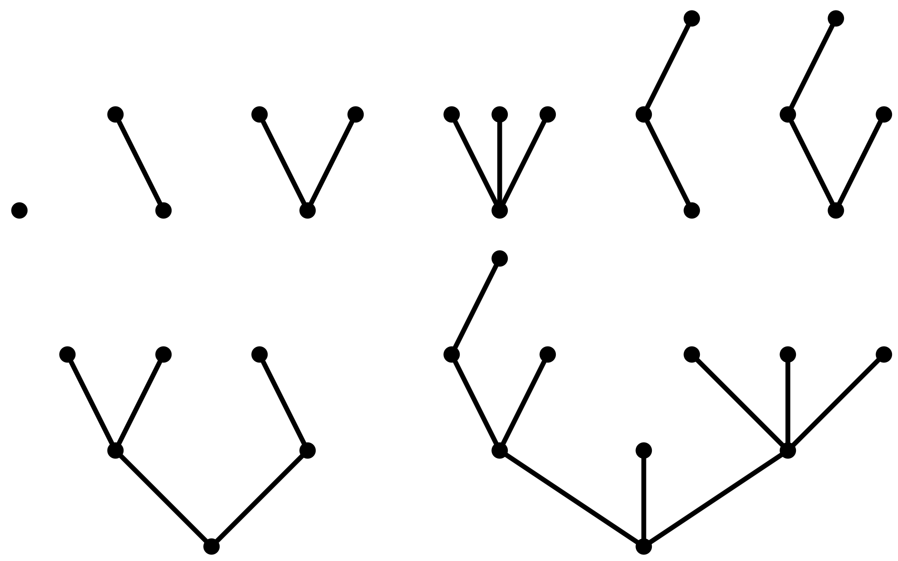
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΕΝΔΡΑ

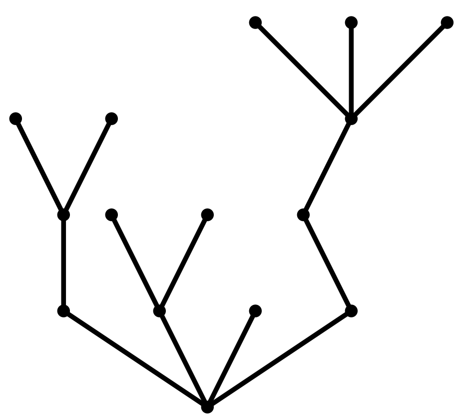
1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ - ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ένα συνεκτικό άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δένδρο** (ή **ελεύθερο δένδρο**).
Παραδείγματα :

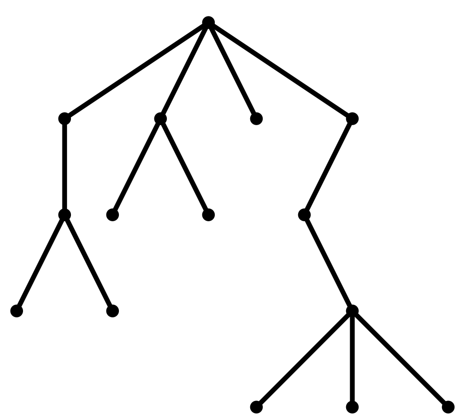


Οι κόμβοι ενός δένδρου με βαθμό 1 λέγονται **φύλλα** του δένδρου.
Ένα άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δάσος**.

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΝΔΡΩΝ

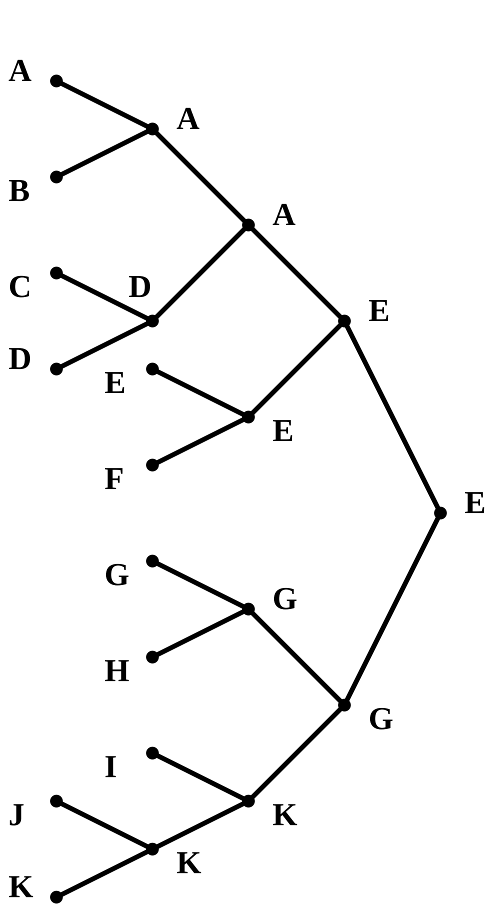


“Φυσικός” τρόπος

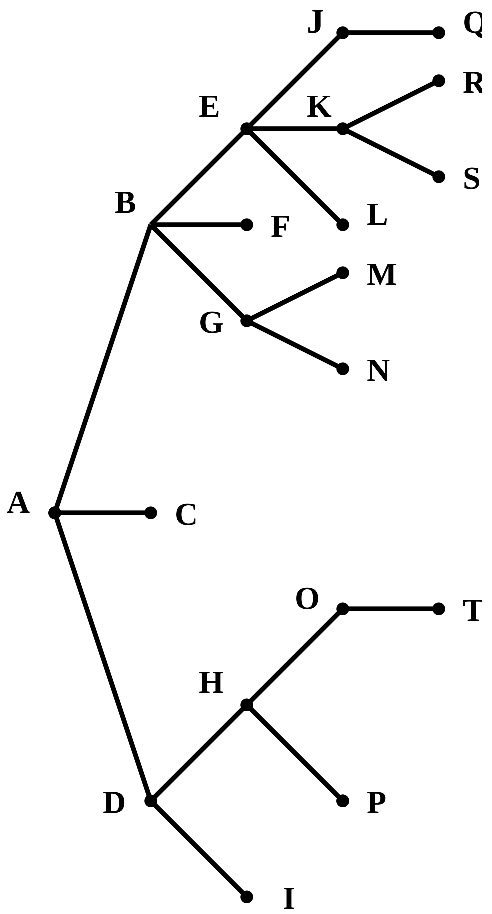


Στην πληροφορική

Πρόταση 1. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
1) Το G είναι δένδρο.



