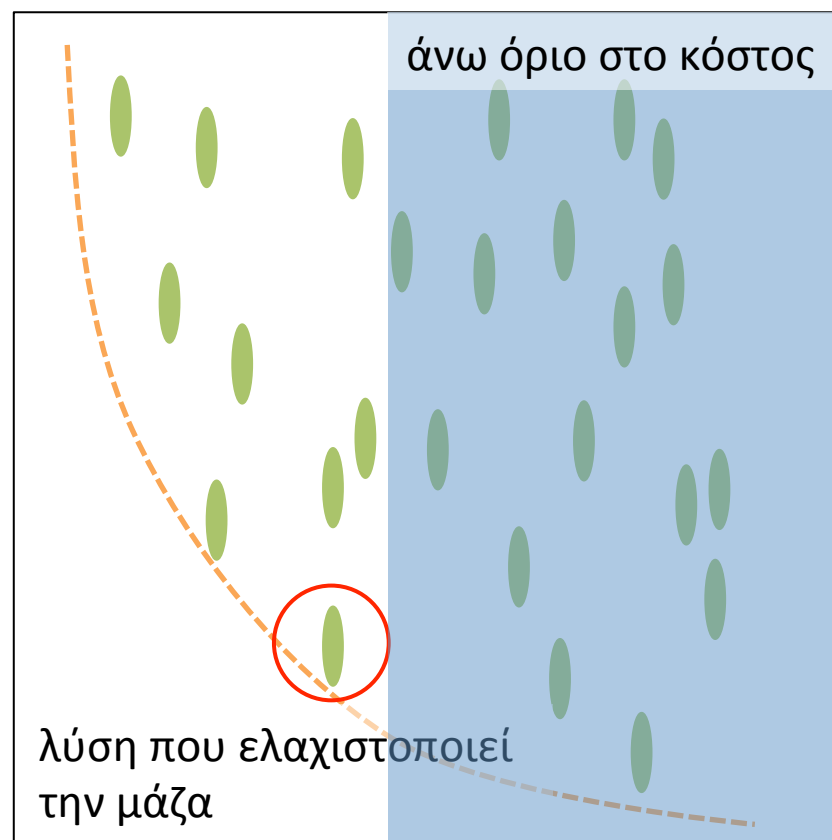
δύο ευθείες συσχέτισης για μακριές μπιέλες με
χαμηλά φορτία (λυγισμός) και κοντές με υψηλά
φορτία (κόπωση) [εδώ για $\alpha = 0.8$]

Αντικρουόμενοι στόχοι στρατηγικές συμβιβασμού

συνήθεις στόχοι: μείωση μάζας, όγκου, κόστους, περιβαλλοντικών επιπτώσεων



μέγεθος P_2 : κόστος, C



μέγεθος P_2 : κόστος, C

Αντικρουόμενοι στόχοι συναρτήσεις ποινής

$$Z = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + \dots$$

γραμμική συνάρτηση των μεγεθών (στόχων) P_i , όπου a_i οι αντίστοιχες σταθερές ανταλλαγής:

$$a_i = \left(\frac{\partial Z}{\partial P_i} \right)_{P_j, j \neq i}$$

που εκφράζουν την αλλαγή στην συνάρτηση ποινής για κάποια μοναδιαία μεταβολή σε συγκεκριμένο μέγεθος όταν όλα τα υπόλοιπα είναι σταθερά

συνήθως, το κόστος είναι ένας από τους στόχους· η σταθερά ανταλλαγής είναι μονάδα

