1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

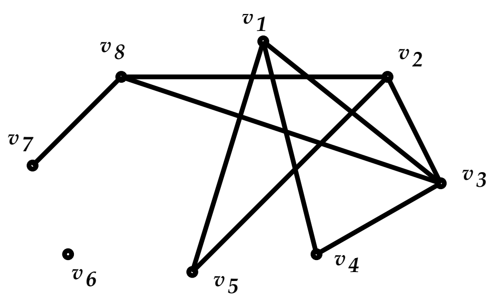
Κάθε δυάδα $G = (V(G), E(G))$, ή (V, E), ή (X, E) όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και E είναι ένα σύνολο από (μη διατεταγμένα) ζεύγη $\{x, y\}$, $x, y \in X$ ονομάζεται **γράφημα δεσμών**, ή **απροσανατόλιστο γράφημα**.

Τα στοιχεία του X καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** (vertices, points), ενώ τα στοιχεία του E καλούνται **δεσμοί**, ή **γραμμές**, ή **χορδές**, ή **πλευρές**, ή **ακμές** (edges, lines).

Θα ασχοληθούμε εδώ με **πεπερασμένα γραφήματα**, (δηλαδή $|X| \in \mathbb{N}^*$). Το E μπορεί να είναι $\emptyset$. Συχνά γράφουμε $|X| = p$ ή n και $|E| = q$. Ο πληθάριθμος $|X|$ ονομάζεται **τάξη** του γραφήματος.

Παράδειγμα :

Η δυάδα $G = (X, E)$ όπου $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_7, v_8\}\}$ είναι ένα γράφημα δεσμών. Η γεωμετρική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



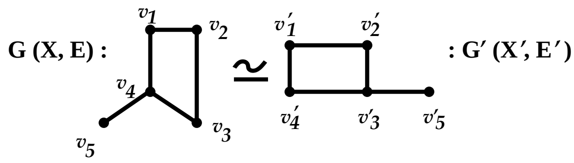
Σχημα 1. 5

Αν οι x, y ταυτίζονται έχουμε ένα **βρόχο**. Εδώ θα ασχοληθούμε με γραφήματα χωρίς βρόχους εκτός αν αναφερθεί ρητά το αντίθετο.

ΙΣΟΜΟΡΦΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Τα γραφήματα δεσμών $G = (X, E)$ και $G' = (X', E')$ ονομάζονται **ισόμορφα** αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : X \to X'$, με $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. Αν δύο γραφήματα G και G' είναι ισόμορφα, θα γράφουμε $G \simeq G'$.

Παραδείγματα :
Τα επόμενα γραφήματα είναι ισόμορφα :



διότι για την $f : X \to X'$ με

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_4', \\ f(v_2) &= v_1', \\ f(v_3) &= v_2', \\ f(v_4) &= v_3', \\ f(v_5) &= v_5'. \end{aligned}$$

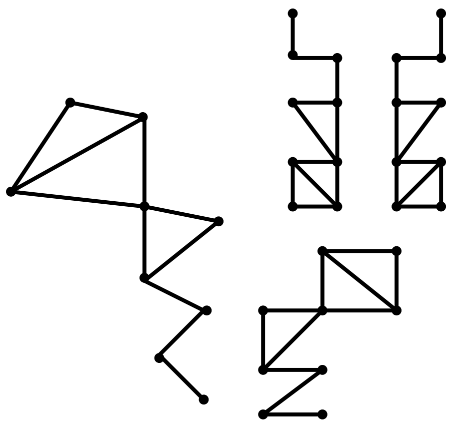
έχουμε πράγματι ότι

$$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E'$$

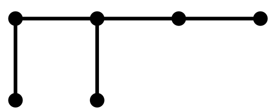
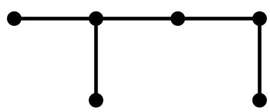
(για παράδειγμα :

$$\begin{aligned} &\{v_1, v_2\} \in E \text{ και } \{v_4', v_1'\} \in E' \\ &\{v_2, v_4\} \notin E \text{ και } \{v_1', v_3'\} \notin E' \\ &\{v_4, v_5\} \in E \text{ και } \{v_3', v_5'\} \in E \quad \text{κ.ο.κ.}). \end{aligned}$$

Τα επόμενα γραφήματα είναι όλα ισόμορφα :

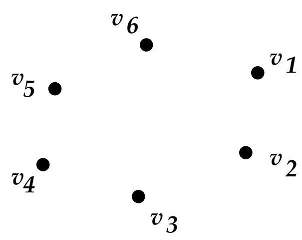


Αντίθετα τα επόμενα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα:

 $\not\simeq$ 

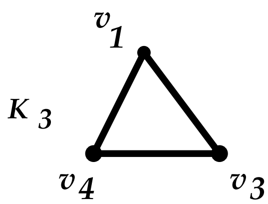
ΜΟΡΦΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1) **Μηδενικό γράφημα** : $G = (X, E)$ με $E = \emptyset$.
Παράδειγμα :

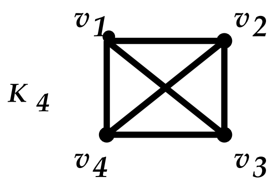


2) **Τετριμένο γράφημα** : $G = (X, E)$ με $|X| = 1$.

