Κεφάλαιο 2

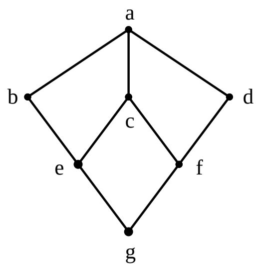
Άλγεβρα Boole

2.1 Δικτυωτά

Έστω $(A, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Αν κάθε δύο στοιχεία του έχουν ένα μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) και ένα μοναδικό μέγιστο κάτω φράγμα (infimum), τα οποία ανήκουν στο A, τότε το σύνολο λέγεται **δικτυωτό**.

Για κάθε δικτυωτό $(A, \leq)$ υπάρχει ένας φυσικός τρόπος να ορίσουμε μια δομή $(A, \vee, \wedge)$, όπου $\vee, \wedge$ είναι δύο εσωτερικές διμελείς πράξεις στο A, τέτοιες ώστε για κάθε $a, \beta \in A$ το $a \vee \beta$ (αντίστοιχα το $a \wedge \beta$) να ισούται με το supremum τους (αντίστοιχα το infimum τους).

Παράδειγμα 1 Το δικτυωτό που απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα, για το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

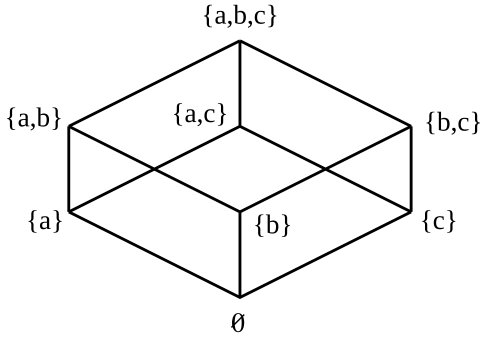


ορίζει τη δομή $(A, \vee, \wedge)$ όπου οι πράξεις $\vee, \wedge$ ορίζονται από τους παρακάτω πίνακες:

$\vee$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b	a	b
c	a	a	c	a	c	c	c
d	a	a	a	d	a	d	d
e	a	b	c	a	e	c	e
f	a	a	c	d	c	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g

$\wedge$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	d	e	f	g
b	b	b	e	g	e	g	g
c	c	e	c	f	e	f	g
d	d	g	f	d	g	f	g
e	e	e	e	g	e	g	g
f	f	g	f	f	g	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g

Παράδειγμα 2 Το δικτυωτό $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, όπου $S = \{a, b, c\}$, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Για την αντίστοιχη δομή $(\mathcal{P}(S), \vee, \wedge)$ οι πράξεις $\vee, \wedge$ είναι οι γνωστές πράξεις $\cup, \cap$ αντίστοιχα που δίνονται από τους παρακάτω πίνακες:

$\cap$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\cup$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$
$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
$\{a\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$

Παρατήρηση Το παραπάνω παράδειγμα προφανώς γενικεύεται για οποιοδήποτε σύνολο S.

Οι πράξεις $\vee, \wedge$ της δομής που αντιστοιχεί σε ένα δικτυωτό, αποδεικνύεται ότι έχουν τις παρακάτω ιδιότητες, για κάθε $a, b, c \in \mathcal{A}$.

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = b \vee a \\ a \wedge b = b \wedge a \end{array}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικές)}$$
$$\left.\begin{array}{l} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \end{array}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικές)}$$
$$\left.\begin{array}{l} a \vee a = a \\ a \wedge a = a \end{array}\right\} \quad \text{(αδύναμες)}$$
$$\left.\begin{array}{l} a \vee (a \wedge b) = a \\ a \wedge (a \vee b) = a \end{array}\right\} \quad \text{(απορροφητικές)}$$

2.2 Δυαδική Άλγεβρα Boole

2.2.1 Ορισμός

Έστω $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ και οι εσωτερικές πράξεις $+, \cdot$ (αντί $\vee$, $\wedge$ αντίστοιχα) που ορίζονται ως εξής:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Αποδεικνύεται ότι η δομή $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ ορίζει ένα δικτυωτό και ότι επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z) \end{array}\right\} \quad \text{(επιμεριστικές)}$$