Τουρνουά



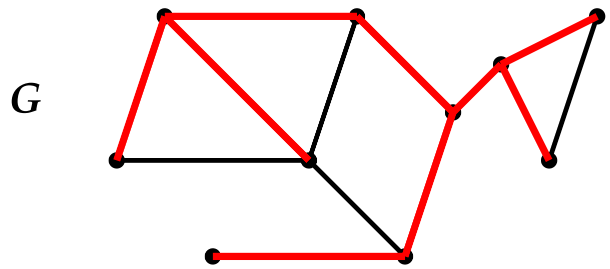
Γενεαλογικά δένδρα

2) Κάθε δύο κόμβοι του G ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
3) Το G είναι συνεκτικό, με $|X| = |E| + 1$.
4) Το G δεν έχει κύκλους και $|X| = |E| + 1$.
5) Το G δεν έχει κύκλους και αν ενώσουμε δυο οποιουσδήποτε μη γειτονικούς κόμβους δημιουργούμε γράφημα με ακριβώς ένα κύκλο.
6) Το G είναι συνεκτικό, δεν είναι πλήρες (εκτός αν είναι το K_1, ή το K_2) και αν ενώσουμε δύο οποιουσδήποτε μη γειτονικούς κόμβους δημιουργούμε γράφημα με ακριβώς ένα κύκλο.
7) Το G δεν είναι το $K_3 \cup K_1$ ή το $K_3 \cup K_2$, $|X| = |E| + 1$ και αν ενώσουμε δύο οποιουσδήποτε μη γειτονικούς κόμβους δημιουργούμε γράφημα με ακριβώς ένα κύκλο.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γράφημα $G_1 = (X, E_1)$ λέγεται γενετικό υπογράφημα ενός γραφήματος $G = (X, E)$, αν $E_1 \subseteq E$. Αν το G_1 είναι δένδρο, τότε έχουμε ένα **γενετικό (ή γεννητικό, ή μερικό) δένδρο**, ή **δένδρο ζεύξης** του G.
Παράδειγμα :
(Φυσικά μπορούμε να βρούμε κι άλλα γενετικά δένδρα για το ίδιο G).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Ένα γράφημα έχει (τουλάχιστον ένα) δένδρο ζεύξης αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.*

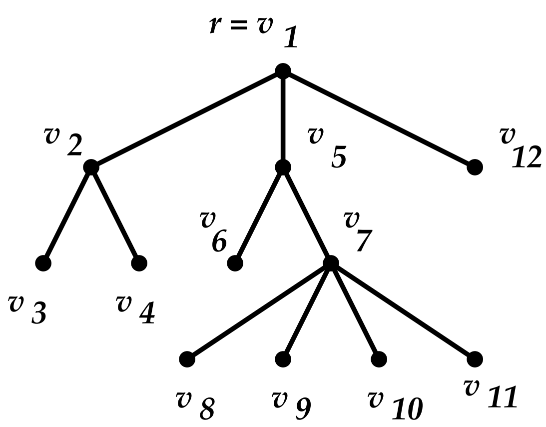
Δένδρο με ρίζα είναι ένα δένδρο με έναν ειδικά επιλεγμένο κόμβο (τη **ρίζα** του δένδρου).
Έστω r η ρίζα του δένδρου T. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ λέγονται **υποδένδρα της ρίζας** r. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα : Ρίζα καθενός



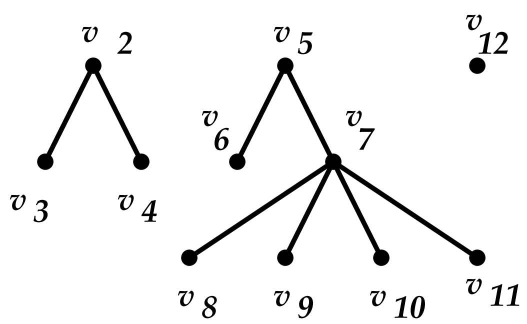
Το ‘‘κόκκινο’’ γράφημα είναι γενετικό δένδρο του G.

είναι το άλλο άκρο του δεσμού που περιέχει την ρίζα r του T. Η έννοια των υποδένδρων ενός οποιουδήποτε κόμβου (που δεν είναι φύλλο) ορίζεται ανάλογα.

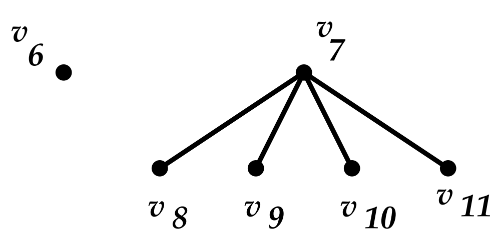
Παραδείγματα :



Υποδένδρα της ρίζας v_1 είναι τα :



Υποδένδρα του κόμβου v_5 είναι τα



Ορίζουμε το **επίπεδο** $l(v)$ ενός κόμβου v του T ως εξής: $l(r) = 1$ και αν στο (μοναδικό) $r - v$ μονοπάτι $(r, \ldots, u, v)$ έχουμε $l(u) = i$, τότε $l(v) = i + 1$.

(Στην περίπτωση αυτή το u λέγεται **γονέας** του v και το v λέγεται **παιδί** του u. Παιδιά του ίδιου γονέα λέγονται **αδέλφια**).

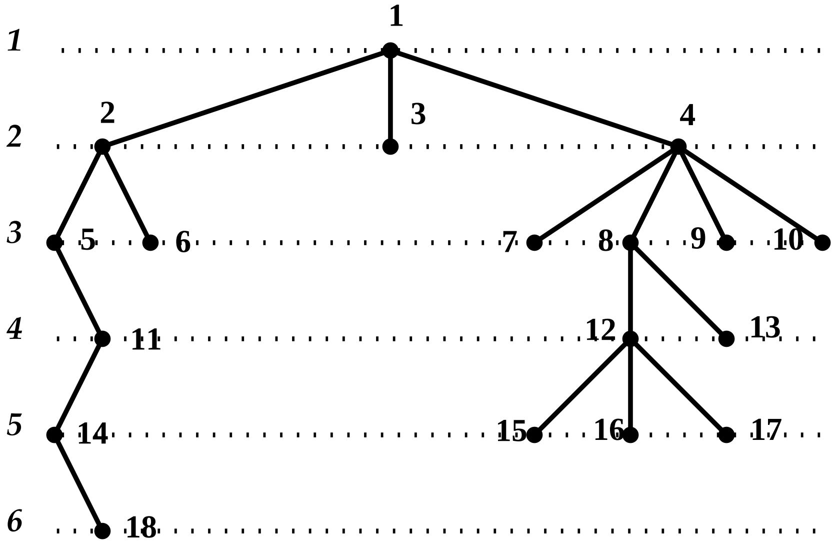
Αν υπάρχει στο T διαδρομή από ένα κόμβο v_1 σε ένα κόμβο v_k, η οποία χρησιμοποιεί κόμβους με επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι το v_1 είναι **πρόγονος** του v_k και το v_k είναι **απόγονος** του v_1.

Ένας κόμβος χωρίς παιδιά λέγεται **φύλλο** (ή **τερματικός κόμβος**). Αλλιώς λέγεται **ενδιάμεσος** κόμβος.

Ύψος (ή **βάθος**) ενός δένδρου λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κόμβων του.