3) **Πλήρες γράφημα** : $G = (X, E)$ τέτοιο ώστε $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$ ισχύει ότι $\{x, y\} \in E$.
Παρατήρηση : Το πλήρες γράφημα με n κόμβους συμβολίζεται με K_n.
Παράδειγμα : Το γράφημα K_3 είναι ένα τρίγωνο :

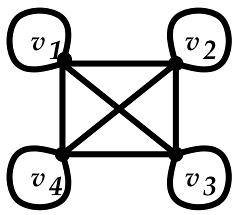


ενώ το γράφημα K_4 είναι το :



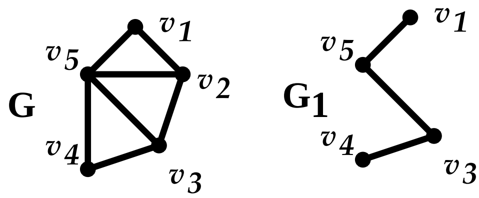
4) **Γεμάτο γράφημα** : Πλήρες γράφημα και με όλους τους βρόχους.

Παράδειγμα :

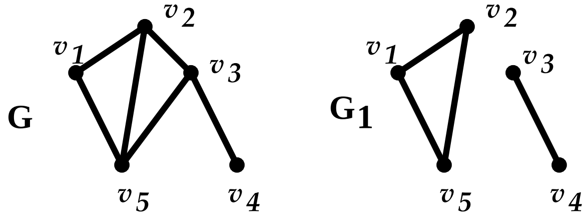


ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

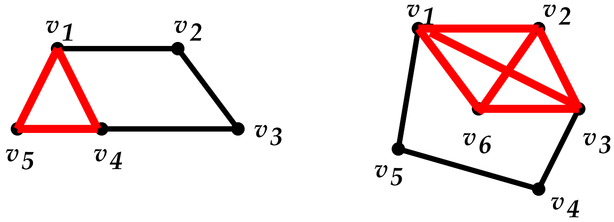
1) **Υπογράφημα** του $G = (X, E)$: Ένα γράφημα $G_1 = (X_1, E_1)$ με $X_1 \subseteq X$ και $E_1 \subseteq E$.
Παράδειγμα :



2) **Γενετικό** (ή **γεννητικό**, ή **μερικό**) **γράφημα**, ή **γράφημα ζεύξης** του $G = (X, E)$: Ένα γράφημα $G_1 = (X, E_1)$ με $E_1 \subseteq E$.
Παράδειγμα :



3) **Κλίκα**: Κάθε πλήρες υπογράφημα του G.
Μέγιστη κλίκα : Κλίκα με το μέγιστο δυνατό αριθμό κόμβων.
Παραδείγματα :

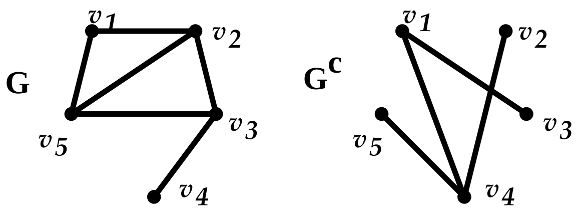


Οι μέγιστες κλίκες των δύο γραφημάτων σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

7) **Συμπλήρωμα** G^c του $G = (X, E)$ με $|X| = n$: Ένα γράφημα G^c ή $\bar{G}$ ή $G^* = (X, E^c)$ με $E^c = E(K_n) \setminus E(G)$.

Παράδειγμα :



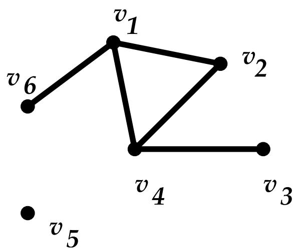
ΒΑΘΜΟΣ

Για κάθε $v \in X$ ορίζουμε $\Gamma_G(v) = \{u \in V(G) : \{v, u\} \in E(G)\}$.

Τότε $d_G(v)$, ή $d(v)$, ή $\deg(v) = |\Gamma_G(v)|$, είναι ο **βαθμός** του κόμβου v.

Δηλαδή βαθμός του v στο G, λέγεται το πλήθος των δεσμών του G των οποίων ο v είναι άκρο.

Παράδειγμα :



Στο παραπάνω γράφημα, οι κόμβοι του έχουν τους ακόλουθους βαθμούς:

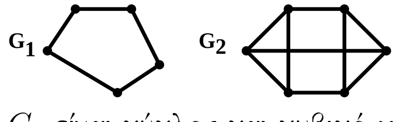
$$
\begin{aligned}
&d(v_1) = d(v_4) = 3\\
&d(v_2) = 2\\
&d(v_3) = d(v_6) = 1\\
&d(v_5) = 0.
\end{aligned}
$$

Κάθε κόμβος βαθμού μηδέν λέγεται **μεμονωμένος** κόμβος.