Ορίζουμε επίσης την εσωτερική μονομελή πράξη ‘‘συμπλήρωμα’’ στο $\mathcal{B}$ η οποία συμβολίζεται με $'$ (ή $^{-}$) και ορίζεται ως εξής:

x	x'
1	0
0	1

Το δικτυωτό αυτό (όπου το $\mathcal{B}$ είναι δισύνολο και επιπλέον ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα και ορίζεται η έννοια του συμπληρώματος) ονομάζεται **δυαδική άλγεβρα Boole**.

Παρατήρηση Ο ορισμός της δυαδικής άλγεβρας Boole επεκτείνεται (γενικεύοντας την έννοια του συμπληρώματος) και στην περίπτωση όπου το $\mathcal{B}$ έχει πάνω από δύο στοιχεία.

2.2.2 Ιδιότητες

Αφού η δυαδική άλγεβρα Boole είναι δικτυωτό, ισχύουν τα παρακάτω

$$\left.\begin{array}{l} x+y=y+x \\ x\cdot y=y\cdot x \end{array}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(y+z)=(x+y)+z \\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \end{array}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+x=x \\ x\cdot x=x \end{array}\right\} \quad \text{(αδυναμία)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(x\cdot y)=x \\ x\cdot(x\vee y)=x \end{array}\right\} \quad \text{(απορροφητικότητα)}$$

και επιπλέον

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \\ x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ιδιότητες:

i. $(x')'=x$

ii. $x+0=x$ και $x+1=1$.

iii. $x\cdot 0=0$ και $x\cdot 1=x$.

iv. $x+x'=1$ και $x\cdot x'=0$.

v. $x+x=x$ και $x\cdot x=x$.

vi. $x+x'\cdot y=x+y$.

vii. $\left.\begin{array}{l} (x+y)'=x'\cdot y' \\ (x\cdot y)'=x'+y' \end{array}\right\}$ (τύποι De Morgan).

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων γίνονται με πίνακες ή χρησιμοποιώντας προηγούμενες ιδιότητες.

Παραδείγματα

1. Απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

x	y	z	$y+z$	$x+(y+z)$	$x+y$	$(x+y)+z$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

2. Απόδειξη των επιμεριστικών ιδιοτήτων

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

x	y	z	$y+z$	$x(y+z)$	xy	xz	$xy+xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$x+y \cdot z = (x+y) \cdot (x+z)$$

x	y	z	yz	$x+yz$	$x+y$	$x+z$	$(x+y)(y+z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

3. Απόδειξη των ιδιοτήτων iv

$$x + x' = 1 \text{ και } x \cdot x' = 0$$

x	x'	$x+x'$	xx'
0	1	1	0
1	0	1	0

4. Απόδειξη της απορροφητικής ιδιότητας

$$x + x \cdot y = x :$$

$x + xy = x1 + xy = x(1+y) = x1 = x.$

5. Απόδειξη της ιδιότητας vi.

$$x' + x \cdot y = x' + y :$$

$x' + xy = (x'+x)(x'+y) = 1(x'+y) = x'+y$

2.2.3 Εξισώσεις

Θέλουμε να βρούμε τις τιμές του x, ή των x, y, ή των x, y, z, ... για τις οποίες επαληθεύονται οι εξισώσεις. (Φυσικά $x, y, z, \ldots \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$.)

