Εξισώσεις Διαφορών

Κάθε συναρτησιακή εξίσωση όπου εμφανίζεται σ' αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή x και η εξαρτημένη μεταβλητή $y(x)$ (δηλαδή η αγνωστή συνάρτηση) και ορισμένες διαφορές της $\Delta y(x), \Delta y^2(x), \ldots, \Delta^n y(x)$ ονομάζεται **εξίσωση διαφορών n-τάξεως**.

Στα επόμενα θα γράφουμε y_x αντί για $y(x)$.

Παράδειγμα

$$\Delta^3 y_x - 2\Delta^2 y_x + 5\Delta y_x + 7y_x = 3\cos x.$$

Αναγωγικές εξισώσεις

Αν υποθέσουμε ότι y_x είναι μια συνάρτηση, όπου ο y_{x+n} εκφράζεται συναρτήσει των προηγουμένων όρων $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}$ δηλαδή ισχύει

$$y_{x+n} = F(y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}) \tag{1}$$

για κάθε x, τότε η σχέση (;;) ορίζει μια συναρτησιακή εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση y_x που την ικανοποιεί.

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **αναγωγική εξίσωση n-τάξεως**.

Με άλλα λόγια, η αναγωγική εξίσωση είναι μια συναρτησιακή εξίσωση όπου εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή x και ορισμένες διαδοχικές τιμές $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}$ της άγνωστης συνάρτησης.

Παράδειγμα

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 12y_{x+1} - y_x = 3\cos x.$$

Εκφράζοντας κάθε διαφορά $\Delta^k y_x$ ως γραμμικό συνδυασμό των

$$y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}$$

σύμφωνα με τον τύπο:

$$\Delta^n y_x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y_{x+n-k}$$

η εξίσωση διαφορών μετατρέπεται σε μια αναγωγική εξίσωση.

Έτσι αν θέσουμε

$$\begin{aligned}
\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x \\
\Delta^2 y_x &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x \\
\Delta^3 y_x &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x
\end{aligned}$$

στην εξίσωση διαφορών του παραδείγματος

$$\Delta^3 y_x - 2\Delta^2 y_x + 5\Delta y_x + 7y_x = 3\cos x$$

προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&(y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x) \\
&\qquad - 2(y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) \\
&\qquad + 5(y_{x+1} - y_x) + 7y_x = 3\cos x \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 12y_{x+1} - y_x = 3\cos x.$$

Κατόπιν τούτων οι εξισώσεις διαφορών και οι αναγωγικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες.
Λύση: ονομάζεται κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.
Γενική λύση: ονομάζεται η λύση της οποίας ο τύπος περιέχει όλες τις λύσεις.

Παράδειγμα

1. Η συνάρτηση $y_x = 3^x$ είναι **λύση** της εξίσωσης

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} - 3y_x = 0$$

διότι

$$3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 3^x = 9 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x = 0.$$

2. Η γενική λύση της εξίσωσης

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$

είναι (όπως θα αποδείξουμε αργότερα) η

$$y_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 3^x.$$

Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Γενική μόρφη:

$$a_n y_{x+n} + a_{n_1} y_{x+n-1} + \cdots + a_0 y_x = \beta(x) \tag{1}$$

Ομογενής αν $\beta(x) = 0$, δηλαδή

$$a_n y_{x+n} + a_{n_1} y_{x+n-1} + \cdots + a_0 y_x = 0 \tag{2}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$P(\lambda) = 0$$

Επίλυση της ομογενούς (;;)

Με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκουμε τις **βασικές λύσεις** και η **γενική λύση** θα δίνεται ως **γραμμικός συνδυασμός αυτών.**

Εύρεση των βασικών λύσεων.

1. Αν λ είναι απλή πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε η συνάρτηση λ^x είναι βασική λύση.

2. Αν λ είναι πραγματική ρίζα πολλαπλότητας k της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε οι συναρτήσεις:
$$\lambda^x, x\lambda^x, \ldots, x^{k-1}\lambda^x$$
είναι βασικές λύσεις.

3. Αν $\lambda = \alpha + \beta i$ είναι μιγαδική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε θα είναι ρίζα και η συζυγής της $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$.

   Γι΄ αυτές τις δύο πρέπει να βρούμε δύο βασικές λύσεις.

   Γράφουμε
$$\lambda = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
   (τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού).