Παράδειγμα :

Επίπεδα



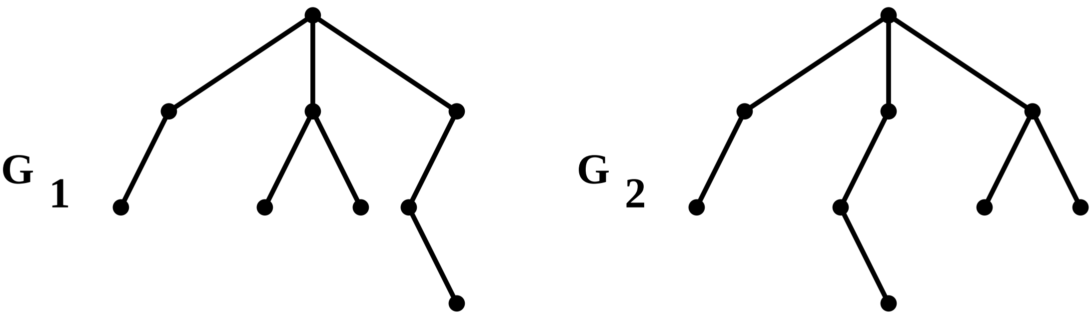
1 : ρίζα	2 : γονέας των 5, 6
5, 6 : παιδιά του 2	4 : γονέας του 7
7, 8, 9, 10 : παιδιά του 4	15, 16, 17 : αδέλφια
2 : πρόγονος των 5,6, 11,14,18	15 : απόγονος των 1, 4, 8, 12
3, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18 : φύλλα	
11 : ενδιάμεσος κόμβος	Ύψος του δένδρου = 6.

Παρατήρηση : Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν $l(r) = 0$ αντί 1.

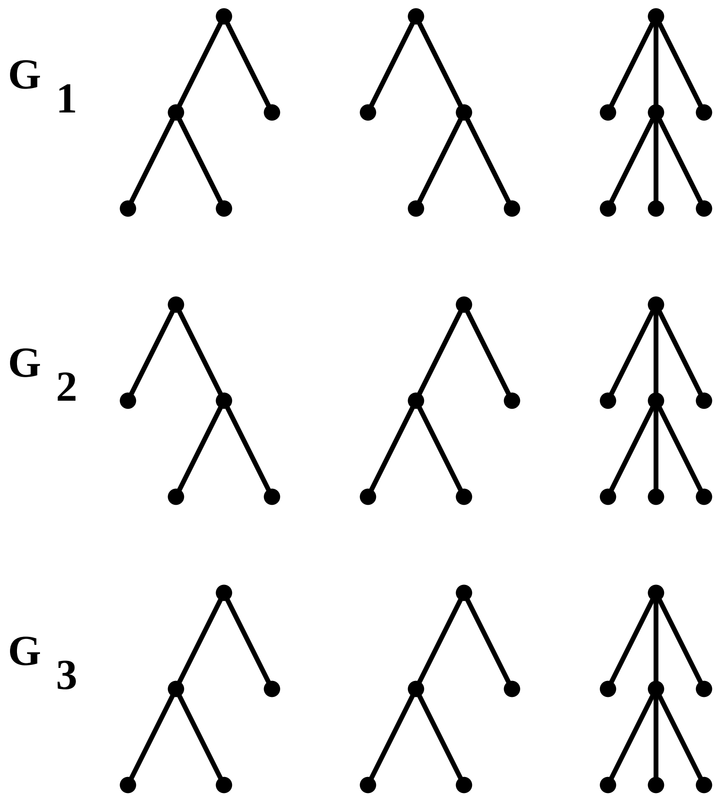
ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΕΝΔΡΑ

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **διατεταγμένο** αν η αλλαγή της σχετικής θέσης των υποδένδρων της ρίζας του θεωρείται ότι δημιουργεί μη ισόμορφο δένδρο.

Παράδειγμα :



Αν τα G_1, G_2 δεν θεωρηθούν διατεταγμένα τότε $G_1 \simeq G_2$, αλλά τα διατεταγμένα δένδρα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα. (Σ' ένα διατεταγμένο δένδρο, τα υποδένδρα της ρίζας χαρακτηρίζονται σαν πρώτο, δεύτερο κ.λπ. από αριστερά πρός τα δεξιά).



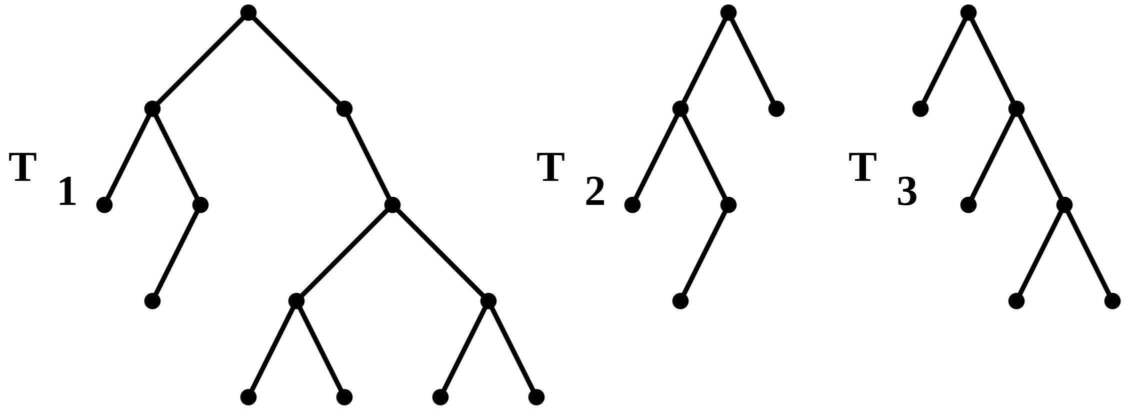
Διατεταγμένο δάσος είναι ένα (διατεταγμένο) σύνολο από ξένα, διατεταγμένα δέντρα. Τα τρία δάση G_1, G_2, G_3 είναι ισόμορφα. Δεν είναι όμως ισόμορφα, αν θεωρηθούν ως διατεταγμένα δάση.

Ένα διατεταγμένο δένδρο, στο οποίο κάθε κόμβος επιτρέπεται να έχει το πολύ k παιδιά, λέγεται k-**δένδρο**.

Παράδειγμα : Το πρώτο και το δεύτερο διατεταγμένο δένδρο του διατεταγμένου δάσους G_1 του τελευταίου παραδείγματος, είναι 2-δένδρα, ενώ το τρίτο είναι 3-δένδρο.

2. ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **δυαδικό δένδρο** αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξί παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξί).



Τρία δυαδικά δένδρα T_1, T_2 και T_3.