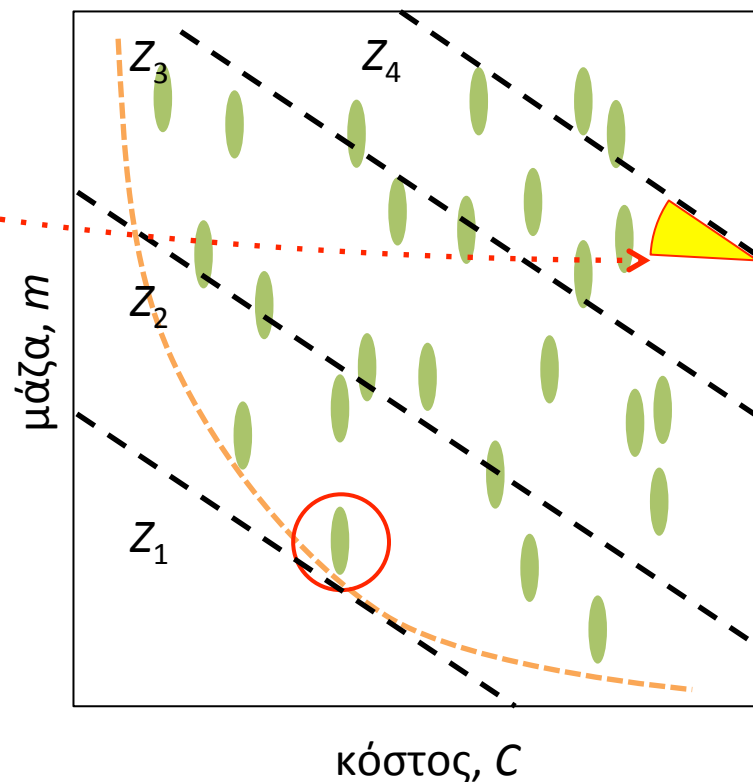
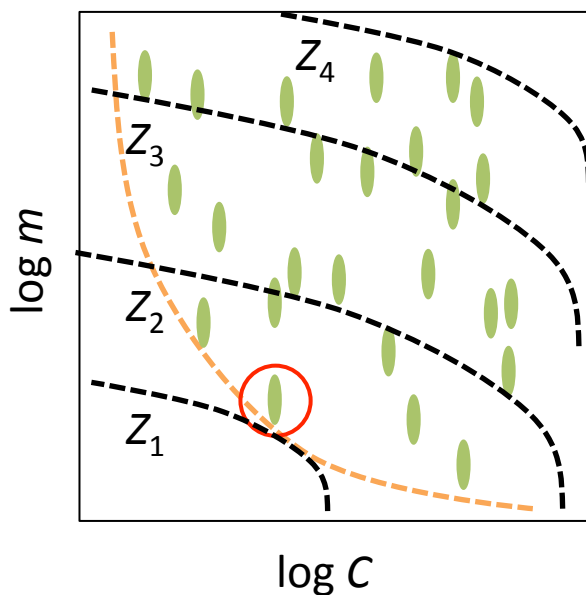
$$Z = C + a_2P_2 + a_3P_3 + \dots$$

Αντικρουόμενοι στόχοι παράδειγμα δύο μεταβλητών

$$Z = C + am \Rightarrow m = \frac{1}{a}Z - \frac{1}{a}C$$

κάθε τιμή του Z αντιστοιχεί σε μια ευθεία στο διάγραμμα $m - C$:

$Z_1 < Z_2 < Z_3 < Z_4$: η μικρότερη τιμή είναι εφαπτομενική της επιφάνειας συμβιβασμού



η συνάρτηση ποινής εξαρτάται και από τις διαστάσεις

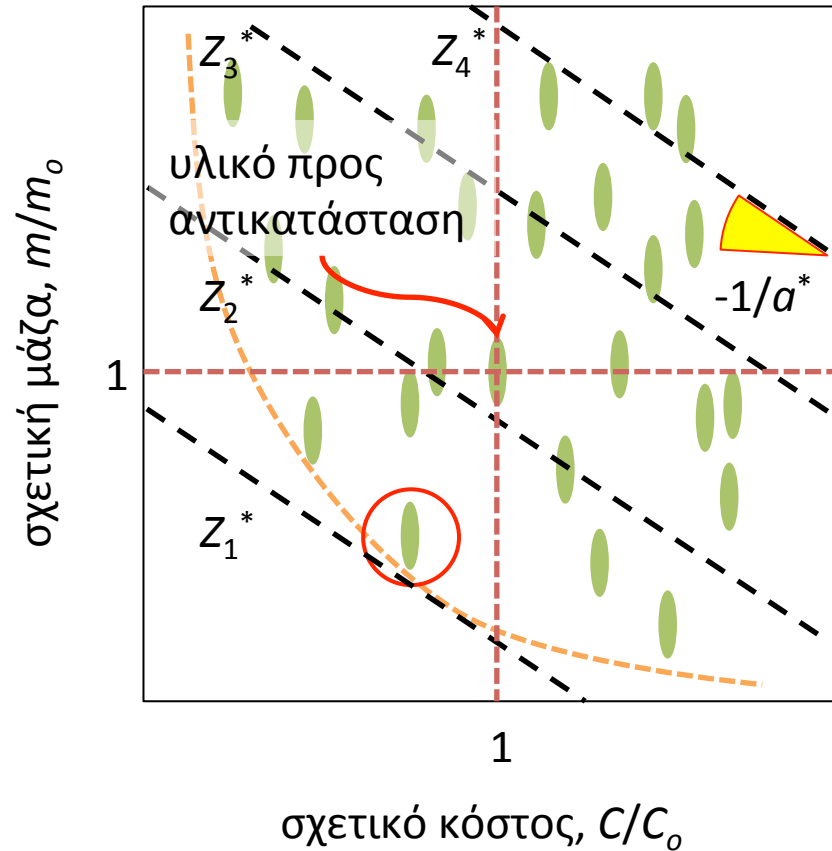
Αντικρουόμενοι στόχοι σχετική συνάρτηση ποιής