Τότε οι βασικές λύσεις που αντιστοιχούν στις $\lambda, \overline{\lambda}$ είναι οι:
$$\rho^x \cos\theta x \text{ και } \rho^x \sin\theta x$$

Παραδείγματατα

1.
$$2y_{x+3} + 3y_{x+2} - 8y_{x+1} + 3y_x = 0$$
$$P(\lambda) = 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Άρα,
$$y_x = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^x + c_2\,(1)^x + c_3\,(-3)^x\,.$$

2.
$$y_{x+3} + 7y_{x+2} + 16y_{x+1} + 12y_x = 0$$
$$P(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = -2 \text{ διπλή ή } \lambda = -3.$$

Άρα,
$$y_x = c_1(-2)^x + c_2 x(-2)^x + c_3(-3)^x$$

3.
$$y_{x+3} - 4y_{x+2} + 4y_{x+1} - 3y_x = 0$$
$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 3 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Μετατροπή της $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ σε τριγωνομετρική μορφή.

Γενικά ισχύουν για $\lambda = \alpha + \beta i$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \rho\cos\theta \\ \beta = \rho\sin\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \mathrm{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha} \end{array}\right.$$

όπου $\rho > 0$ και $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Έτσι εδώ είναι:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

(αφού $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο).

Άρα,

$$y_x = c_1 3^x + c_2 1^x \cos\frac{\pi}{3}x + c_3 1^x \sin\frac{\pi}{3}x$$

Ασκήσεις

Βιβλίο : Απειροστικός Λογισμός, Τόμος 2.

Λυμένες : 14–20

Άλυτες : 21–34

Γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_0 y_x = \beta(x)$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$y_x = y_x^0 + \psi_x$$

όπου

y_x: γενική λύση της μη ομογενούς,

y_x^0: γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς,

ψ_x: μια μερική λύση της μη ομογενούς.

Εύρεση της ψ_x

1η περίπτωση $\quad \beta(x) = \alpha \cdot \gamma^x$.

Τότε,

$$\psi_x = \begin{cases} c \cdot \gamma^x, & \text{αν } \gamma \text{ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.} \\ c \cdot x^k \cdot \gamma^x, & \text{αν } \gamma \text{ είναι ρίζα πολλαπλότητας } k \text{ της χαρακτηρ. εξίσωσης.} \end{cases}$$

Παραδείγματα

1. $y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - 2y_x = 2 \cdot 3^x$.

$$\begin{aligned}&P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow\\ &\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

Οπότε $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \lambda = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ και

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 \cos\frac{\pi}{3}x + c_3 \sin\frac{\pi}{3}x.$$

Έυρεση της $\psi_x = c \cdot 3^x$

Έχουμε

$$\begin{aligned}&c3^{x+3} - 3c3^{x+2} + 3c3^{x+1} - 2c3^x = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow\\ &7c3^x = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow c = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\psi_x = \frac{2}{7}3^x$$

και τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 \cos\frac{\pi}{3}x + c_3 \sin\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{7}3^x.$$

2. $y_{x+3} - 7y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = 8 \cdot 2^x$.

$$\begin{aligned}&P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow\\ &\lambda = 2 \text{ διπλή ρίζα ή } \lambda = 3.\end{aligned}$$

Άρα,

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x.$$

Εύρεση της $\psi_x = c \cdot x^2 \cdot 2^x$

Έχουμε,

$$\begin{aligned}&c(x+3)^2 2^{x+3} - 7c(x+2)^2 2^{x+2} + 16c(x+1)^2 2^{x+1}\\ &\quad - 12cx^2 2^x = 8 \cdot 2^x \Leftrightarrow\\ &8c(x^2+6x+9) - 28c(x^2+4x+4)+\\ &\quad 32c(x^2+2x+1) - 12cx^2 = 8. \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$72c - 112c + 32c = 8.$$

Άρα, $c = -1$ και $\psi_x = -x^2 2^x$,
οπότε τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x - x^2 2^x.$$

2η περίπτωση $\beta(x) = ax^t$. όπου $t \in \mathbb{N}^*$.