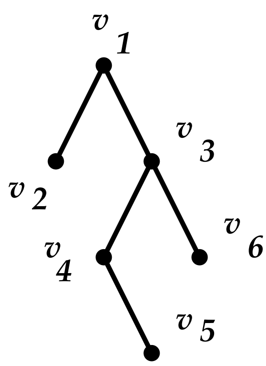
Παρατήρηση : Σε αντίθεση με τον γενικό ορισμό των γραφημάτων, στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο T με $X(T) = \emptyset$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ (ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ) ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΑΔΙΚΟΥ ΔΕΝΔΡΟΥ

Δυαδικό δένδρο είναι το κενό γράφημα καθώς και κάθε δένδρο που περιέχει μια ρίζα τα υποδένδρα της οποίας είναι δυαδικά δένδρα - το αριστερό και το δέξι.

Παράδειγμα :

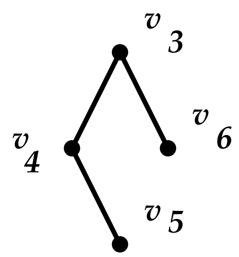
T



Το T είναι δυαδικό δένδρο αφού η ρίζα του (v_1) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα :
Το T_1 (αριστερό) και το T_2 (δεξί) :

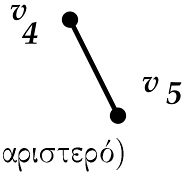
T *1*

T 2



Πράγματι, το T_2 είναι δυαδικό αφού η ρίζα του (v_2) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα : το κενό (αριστερό) και το κενό (δεξί). Επίσης, το T_2 είναι δυαδικό αφού η ρίζα του (v_3) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα : το T_3 :

T *3*



(αριστερό)

και το T_4 :

$\mathbf{T}_4$ $\bullet\, v_6$

(δεξί)

(Πράγματι το T_3 είναι δυαδικό αφού η ρίζα του (v_4) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα : το κενό (αριστερό) και το

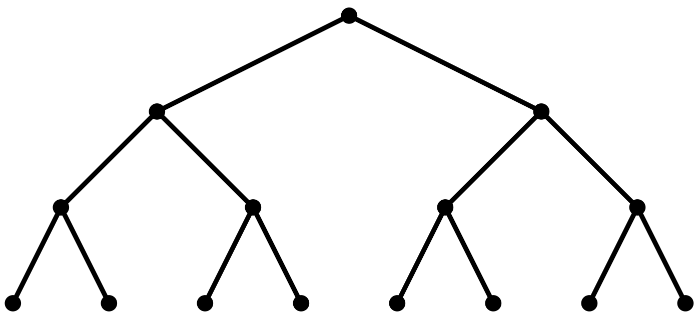
$\mathbf{T}_5$ $\bullet\, v_5$

(δεξί)

Επίσης το T_4 είναι δυαδικό).

Αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο παιδιά και όλα τα φύλλα έχουν το ίδιο επίπεδο έχουμε ένα **πλήρες δυαδικό** δένδρο.

Παράδειγμα :

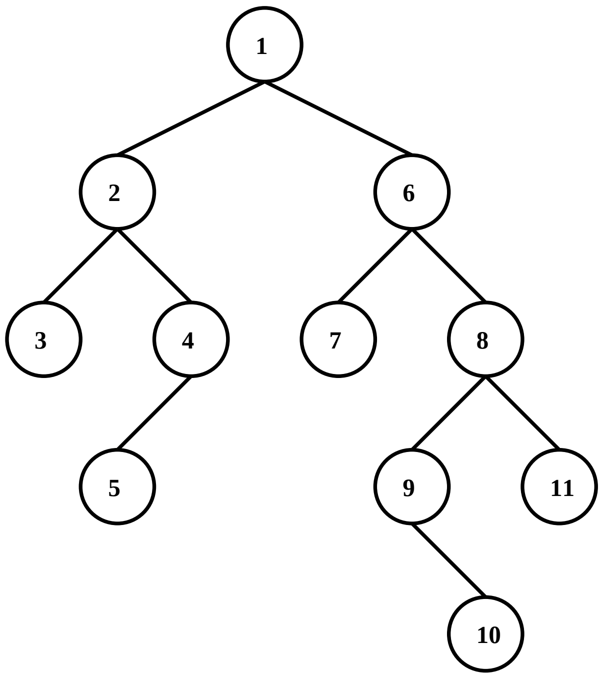


Παρατήρηση : Αν το ύψος ενός πλήρους δυαδικού δένδρου είναι h, τότε το δένδρο αυτό περιέχει προφανώς $2^h - 1$ ακριβώς κόμβους.

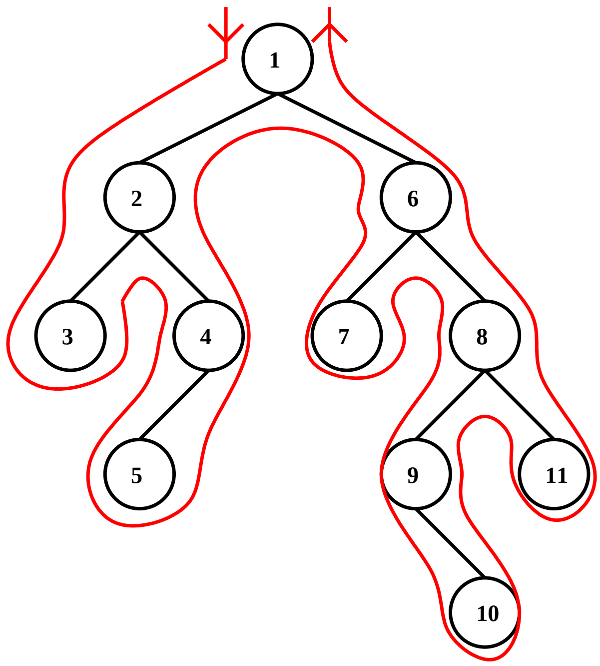
ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ

1) Προδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πρίν επισκεφθούμε (αριθμήσουμε) σε προδιάταξη το αριστερό και το δεξί υποδένδρο του.

Παράδειγμα :

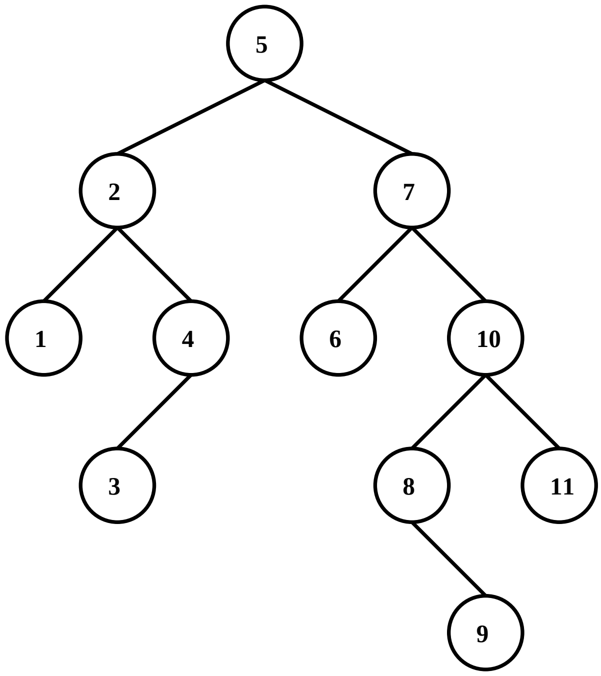


‘‘Πρακτικός’’ τρόπος : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) την κάθε κορυφή μόλις την πρωτοσυναντήσουμε καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :



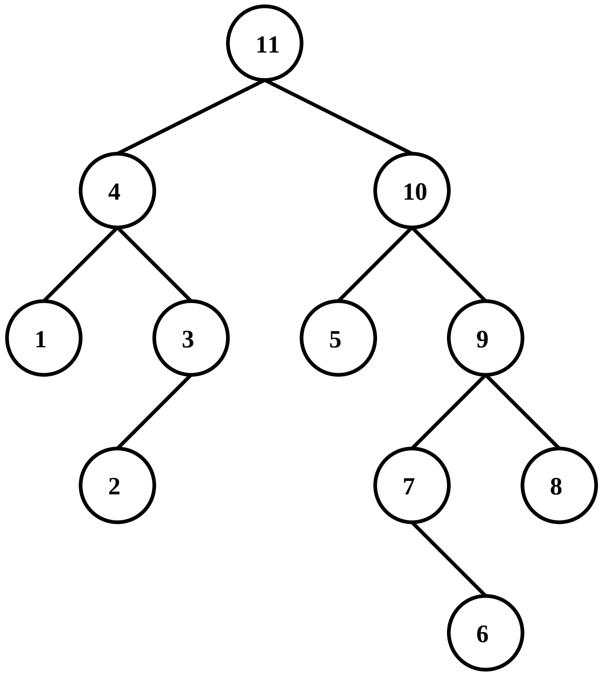
2) Ενδοδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο μετά την επίσκεψη (αρίθμηση) σε ενδοδιάταξη του αριστερού και πρίν την επίσκεψη (αρίθμηση) σε ενδοδιάταξη του δεξιού υποδένδρου του.

Παράδειγμα :

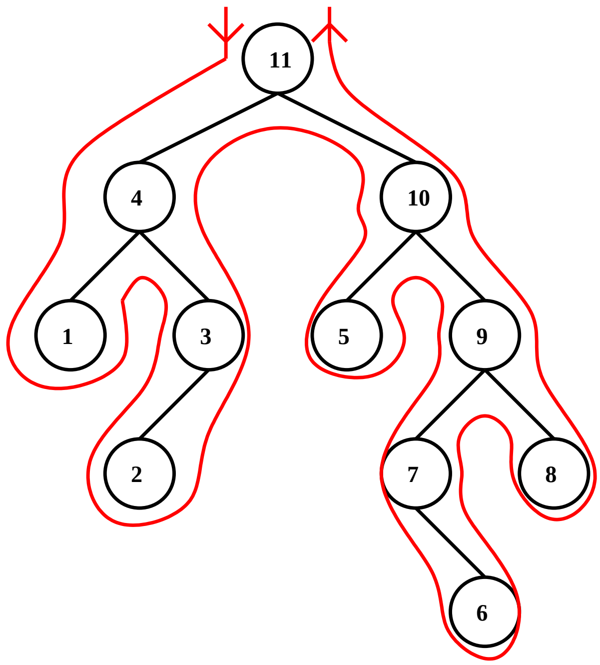


3) Μεταδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού έχουμε επισκεφθεί (αριθμήσει) σε μεταδιάταξη και το αριστερό και το δεξί υποδένδρο του.

Παράδειγμα :

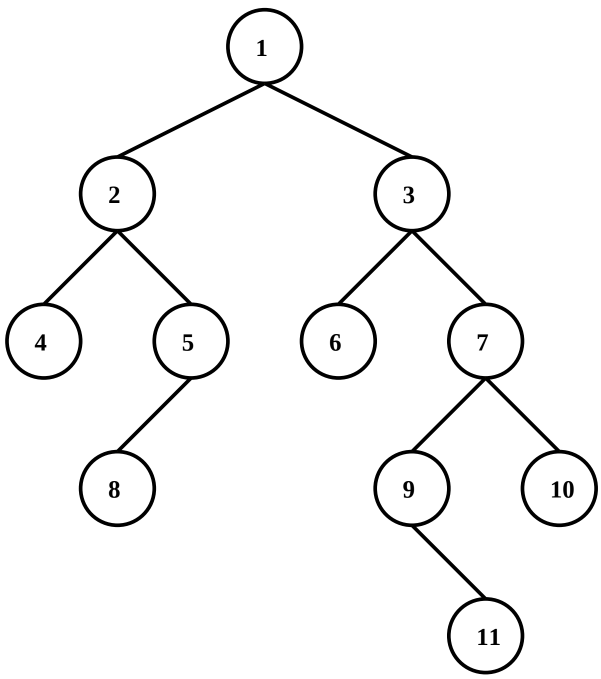


''Πρακτικός'' τρόπος : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο την τελευταία φορά που τον συναντάμε (δηλαδή καθως τον εγκαταλείπουμε για να πάμε προς τον γονέα του) καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :



4) **Διάσχιση κατά σειρά επιπέδων** : Επισκεπτόμαστε τις κορυφές κατά επίπεδο (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τις κορυφές από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα :

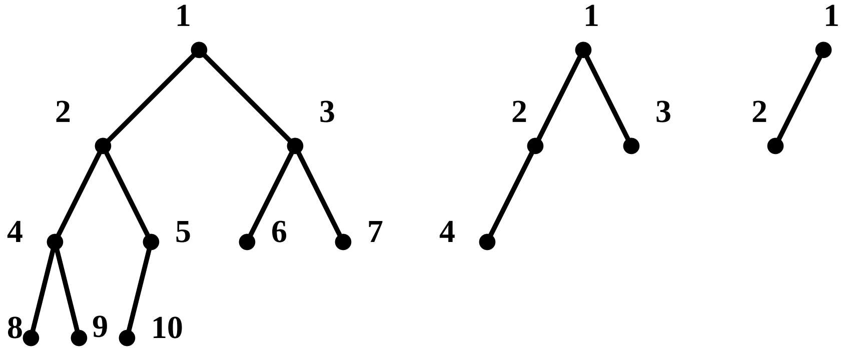


ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΕΝΑ ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

Έστω T ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους h, αριθμημένο κατά σειρά επιπέδων και k οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός μικρότερος του $2^h - 1$.

Το δένδρο που προκύπτει αν διαγράψουμε τα k σημεία του T που είναι αριθμημένα με αριθμούς μεγαλύτερους από $2^h - k - 1$ ονομάζεται **συμπληρωμένο δυαδικό δένδρο**.

Παράδειγμα :



Τρία συμπληρωμένα δυαδικά δένδρα.