Ένα γράφημα G λέγεται d-**κανονικό** αν $d_G(v) = d$, $\forall x \in X$.

Στις ειδικές περιπτώσεις $d = 2$, $d = 3$ τα αντίστοιχα γραφήματα λέγονται **κύκλος** και **κυβικό γράφημα**.

Παραδείγματα :

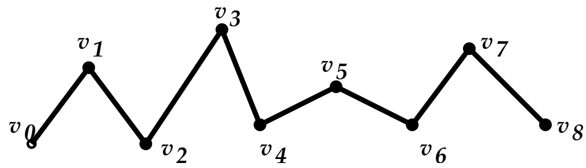


Τα γραφήματα G_1, G_2 είναι κύκλος και κυβικό γράφημα αντίστοιχα.

Το γράφημα $G = (X, E)$ λέγεται $v_0 - v_n$ **μονοπάτι** (ή απλά **μονοπάτι**) μήκους n, αν $X = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ με $d(v_0) = d(v_n) = 1$ και $d(v_i) = 2$, $\forall i \neq 0, n$.

Παράδειγμα :

Έστω $G = (X, E)$ με $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

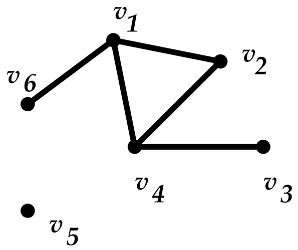


Μονοπάτι μήκους 8

Ακολουθία βαθμών του G λέγεται η πεπερασμένη ακολουθία

$$(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)).$$

Παράδειγμα :



Η ακολουθία βαθμών του παραπάνω γραφήματος είναι (3,3,2,1,1,0).
Παρατήρηση : Συνήθως γράφουμε την ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος σε φθίνουσα τάξη.

2. ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Προταση 1. $\sum_{i=1}^{|X|} d(v_i) = 2|E|$.

Πορισμα 2. *Σϵ κάθϵ γράφημα ο αριθμός κόμβων μϵ πϵριττό βαθμό ϵίναι άρτιος.*

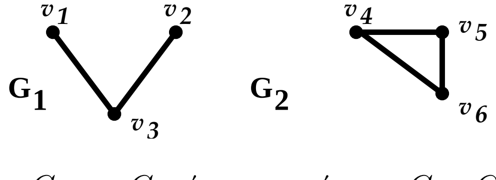
Πορισμα 3. *Κάθϵ κυβικό γράφημα έχϵι άρτιο πλήθος κόμβων.*

Προταση 4. *Αν $|X| = 6$, τότϵ ή το G ή το G^c πϵριέχϵι τουλάχιστον ένα υπογράφημα ισόμορφο μϵ το K_3, (δηλαδή ένα τρίγωνο).*

Προταση 5. *Αν δύο γραφήματα G, H ϵίναι ισόμορφα, τότϵ:*
i) Έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών, και μάλιστα ισχύει ότι $d_G(v) = d_H(f(v)), \forall v \in X(G)$.
ii) Έχουν ισόμορφα υπογραφήματα.

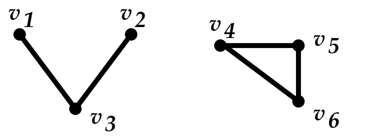
3. ΠΡΑΞΕΙΣ

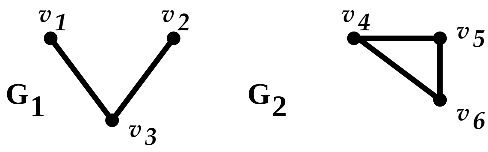
Έστω $G_1 = (X_1, E_1)$, $G_2 = (X_2, E_2)$.
Ένωση $G = G_1 \cup G_2$ είναι το γράφημα $G = (X, E)$ με $X = X_1 \cup X_2$ και $E = E_1 \cup E_2$.
Παράδειγμα : Έστω



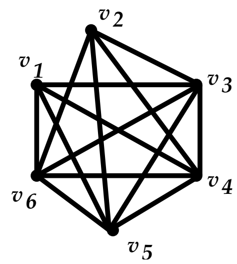
Η ένωση των γραφημάτων G_1 και G_2 είναι το γράφημα $G = G_1 \cup G_2$:
Άθροισμα $G = G_1 + G_2$ είναι το γράφημα $G = (X, E)$ με $X = X_1 \cup X_2$ και $E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_i, v_j\} : v_i \in X_1, v_j \in X_2\}$ (δηλαδή το $G_1 + G_2$ είναι το $G_1 \cup G_2$ μαζί με όλους τους δεσμούς που ενώνουν τα στοιχεία του X_1 με στοιχεία του X_2).
Παράδειγμα : Έστω