Τότε, $\psi_x = x^k \cdot Q(x)$. όπου $Q(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού t και k ο **ελάχιστος** φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση x^k **δεν** είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Παραδείγματα

1. $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = x^2$.

$$\begin{aligned}&P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow\\ &\lambda = 2 \text{ διπλή ρίζα.}\end{aligned}$$

Άρα, $y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x$.

$$\text{Εύρεση της } \psi_x = x^0(Ax^2 + Bx + \Gamma)$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned}&A(x+2)^2 + B(x+2) + \Gamma -\\ &\qquad 4\left(A(x+1)^2 + B(x+1) + \Gamma\right) +\\ &\qquad 4(Ax^2 + Bx + \Gamma) = x^2 \Leftrightarrow\\ &A(x^2 + 4x + 4) + Bx + 2B + \Gamma -\\ &\qquad 4A(x^2 + 2x + 1) - 4Bx - 4B - 4\Gamma +\\ &\qquad 4Ax^2 + 4Bx + 4\Gamma = x^2 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c} A = 1 \\ -4A + B = 0 \\ -2B + \Gamma = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 4 \\ \Gamma = 8 \end{array}\right\}$$

Άρα $\psi_x = x^2 + 4x + 8$,

οπότε τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + x^4 + 4x + 8.$$

2. $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = x$.

$$\begin{aligned}&P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow\\ &\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.\end{aligned}$$

Άρα, $y_x^0 = c_1 + c_2 3^x$.

$$\text{Εύρεση της } \psi_x = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx)$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned}&A(x+2)^2 + B(x+2) -\\ &\qquad 4\left(A(x+1)^2 + B(x+1)\right) +\\ &\qquad 3(Ax^2 + Bx) = x \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&A(x^2+4x+4)+Bx+2B- \\
&\quad 4A(x^2+2x+1)-4Bx-4B+ \\
&\quad 3Ax^2+3Bx=x \Leftrightarrow \\
&-4Ax-2B=x \Leftrightarrow A=-\frac{1}{4},\;\; B=0
\end{aligned}
$$

Άρα, $\psi_x=-\frac{1}{4}x^2$,
οπότε τελικά

$$y_x=c_1+c_2 3^x-\frac{1}{4}x^2.$$

3η περίπτωση
Συνδυασμός των δυο προηγούμενων.

Παράδειγμα

$y_{x+3}-6y_{x+2}+11y_{x+1}-6y_x=4x+3\cdot 2^x-5^x.$

$$
\begin{aligned}
&P(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0 \Rightarrow \\
&\lambda=1 \text{ ή } \lambda=2 \text{ ή } \lambda=3
\end{aligned}
$$

Άρα, $y_x^0=c_1+c_2 2^x+c_3 3^x$.

$$
\begin{aligned}
\text{Εύρεση της } \psi_x &= x(Ax+B)+\Gamma x2^x+\Delta 5^x \\
&= Ax^2+Bx+\Gamma x2^x+\Delta 5^x.
\end{aligned}
$$

Έχουμε,

$$
\begin{gathered}
A(x+3)^2+B(x+3)+\Gamma(x+3)2^{x+3}+\Delta 5^{x+3}- \\
6A(x+2)^2-6B(x+2)-6\Gamma(x+2)2^{x+2}-6\Delta 5^{x+2}+ \\
11A(x+1)^2+11B(x+1)+11\Gamma(x+1)2^{x+1}+11\Delta 5^{x+1} \\
-6Ax^2-6Bx-6\Gamma 2^x-6\Delta 5^x=4x+3\cdot 2^x-5^x \Leftrightarrow \\
4Ax-4A+2B-2\Gamma 2^x+24\Delta 5^x=4x+3\cdot 2^x-5^x \Leftrightarrow \\
A=1,\;\; B=2\;\; \Gamma=-\frac{3}{2}, \Delta=-\frac{1}{24}.
\end{gathered}
$$

Οπότε,
$y_x=c_1+c_2 2^x+c_3 3^x+x(x+2)-\frac{3}{2}x2^x-\frac{1}{24}5^x.$
Ασκήσεις Λυμένες: 21-26. Άλυτες: 35-43.

Αρχικές συνθήκες

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$y_{x+2}-5y_{x+1}+6y_x=0$$

όταν $y_0=3$ και $y_1=11$.

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση :

$$y_x = c_1 2^x + c_2 3^x$$

και έπειτα εφαρμόζοντας σ᾽ αυτή τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε τις σταθερές.

$$\begin{aligned} c_1 2^0 + c_2 3^0 &= y_0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 2^1 + c_2 3^1 &= y_1 \Leftrightarrow 2c_1 + 3c_2 = 11 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2 \\ c_2 &= 5 \end{aligned}$$

Άρα

$$y_x = -2 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^x.$$