Άσκηση
Να αποδεχθεί ότι η εξίσωση $2x^3+3x^2+6x+10=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική λύση.

Λύση
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2x^3+3x^2+6x+10$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επειδή

$$f(-2)\cdot f(0)=(-6)(10)=-60<0,$$

εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $f/[-2,0]$ οπότε θα υπάρχει $\xi\in(-2,0)$ με $f(\xi)=0$, δηλαδή η δοσμένη εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.
Θα αποδειχθεί ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.
Πραγματικά, αν υπάρχουν δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις ρ_1,ρ_2 της δοσμένης εξίσωσης με $\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f/[\rho_1,\rho_2]$, οπότε θα υπάρχει $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ με $f'(\rho)=0$.
Τούτο όμως είναι άτοπο, διότι

$$f'(x)=6(x^2+x+1)>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου είναι αρνητική.
Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Άσκηση
Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ., η ανισότητα

$$e^x\geq x+1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Λύση
Για $x=0$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.
Αν $x>0$, τότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(t)=e^t/[0,x]$, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-e^0}{x}$$
$$\Leftrightarrow xe^{\xi}=e^x-1.$$

Εξάλλου, επειδή $0<\xi$ έπεται ότι $1<e^{\xi}$ και $x<xe^{\xi}$. Άρα προκύπτει ότι $x+1<e^x$. Ανάλογα αποδεικνύεται και η περίπτωση όπου $x<0$.

Άσκηση
Να αποδειχθεί η ταυτότητα:
$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, για κάθε $x\in[-1,1]$.

Λύση
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x/[-1,1]$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$, με

$$\begin{aligned} f'(x)&=(\arcsin x)'+(\arccos x)'\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &=0. \end{aligned}$$

Τότε, η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Εξάλλου, επειδή

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

προκύπτει ότι $f(x) = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$, δηλαδή

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

για κάθε $x \in [-1,1]$.

Άσκηση

Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x - 2\sin x}{x^2}.$$

Λύση

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x - 1 + x - 2\sin x\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

εφαρμόζουμε τον κανόνα του L’ Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x - 2\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1 + x - 2\sin x\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1 - 2\cos x}{2x} \qquad (1)$$

Επειδή $\lim_{x\to 0}\left(e^x + 1 - 2\cos x\right) = \lim_{x\to 0}(2x) = 0$, εφαρμόζουμε πάλι τον κα-νόνα του L’ Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1 - 2\cos x}{2x} = \lim_{n\to 0} \frac{\left(e^x + 1 - 2\cos x\right)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 2\sin x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x - 2\sin x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση

Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης f, όταν:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 7}.$$

Λύση

Επειδή $x^4 - 2x^2 + 7 = \left(x^2 - 1\right)^2 + 6 > 0$, έπεται ότι η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε x και είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -\frac{4x(x-1)(x+1)}{\left(x^4 - 2x^2 + 7\right)^2}.$$

Προφανώς,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Κατόπιν τούτου, η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f προκύπτουν από τον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	
			τ.μ.		τ.ε.		τ.μ.		

Άρα για $x=-1$ και $x=1$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=f(1)=\frac{1}{6}$, ενώ για $x=0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0)=\frac{1}{7}$.

Άσκηση

Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορισθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής:

$$f(x)=x^4-2x^3+15x+4/\square\ .$$

Λύση

Είναι

$$f'(x)=4x^3-6x^2+15 \text{ και } f''(x)=12x(x-1).$$

Επειδή

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1,$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

και

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,1),$$

έπεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$, και γνήσια κοίλη στο διάστημα $[0,1]$. Τα σημεία καμπής είναι τα $(0,f(0))=(0,4)$ και $(1,f(1))=(1,18)$.

Άσκηση

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\frac{2x^2+x+1}{2x-1}.$$