Υπάρχουν πολλές ακόμα ειδικές κατηγορίες δυαδικών δένδρων : εκτεταμένα, αναζήτησης (ισορροπημένα, AVL) κ.λπ.

3. ΔΕΝΔΡΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

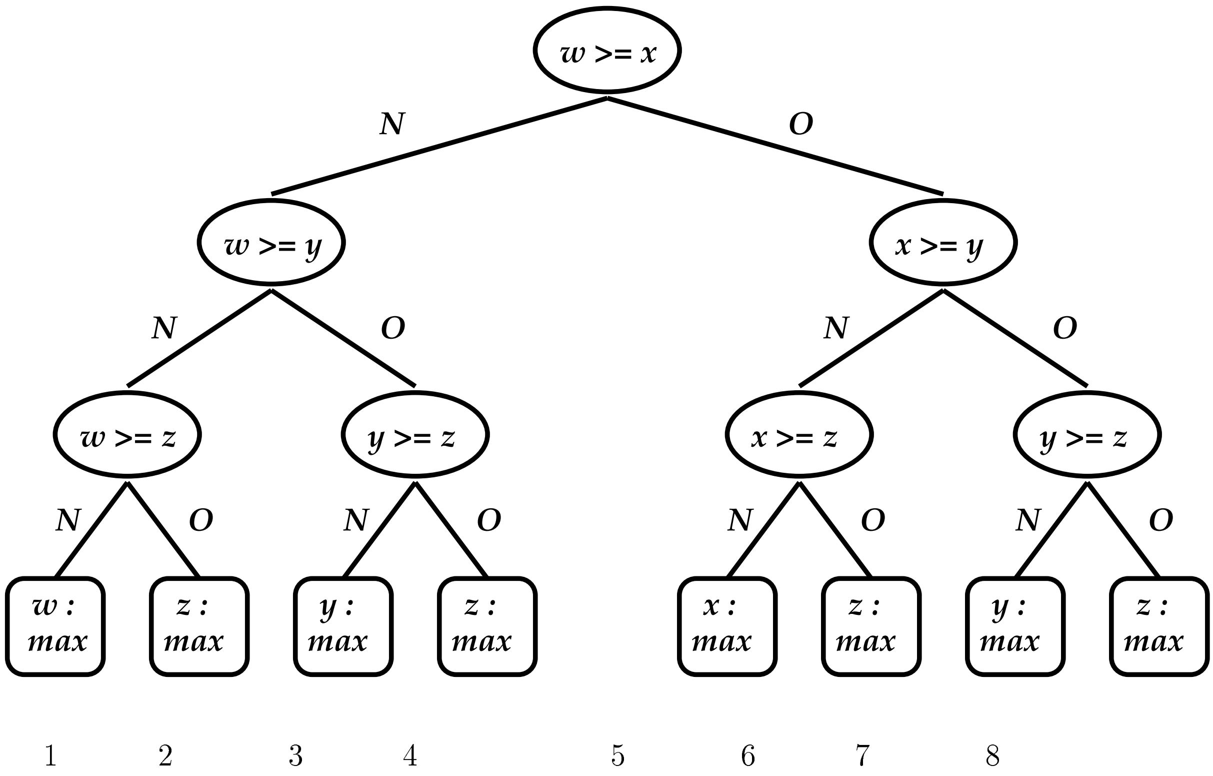
Στον προγραμματισμό συχνά χρησιμοποιούνται δένδρα, (ιδιαίτερα : δυαδικά δένδρα) για να διευκολύνουν την έρευνα και τη διερεύνηση περιπτώσεων και για να μοντελοποιήσουν τη λογική των αλγορίθμων.

Προταση 3. *Το ύψος h ενός k-δένδρου με l φύλλα είναι τουλάχιστον* $\log_k l + 1$.

Δένδρο απόφασης λέγεται ένα k-δένδρο του οποίου κάθε εσωτερική κορυφή παριστάνει μια ερώτηση για την οποία πρέπει να αποφασίσουμε. Οι δυνατές απαντήσεις (αποφάσεις) παριστάνονται από τους δεσμούς που συνδέουν τον κόμβο με τους κόμβους του επόμενου επίπεδου. Τα τελικά αποτελέσματα της διαδικασίας παριστάνονται από τα φύλλα του δένδρου.

Πολύ συχνά, οι δυνατές απαντήσεις κάθε φορά είναι : ''Ναι'' (Ν) ή ''Όχι '' (Ο), οπότε το δένδρο απαφάσης είναι ένα δυαδικό δένδρο, όπως φαίνεται στην παρακάτω εφαρμογή.

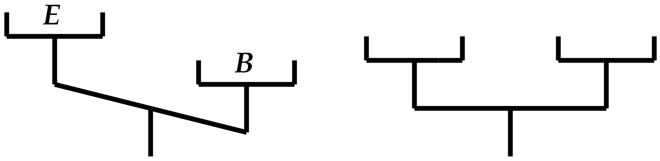
Εφαρμογή 1 : Η λογική του προγράμματος που βρίσκει το $\max\{w, x, y, z\}$, όπου $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, μπορεί να παρασταθεί από το παρακάτω δυαδικό δένδρο αποφάσεων:



1. $w \geq x, y, z$
2. $z > w \geq x, y$
3. $y \geq z, \quad y > w \geq x$
4. $z > y > w \geq x$
5. $x > w, \quad x \geq y, z$
6. $z > x \geq y, \quad x > w$
7. $y \geq z, \quad y > x > w$
8. $z > y > x > w.$

Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή που χρησιμοποιεί ένα 3-δένδρο απόφασης:

Εφαρμογή 2 (Το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων) : Ένα κανονικό νόμισμα έχει αριθμό 0. Υπάρχουν n άλλα νομίσματα ίδια ακριβώς στην εμφάνιση με το 0, που έχουν όμως αριθμούς $1, 2, \ldots, n$. Υποψιαζόμαστε ότι ένα νόμισμα μπορεί να είναι ''κίβδηλο'' (είτε λίγο ελαφρύτερο, είτε λίγο βαρύτερο). Να δειχθεί ότι χρειάζονται τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$ ζυγίσματα σε μια ζυγαριά η οποία δείχνει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή δύο ίσου βάρους



για να αποφασίσουμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα, ποιο είναι αυτό και αν είναι βαρύ ή ελαφρύ.

Να περιγραφεί μια διαδικασία που να χρησιμοποιεί ακριβώς αυτό τον αριθμό ζυγισμάτων, όταν $n = 4$.