$G_1 \cup G_2$





$G_1 + G_2$

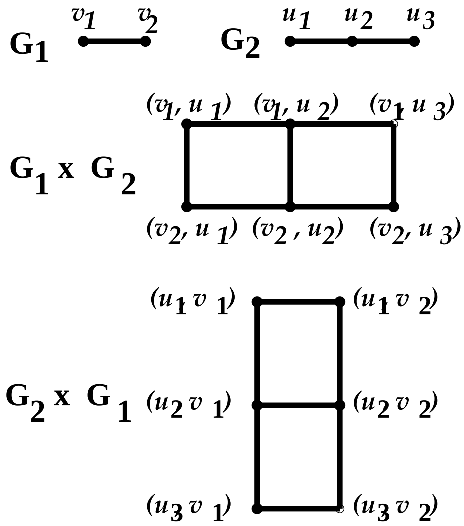


Το άθροισμα των γραφημάτων G_1 και G_2 είναι το γράφημα $G = G_1 + G_2$:

Γινόμενο $G = G_1 \times G_2$ είναι το γράφημα $G = (X, E)$ με $X = X_1 \times X_2$ και αν $\alpha = (v_1, u_1)$, $\beta = (v_2, u_2) \in X$ τότε $(\alpha, \beta) \in E$ αν και μόνο αν :

$$(v_1 = v_2 \text{ και } \{u_1, u_2\} \in E(G_2)), \text{ ή } (u_1 = u_2 \text{ και } \{v_1, v_2\} \in E(G_1)).$$

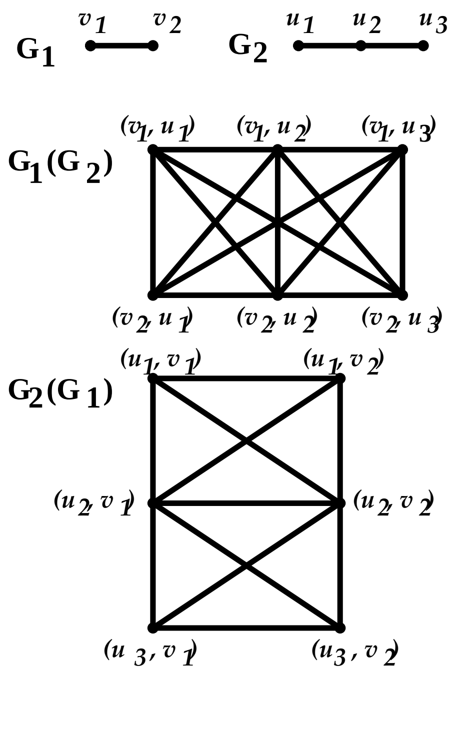
Παράδειγμα :



Σύνθεση $G = G_1(G_2)$ είναι το γράφημα $G = (X, E)$ με $X = X_1 \times X_2$ και αν $\alpha = (v_1, u_1)$, $\beta = (v_2, u_2) \in X$ τότε $(\alpha, \beta) \in E$ αν και μόνο αν :

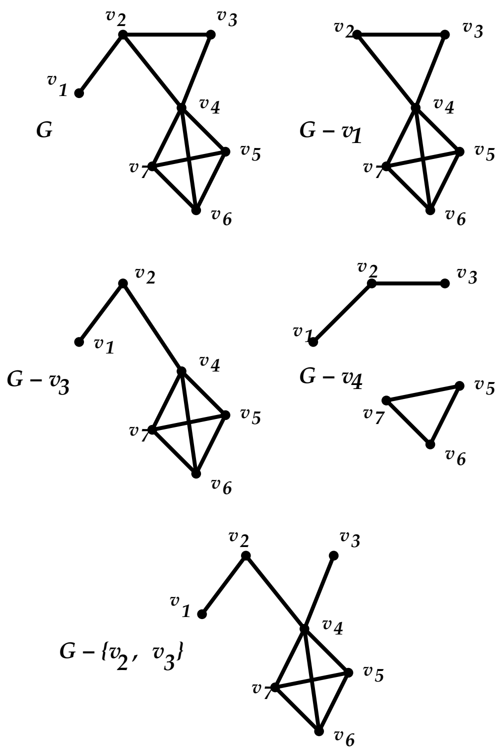
$$(\{v_1, v_2\} \in E(G_1)),\ \text{ή}\ (v_1 = v_2\ \text{και}\ \{u_1, u_2\} \in E(G_2)).$$

Παράδειγμα :



Τέλος αν $G = (X, E)$ και $v \in X$, $e \in E$ ορίζουμε τα γραφήματα $G - v$, $G - e$ ως εξής: $X(G - v) = X \setminus \{v\}$, $E(G - v) = E \setminus \{e_i \in E : v \in e_i\}$, ενώ $X(G - e) = X$, $E(G - e) = E \setminus \{e\}$.