όταν αντικαθιστούμε το υλικό σε κάποια εφαρμογή, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ως υλικό αναφοράς και να εργαστούμε με την σχετική συνάρτηση ποιής· για το προηγούμενο παράδειγμα:

$$Z^* = \frac{C}{C_o} + a^* \frac{m}{m_o} \Rightarrow \frac{m}{m_o} = \frac{1}{a^*} Z^* - \frac{1}{a^*} \frac{C}{C_o}$$

εδώ, η σχετική σταθερά ανταλλαγής, a^* , μετράει την κλασματική αύξηση της τιμής σε σχέση με την κλασματική αύξηση της απόδοσης, π.χ., για $a^* = 1$ και σταθερό Z^* :

$$\frac{\Delta m}{m_o} = - \frac{\Delta C}{C_o}$$

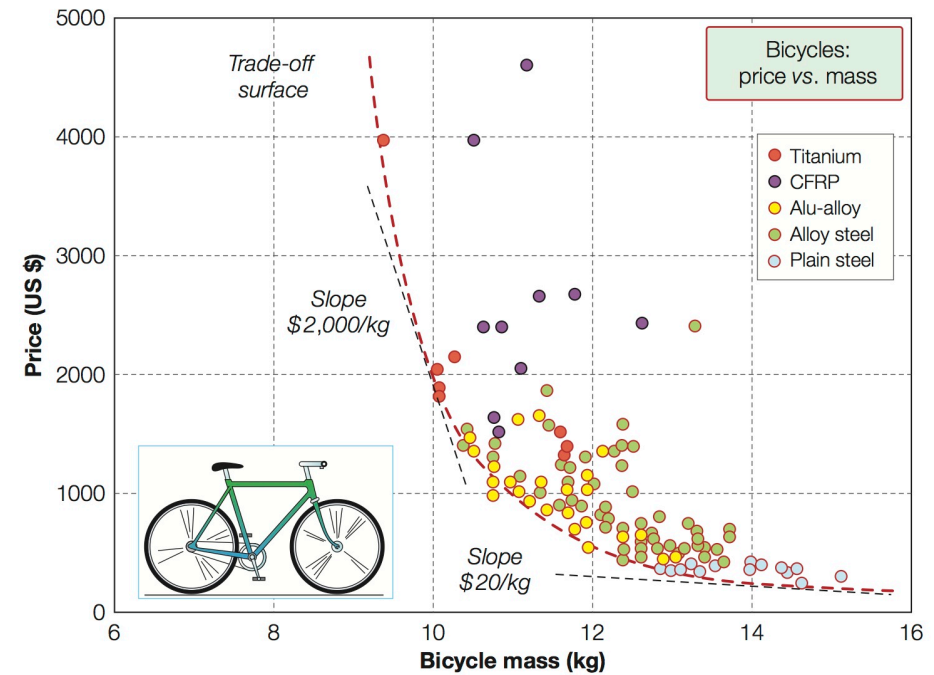


Αντικρουόμενοι στόχοι παραδείγματα σταθεράς ανταλλαγής

αντικειμενικά κριτήρια

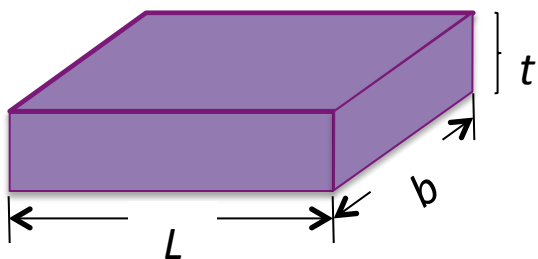
μεταφο- ρικό μέσο	βάση εκτίμησης	α (\$US/kg)
ΙΧ	οικονομία	1 – 2
φορτηγό	φορτίο	5 – 20
εμπορικό αεροπλάνο	φορτίο	100 – 500
μαχητικό αεροπλάνο	φορτίο απόδοση	500 – 1000
διαστημικό όχημα	φορτίο	3000 – 10000

