

Ομάδα 2 – Εργασία 1
Παράδοση: 19/11/2008
Επιλογή υλικού για ελάσματα αθλητικού τόξου



Τα σύγχρονα αντίκυρτα τόξα σκοπευτικής τοξοβολίας αποτελούνται από ένα κεντρικό στέλεχος και δύο ελάσματα. Η Hoyt (σημαντικός κατασκευαστής τόξων) σας αναθέτει την σχεδίαση των ελαφρύτερων ελασμάτων για μέγιστη αποθήκευση ελαστικής ενέργειας (το μήκος των ελασμάτων είναι δεδομένο). Μπορείτε να θεωρήσετε τα ελάσματα ως πακτωμένες δοκούς σε κάμψη. Επιλέξτε το κατάλληλο υλικό για την εφαρμογή: προσδιορίστε τον στόχο και τους περιορισμούς (θα πρέπει να λάβετε υπόψη σας ως ξεχωριστό περιορισμό ότι το υλικό δεν θα πρέπει να αστοχήσει), καθώς και τις ελεύθερες μεταβλητές που θα αντικαταστήσετε στις σχέσεις που αφορούν την λειτουργία του εξαρτήματος (από τους πίνακες μηχανικής).

[Προσοχή: εφόσον ο δείκτης απόδοσης υλικού περιέχει περισσότερες από δύο ιδιότητες, θα πρέπει να τον φέρετε σε μορφή που να αντιστοιχεί στα υπάρχοντα διαγράμματα.]

Απάντηση:

Οι περιορισμοί είναι το μήκος του ελάσματος (που μοντελοποιούμε ως πακτωμένη δοκό σε κάμψη), l , και η ελαστική παραμόρφωση (το υλικό δεν πρέπει να αστοχήσει), $\sigma \leq \sigma_f$. Ο στόχος είναι η μέγιστη αποθήκευση ελαστικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται σε μια δοκό που αποκλίνει κατά δ εξαιτίας φορτίου F είναι

$$U = \frac{1}{2} F \cdot \delta . \quad (1)$$

Στην σχέση (1) αντικαθιστούμε την απόκλιση από τον τύπο για ελαστική παραμόρφωση και ενσωματώνουμε τον δεύτερο περιορισμό από τον τύπο για αστοχία (δηλ., το μέγιστο φορτίο ώστε να μην αστοχήσει):

$$U_{max} = \frac{1}{2} \frac{(F_f^2 l^3)}{(3 E I)} = \frac{1}{6} \left(\frac{I}{y_m^2} \right)^2 \left(\frac{\sigma_f^2}{l^2} \right) \frac{l^3}{(E I)} = \frac{1}{6} \frac{\sigma_f^2}{E} l \frac{(b^2 h^4)}{36} \frac{12}{(b h^3)} = \frac{1}{18} \frac{\sigma_f^2}{E} l A , \quad (2)$$

όπου θεωρήσαμε ότι το έλασμα έχει ορθογώνια διατομή για να αντικαταστήσουμε τα I/y_m και I . Από την τελική σχέση είναι φανερό ότι το σχήμα της διατομής συμμετέχει στο πρόβλημα μόνο με μια σταθερά και δεν επηρεάζει τον δείκτη απόδοσης υλικού. Η μάζα είναι

$$m = \rho \cdot l \cdot A . \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) την ελεύθερη μεταβλητή (την διατομή A) από την (3)

$$\frac{U_{max}}{m} = \frac{1}{18} \frac{\sigma_f^2}{(E\rho)} = \frac{1}{18} \frac{\left(\frac{\sigma_f}{\rho}\right)^2}{\left(\frac{E}{\rho}\right)} \quad (4)$$

Άρα ο δείκτης απόδοσης υλικού είναι

$$M = \frac{\left(\frac{\sigma_f}{\rho}\right)^2}{\left(\frac{E}{\rho}\right)}$$

Βάσει του δείκτη απόδοσης επιλέγουμε το διάγραμμα ειδικού μέτρου ελαστικότητας – ειδικής αντοχής και σχεδιάζουμε ευθεία με κλίση 2 σε όσο δυνατόν μεγαλύτερες τιμές του M , δηλ., όσο το δυνατόν δεξιότερα, έτσι ώστε να επιλέξουμε υλικά από διάφορες κατηγορίες, π.χ., όπως παρακάτω.

Τα μέταλλα, εξαιτίας υψηλής πυκνότητας είναι χειρότερα από σύνθετα και πολύ χειρότερα από τα ελαστομερή (μπορείτε να αποθηκεύσετε περίπου οκτώ φορές περισσότερη ενέργεια ανά μονάδα μάζας σε λάστιχο από ότι στο καλύτερο χάλυβα ελατηρίων – έχουν όμως μεγάλο παράγοντα απώλειας). Ως ελαφρυά ελατήρια τυπικοί εκπρόσωποι των διαφόρων κατηγοριών παρουσιάζουν τις ακόλουθες τιμές του δείκτη απόδοσης:

Υλικό	M	Σχόλιο
χάλυβας ελατηρίων	2	κακό εξαιτίας υψηλής πυκνότητας
κράματα Ti	3	καλύτερο από χάλυβα – ανθεκτικό σε διάβρωση – ακριβό
CFRP	4	καλύτερο από χάλυβα – ακριβό
GFRP	3	καλύτερο από χάλυβα – λιγότερο ακριβό από CFRP
Γυαλί	10	ψαθυρό σε στρέψη αλλά εξαιρετικό αν προστατεύεται
Ξύλο	1-2	βάσει βάρους το ξύλο φτιάχνει καλά ελατήρια
Νάϋλον	2	εφάμιλο του χάλυβα αλλά με υψηλό συντελεστή απώλειας
Λάστιχο	20-50	άριστο – δέκα φορές καλύτερο από τον χάλυβα αλλά με υψηλό συντελεστή απώλειας

Φυσικά, το λάστιχο και το νάϋλον δεν είναι κατάλληλα για τόξα καθώς έχουν τόσο χαμηλό μέτρο ελαστικότητας που δεν μπορούν να στηρίξουν την τεντωμένη χορδή. (Εδώ, μάλλον θα έπρεπε να συμπεριληφθεί κι ένας περιορισμός ακαμψίας.) Θα μπορούσαν ίσως να αποτελέσουν μέρος μιας σύνθετης δομής; (Π.χ., κοίλη δοκός χάλυβα με πυρήνα από λάστιχο;)