Απάντηση : Υπάρχουν $2n + 1$ πιθανες τελικές απαντήσεις (φύλλα) στο δένδρο απόφασης, για το παραπάνω πρόβλημα

k,	$1B$,	$1E$,	$2B$,	$2E$,	$\ldots$,	nB,	nE
καλά όλα	το 1 είναι βαρύ	το 1 είναι ελαφρύ	το 2 είναι βαρύ	το 2 είναι ελαφρύ		το n είναι βαρύ	το n είναι ελαφρύ

Το δένδρο απόφασης εδώ είναι ένα 3-δένδρο, αφού κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν τρία πιθανά αποτελέσματα :

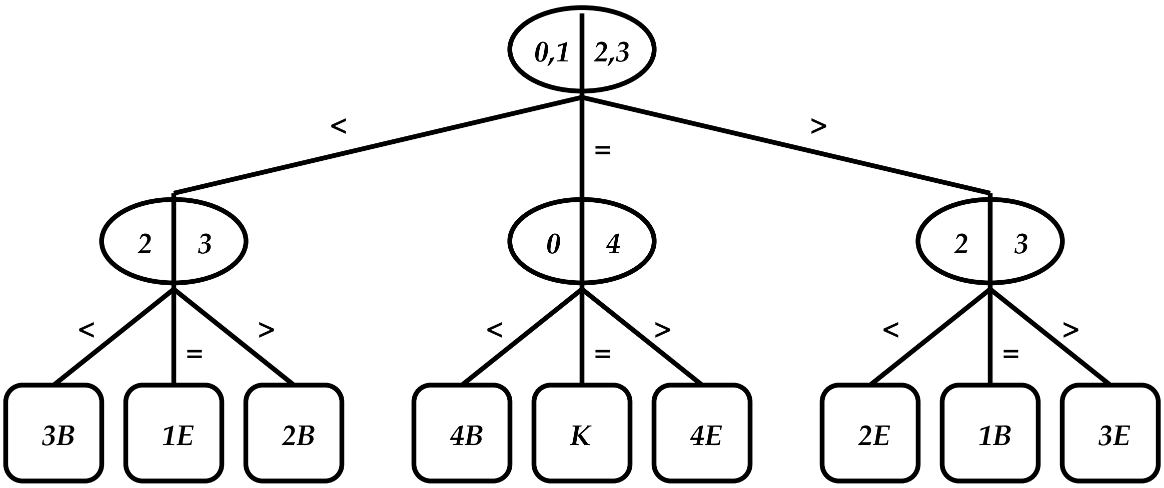
$<$: το αριστερό είναι ελαφρύτερο,

$=$: τα δύο μέρη έχουν το ίδιο βάρος,

$>$: το αριστερό είναι βαρύτερο.

Άρα το ύψος του δένδρου είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)+1$, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$ (αφού τα φύλλα του δένδρου αποφάσεων δίνουν τις απαντήσεις και όχι ερωτήσεις-ζυγίσματα).

Για $n=4$, έχουμε $\log_3(2\cdot 4+1)+1 = log_3 9+1 = 3$, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον 2. Η λύση με ακριβώς δύο ζυγίσματα φαίνεται στο παρακάτω 3-δένδρο αποφάσεων:



Εφαρμογή 3 : Να διαταχθούν, με τη χρήση ενός δυαδικού δένδρου αποφάσεων, τρεις διαφορετικοί ανα δύο αριθμοί, εκφράζοντας τη λογική του αλγόριθμου bubblesort.

Απάντηση : Υπενθυμίζουμε ότι στη μέθοδο bubblesort συγκρίνουμε (και διατάσουμε) τους αριθμούς ανά δύο από πάνω (ή από αριστερά) προς τα κάτω (ή προς τα δεξιά), έτσι ώστε ο μεγαλύτερος αριθμός καταλήγει τελευταίος.

Μετά, στην υπολίστα που παίρνουμε αγνωόντας τον τελευταίο αριθμό, ξανακάνουμε το ίδιο, κ.ο.κ.

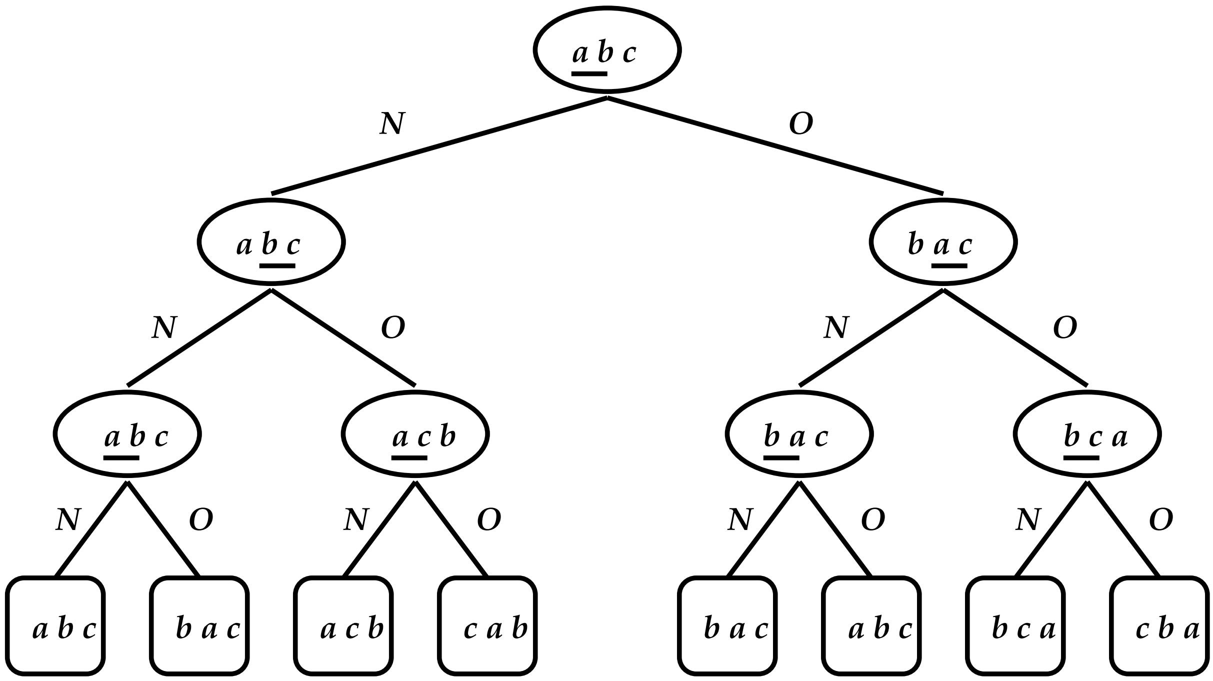
Στους τρεις αριθμούς λοιπόν, συγκρίνουμε 1ο με 2ο και αφού τους τοποθετήσουμε στην κατάλληλη σειρά (πρώτα τον μικρό, μετά τον μεγάλο), συγκρίνουμε 2ο με 3ο (της λίστας που μόλις διαμορφώσαμε). Βάζουμε τον μικρότερο από αυτούς δεύτερο και τον μεγαλύτερο τρίτο (δηλαδή τελευταίο). Έτσι, μένει να συγκρίνουμε (στην καινούργια λίστα που μόλις διαμορφώσαμε) 1ο με 2ο (αφού ο μεγαλύτερος από τους τρεις έχει ήδη τοποθετηθεί τελευταίος).