Παραδείγματα :



4. ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

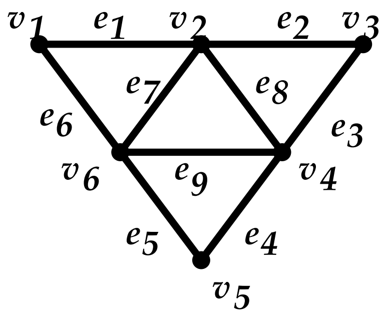
Διαδρομή που ενώνει τους κόμβους v_i, v_j ενός γράφηματος G (ή $v_i - v_j$ **διαδρομή**) είναι μια ακολουθία της μορφής $(v_i, e_{ik}, v_k, e_{kl}, v_l, \ldots, v_r, e_{rj}, v_j)$, όπου e_{st} είναι ο δεσμός του γραφήματος που ενώνει τους κόμβους v_s και v_t. (Συνήθως περιγράφουμε μια διαδρομή μόνο με τους διαδοχικούς κόμβους της : $(v_i, v_k, v_l, \ldots, v_r, v_j)$). **Μήκος** μιας διαδρομής ονομάζεται το πλήθος των δεσμών της.

Αν σε μια $v_i - v_j$ διαδρομή του G κάθε δεσμός εμφανίζεται μια μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται $v_i - v_j$ **δρόμος** του G. Αν επιπλέον, σε ένα $v_i - v_j$ δρόμο του G κάθε κόμβος εμφανίζεται μια μόνο φορά, ο δρόμος λέγεται $v_i - v_j$ **μονοπάτι** του G.

Μια $v_i - v_j$ διαδρομή ή ένας $v_i - v_j$ δρόμος του G, με $v_i = v_j$ λέγεται **κλειστή διαδρομή** του G ή **κλειστός δρόμος** του G. Τέλος, ένας κλειστός δρόμος του G, όπου κάθε κόμβος εμφανίζεται μια μόνο φορά, λέγεται **κύκλος** του G.

Παράδειγμα :

Για το γράφημα G έχουμε :



$v_1 - v_5$ διαδρομή του G : $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_9, v_4, e_8, v_2, e_7, v_6, e_5, v_5)$, ή συντομότερα $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ δρόμος του G : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ μονοπάτι του G : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5)$.

Κλειστή διαδρομή του G : $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$.

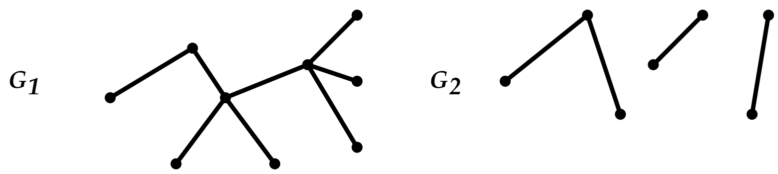
Κλειστός δρόμος του G : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$.

Κύκλος του G : $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_1)$.

Παρατήρηση : Παρατηρείστε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς των γραφημάτων «μονοπάτι» και «κύκλος» που δόθηκαν νωρίτερα και στους ορισμούς «μονοπάτι γραφήματος» και «κύκλος γραφήματος» που δίνονται εδώ.

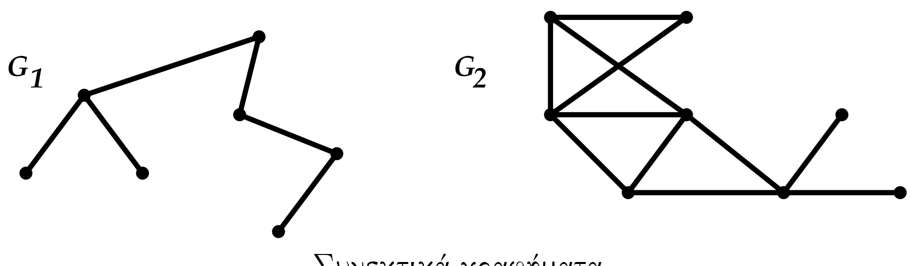
Άκυκλο λέγεται ένα γράφημα που δεν έχει κύκλους.

Παραδείγματα :



Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιουσδήποτε δύο κόμβους του, υπάρχει μονοπάτι που τους ενώνει.

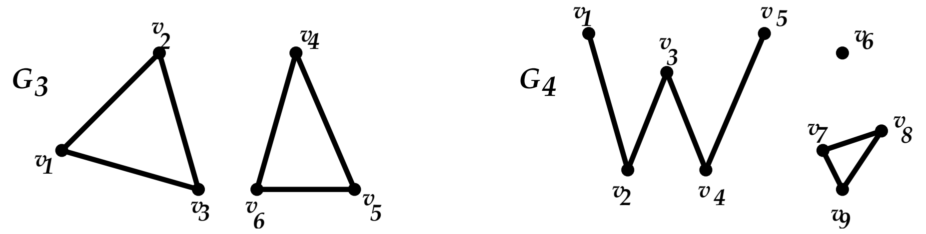
Παραδείγματα :



Συνεκτικά γραφήματα

Συνιστώσα ενός γραφήματος G ονομάζεται κάθε μεγιστικό (maximal) συνεκτικό υπογράφημά του (δηλαδή κάθε συνεκτικό υπογράφημά του που δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου συνεκτικού υπογραφήματος του G).