κριτήρια υποκειμενικής
αξίας



Αντικρουόμενοι στόχοι

λεπτά κελύφη για φορητές ηλεκτρονικές συσκευές



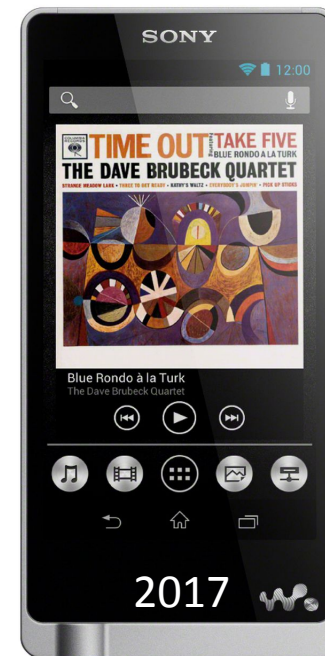
1^{ος} στόχος: $m = \rho Lbt$

2^{ος} στόχος: πάχος, t

περιορισμός: ακαμψία



1979



2017

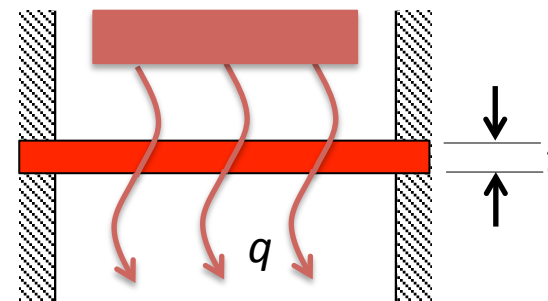
$$S = S^* \Rightarrow \frac{C_1 EI}{L^3} = S^* \Rightarrow \frac{C_1 E \left(\frac{bt^3}{12} \right)}{L^3} = S^* \Rightarrow \begin{cases} m = \left(\frac{12S^*}{C_1} \right)^{1/3} b^{2/3} L^2 \frac{\rho}{E^{1/3}} \\ t = \left(\frac{12S^*}{C_1} \right)^{1/3} \frac{L}{b^{1/3}} \frac{1}{E^{1/3}} \end{cases}$$

$$Z^* = a_t^* \frac{t}{t_o} + a_m^* \frac{m}{m_o} \Rightarrow \frac{m}{m_o} = \frac{1}{a_m^*} Z^* - \frac{a_t^*}{a_m^*} \frac{t}{t_o} \Rightarrow \left(\frac{\rho E_o^{1/3}}{E^{1/3} \rho_o} \right) = \frac{1}{a_m^*} Z^* - \frac{a_t^*}{a_m^*} \left(\frac{E_o}{E} \right)^{1/3}$$

Αντικρουόμενοι στόχοι υλικό για δαγκάνες φρένων



θερμό δισκόφρενο



1^{ος} στόχος: $m = \rho Lbt$ περιορισμός: ακαμψία

2^{ος} στόχος: $\dot{q} = \lambda \frac{\Delta T}{t}$

$$S = S^* \Rightarrow \frac{C_1 EI}{L^3} = S^* \Rightarrow \frac{C_1 E \left(\frac{bt^3}{12} \right)}{L^3} = S^* \Rightarrow \begin{cases} m = \left(\frac{12S^*}{C_1} \right)^{1/3} b^{2/3} L^2 \frac{\rho}{E^{1/3}} \\ \dot{q} = \left(\frac{C_1}{12S^*} \right)^{1/3} \frac{b^{1/3} \Delta T}{L} E^{1/3} \lambda \end{cases}$$

$$Z^* = a_q^* \frac{q_o}{q} + a_m^* \frac{m}{m_o} \Rightarrow \frac{m}{m_o} = \frac{1}{a_m^*} Z^* - \frac{a_q^*}{a_m^*} \frac{q_o}{q} \Rightarrow \left(\frac{\rho E_o^{1/3}}{E^{1/3} \rho_o} \right) = \frac{1}{a_m^*} Z^* - \frac{a_t^*}{a_m^*} \left(\frac{E_o^{1/3} \lambda_o}{E^{1/3} \lambda} \right)^{1/3}$$