Παράδειγμα :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \text{1ο βήμα} & & \text{2ο βήμα} & & \text{3ο βήμα} & \\
\mathbf{8}\,| & & \mathbf{6} & & \mathbf{6}\,| & & \mathbf{4} \\
\mathbf{6}\,| & \Rightarrow & \mathbf{8}\,| & & \mathbf{4}\,| & \Rightarrow & \mathbf{6} \\
\mathbf{4} & & \mathbf{4}\,| & \Rightarrow & \mathbf{8} & & \mathbf{8}
\end{array}
$$

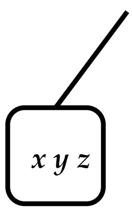
1ο βήμα : διατάσουμε 1ο, 2ο.
2ο βήμα : διατάσουμε 2ο, 3ο της λίστας που διαμορφώσαμε (ο μεγαλύτερος από τους τρείς είναι ο 8.
3ο βήμα : διατάσουμε 1ο, 2ο της λίστας που μόλις διαμορφώσαμε.

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να σχηματίσουμε το δένδρο απόφασης που εκφράζει τις παραπάνω σκέψεις. (Σε κάθε κορυφή, η ερώτηση η οποία τίθεται είναι κατά πόσον από τους δύο υπογραμμισμένους αριθμούς, οι οποίοι είναι αυτοί που συγκρίνουμε κάθε φορά, ο πρώτος είναι μικρότερος από το δεύτερο):

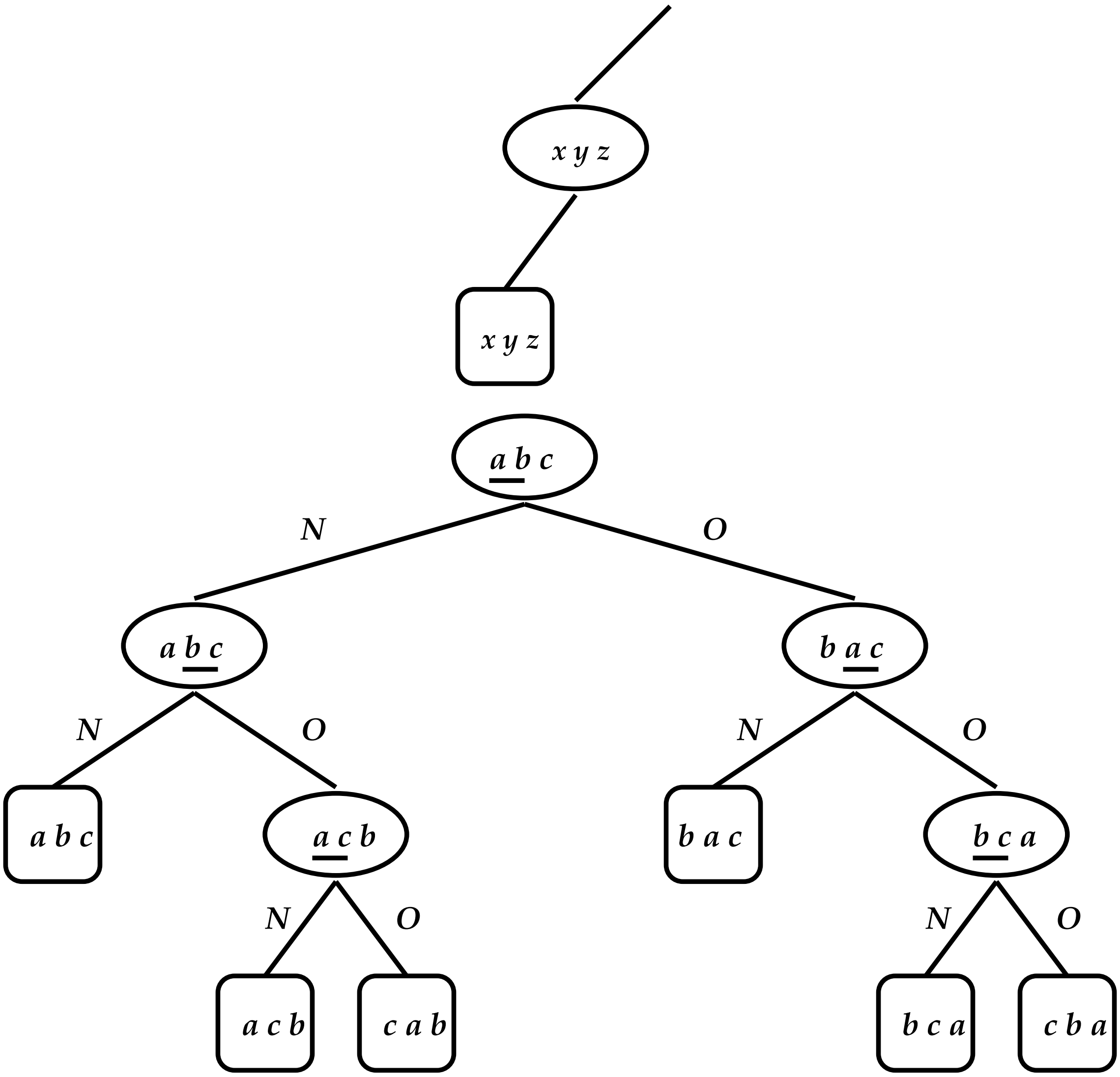


Παρατηρούμε ότι παίρνουμε 8 απαντήσεις, ενώ γνωρίζουμε ότι οι μεταθέσεις τριών αριθμών είναι $3! = 6$. Πράγματι, οι abc, bac εμφανίζονται από δύο φορές.

Μπορούμε λοιπόν να ''κλαδέψουμε'' το δένδρο αποφάσεων, ώστε να δώσει ακριβώς μια φορά κάθε σωστή απάντηση (να έχει δηλαδή 6 φύλλα), αν παρατηρήσουμε τα εξής : Το δεύτερο και το έκτο από τα οκτώ αποτελέσματα είναι αδύνατο να προκύψουν στις θέσεις αυτές : Το δεύτερο (bac, δηλαδή $b < a < c$) είναι κατάληξη της αρχικής περίπτωσης $a < b$ (αδύνατο) και το έκτο (abc, δηλαδή $a < b < c$) είναι κατάληξη της αρχικής περίπτωσης $b < a$ (επίσης αδύνατο). Γράφοντας στο δένδρο



αντί για σε κάθε περίπτωση που ένας γονιός έχει μοναδικό παιδί-φύλλο, παίρνουμε τελικά το ζητούμενο δυαδικό δένδρο απόφασης:


x y z
x y z
a b c
N
O
a b c
b a c
N
O
N
O
a b c
a c b
b a c
b c a
N
O
N
O
a c b
c a b
b c a
c b a