Προφανώς τα συνεκτικά γραφήματα αποτελούνται από μια μόνο συνιστώσα : τον εαυτό τους.

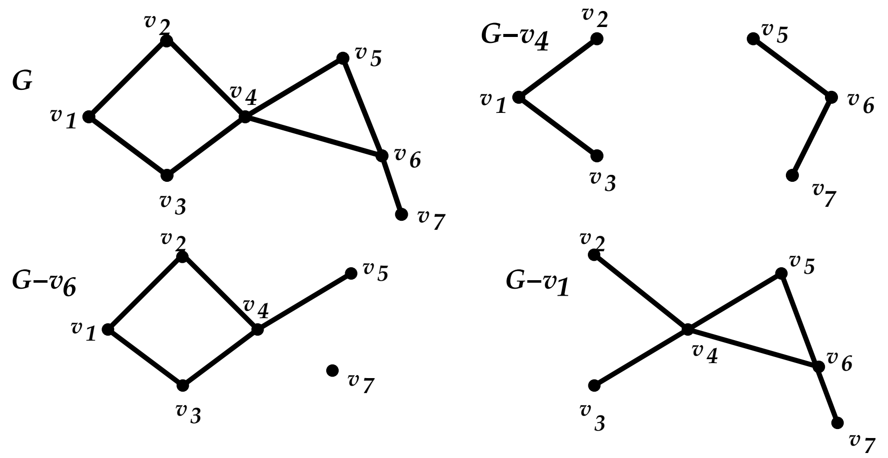


Μη συνεκτικά γραφήματα

Παραδείγματα : Στο προηγούμενο σχήμα οι συνιστώσες του G_3 είναι τα δύο τρίγωνα $G_{3,1}$, $G_{3,2}$ με $X(G_{3,1}) = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $X(G_{3,2}) = \{v_4, v_5, v_6\}$ αντίστοιχα, ενώ το G_4 έχει προφανώς τρεις συνιστώσες.

Κλείδωση (ή **σημείο κοπής**) ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $v \in X$ τέτοιο ώστε $G - v$: μή συνεκτικό.

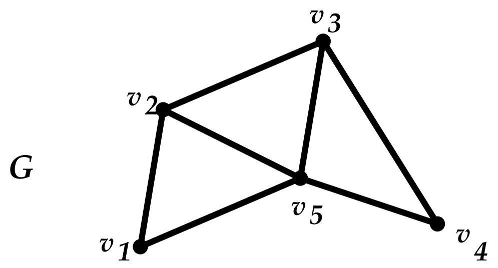
Παραδείγματα : Οι κόμβοι v_4, v_6 του παρακάτω γραφήματος G είναι κλειδώσεις, ενώ ο v_1 δεν είναι.



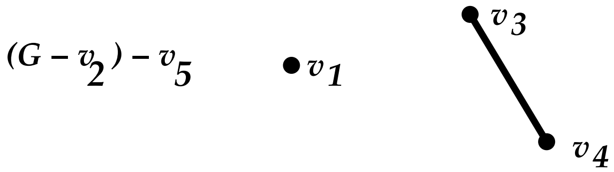
Σύνολο κλειδώσεων ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq X$ τέτοιο ώστε το $(((G - v_1) - v_2) - \cdots) - v_n$ να είναι μή συνεκτικό.

Παρατήρηση : Συνήθως μας ενδιαφέρουν τα ελάχιστα σύνολα κλειδώσεων.

Παράδειγμα : Για το γράφημα



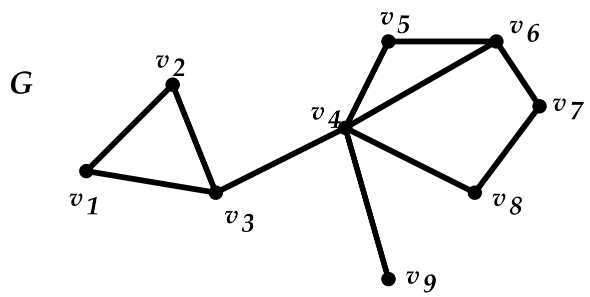
το σύνολο $\{v_2, v_5\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων, αφού το G δεν έχει κλειδώσεις, ενώ το γράφημα $(G - v_2) - v_5$ είναι μη συνεκτικό.



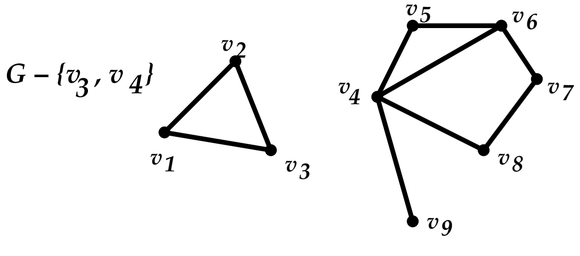
Ισθμός (ή **γέφυρα**) ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $e \in E$ τέτοιος ώστε $G - e$: μη συνεκτικό.

Παράδειγμα :

Για το γράφημα



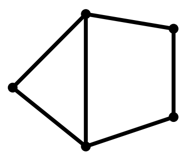
ο $\{v_3, v_4\}$ είναι γέφυρα, αφού το γράφημα



είναι μη συνεκτικό.

Ένα μη τετριμένο, συνεκτικό γράφημα χωρίς κλειδώσεις λέγεται **μη διαχωρίσιμο** (ή **συμπαγές**, ή **δισυνεκτικό**).

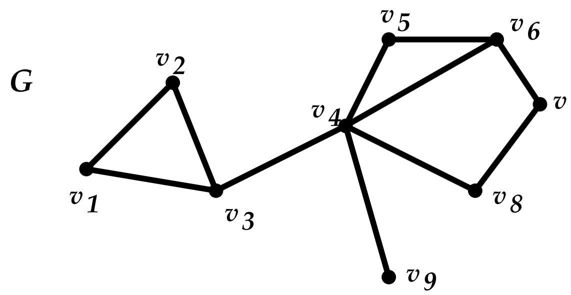
Παράδειγμα :



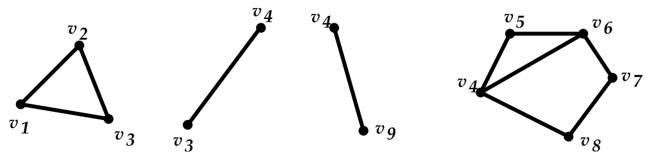
Αν το H είναι ένα μεγιστικό μη διαχωρίσιμο υπογράφημα του G (δηλαδή το H δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου μη διαχωρίσιμου υπογραφήματος του G) τότε λέγεται **μπλοκ** (ή **συμπαγές υπογράφημα**) του G.

Παράδειγμα :

Τα μπλοκ του γραφήματος



είναι τα



Πρόταση 6. *Έστω $G = (X, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και $v \in V$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
i) Ο κόμβος v είναι κλείδωση του G.
ii) Υπάρχει μια διαμέριση του $X \setminus \{v\}$ σε υποσύνολα U, W τέτοια ώστε, $\forall u \in U$, $\forall w \in W$ ο κόμβος v ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.
iii) Υπάρχουν κόμβοι u, w διάφοροι του v τέτοιοι ώστε ο v ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.

Πρόταση 7. *Έστω $G = (X, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και $e \in V$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
i) Ο δεσμός e είναι ισθμός.
ii) Ο δεσμός e δεν ανήκει σε κανένα κύκλο του G.
iii) Υπάρχει διαμέριση του X σε U, W τέτοια ώστε για κάθε $u \in U$, $w \in W$ ο δεσμός e ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.
iv) Υπάρχουν $u, w \in X$ τέτοιοι ώστε ο δεσμός e ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.

Απόσταση $d(u, v)$ μεταξύ δύο κόμβων u, v μιας συνιστώσας του G ονομάζεται το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των διαδρομών που τους συνδέουν.

Γεωδεσικό λέγεται κάθε $u - v$ μονοπάτι ενός γραφήματος G, με μήκος ίσο με $d(u, v)$.

Διάμετρος $d(G)$ ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται το μήκος του μεγαλύτερου γεωδεσικού του, (δηλαδή η μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα σε όλα τα δυνατά ζεύγη κόμβων).

Εκκεντρότητα $e(v)$ ενός κόμβου v ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η $\max\limits_{u \in X(G)} d(u, v)$.

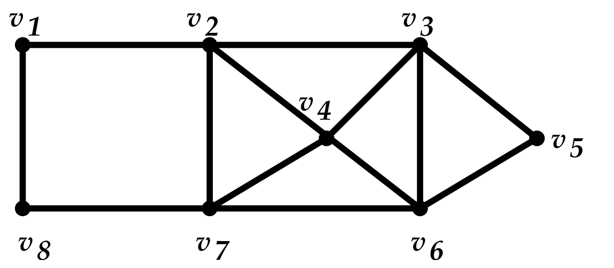
Παρατήρηση : Προφανώς $d(G) = \max_{v \in X(G)} e(v)$.

Ακτίνα $r(G)$ ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η ελάχιστη εκκεντρότητα, ανάμεσα σε όλους τους κόμβους του G, δηλαδή $r(G) = \min_{v \in X(G)} e(v)$.

Ο v λέγεται **κεντρικός κόμβος** του συνεκτικού γραφήματος G, αν $e(v) = r(G)$.

Κέντρο του συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται το σύνολο των κεντρικών του κόμβων.

Παράδειγμα :



$d(v_1, v_6) = 3$

(v_1, v_2, v_4, v_6): γεωδεσικό, (v_1, v_2, v_7, v_6): γεωδεσικό

$(v_1, v_2, v_4, v_7, v_6)$: όχι γεωδεσικό

$d(G) = 3$

$e(v_1) = e(v_3) = e(v_5) = e(v_6) = e(v_8) = 3$

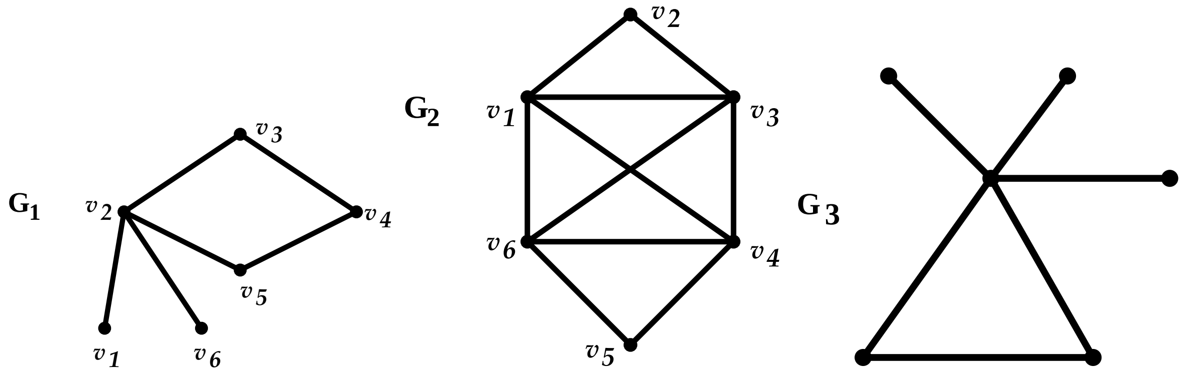
$e(v_2) = e(v_4) = e(v_7) = 2$

$r(G) = 2$

Κέντρο του $G = \{v_2, v_4, v_7\}$.

Αν υπάρχει ένας δρόμος του γραφήματος G, ο οποίος χρησιμοποιεί όλους τους δεσμούς του G, λέγεται **δρόμος Euler**. Αν το G περιέχει ένα κλειστό δρόμο Euler, τότε λέγεται **γράφημα Euler**.

Παραδείγματα :



Το γράφημα G_1 περιέχει το δρόμο Euler $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6)$ αλλά δεν είναι γράφημα Euler.

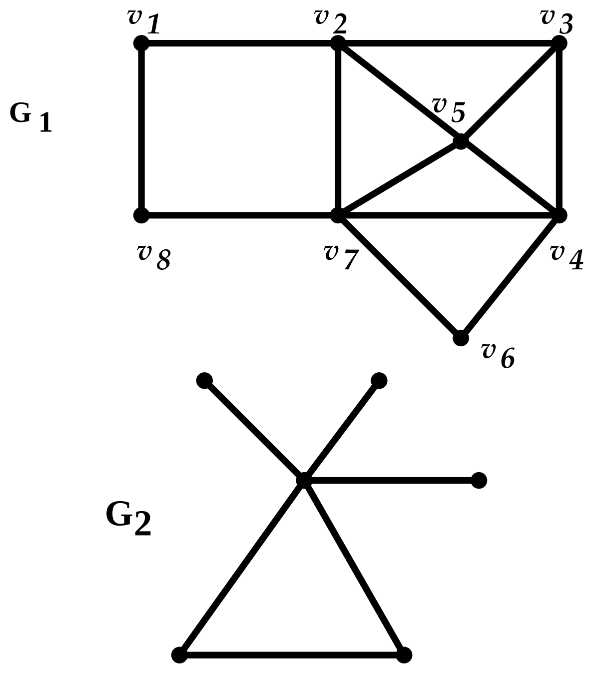
Το γράφημα G_2 είναι γράφημα Euler, αφού περιέχει τον κλειστό δρόμο Euler $(v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_6, v_4, v_5, v_6)$.

Το γράφημα G_3 δεν περιέχει δρόμο Euler.

Προταση 8. *Ένα συνεκτικό γράφημα G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν όλοι οι κόμβοι του έχουν άρτιο βαθμό.*

Ένας κύκλος του G ο οποίος διέρχεται από όλους τους κόμβους του G λέγεται **κύκλος Hamilton**. Αν το G περιέχει ένα κύκλο Hamilton, λέγεται **γράφημα Hamilton**.

Παραδείγματα :



Το γράφημα G_1 είναι γράφημα Hamilton, αφού περιέχει τον κύκλο Hamilton $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_1)$, ενώ το γράφημα G_2 δεν είναι γράφημα Hamilton, αφού προφανώς δεν περιέχει ένα κύκλο Hamilton.