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η εξίσωση

$$x'y + xy' = 0.$$

x	y	x'	$x'y$	y'	xy'	$x'y + xy'$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0

Άρα $\begin{cases} x = y = 1 \\ \text{ή} \\ x = y = 0. \end{cases}$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η εξίσωση

$$xz' + x'yz + y'z' = 1.$$

Έστω $F = xz' + x'yz + y'z'$.

x	y	z	z'	xz'	x'	yz	$x'yz$	y'	$y'z'$	$xz' + x'yz$	F
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1

Άρα, $\begin{cases} x = y = 1, z = 0 \\ \text{ή} \\ x = 1, y = z = 0 \\ \text{ή} \\ x = 0, y = z = 1 \\ \text{ή} \\ x = y = z = 0. \end{cases}$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί (και διερευνηθεί) η εξίσωση

$$ax + bx' = 0, \text{ όπου } a, b \in \mathcal{B}.$$

a	b	$ax + bx'$	
1	1	$x + x'$ (=1)	$\rightarrow$ Άρα αδύνατη.
1	0	x	$\rightarrow$ Άρα $x = 0$.
0	1	x'	$\rightarrow$ Άρα $x' = 0$, (δηλαδή $x = 1$).
0	0	0	$\rightarrow$ Άρα ταυτότητα, δηλαδή ισχύει για κάθε x, (δηλαδή ισχύει για $x = 0$ και για $x = 1$).

2.2.4 Συστήματα

Να λυθεί το σύστημα $\left\{ \begin{array}{ll} x' + xy' & = 1 \\ x + xy & = 0 \end{array} \right\}$.

x	y	x'	y'	xy'	xy	$x' + xy'$	$x + xy$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0

Άρα $(x, y) = (0, 1)$ ή $(x, y) = (0, 0)$.

2.2.5 Συναρτήσεις Boole

Κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ λέγεται **συνάρτηση Boole**.

Παράδειγμα 1

$$f : \mathcal{B}^2 \rightarrow B \text{ με } f(x, y) = xy' + x'y.$$

Η f παίρνει τις τιμές:
$f(1,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0,$
$f(1,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1,$
$f(0,1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1,$
$f(0,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0,$
ή (με πίνακα)

x	y	y'	xy'	x'	$x'y$	f
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Παράδειγμα 2

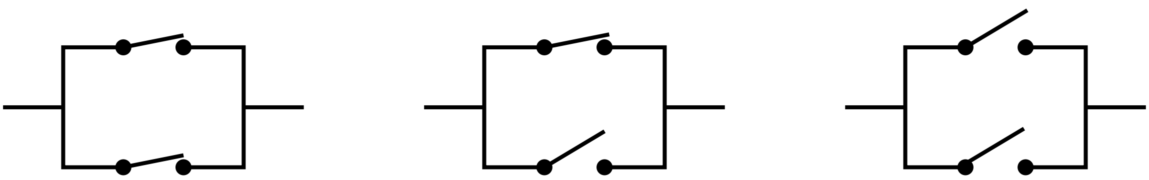
$$f : \mathcal{B}^3 \to B \text{ με } f(x,y,z) = xy + z'.$$

Η f παίρνει τις τιμές:
$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1.$
$f(1,1,0) = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 1.$
$f(1,0,1) = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0.$ κ.λπ.

2.2.6 Εφαρμογές

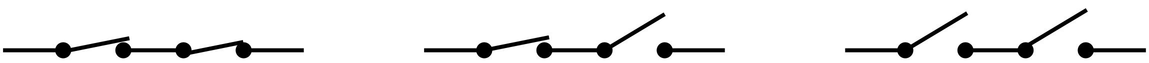
1. Διακόπτες

Διακόπτες 'παράλληλοι' $\longrightarrow +$



$1 + 1 = 1$ $\quad$ $1 + 0 = 1$ $(0 + 1 = 1)$ $\quad$ $0 + 0 = 0$

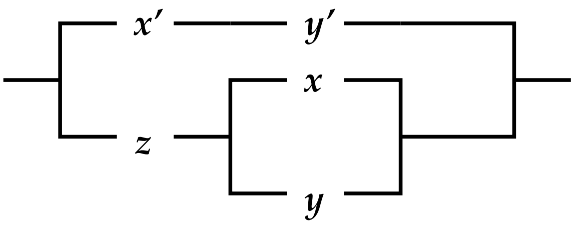
Διακόπτες 'σε σειρά'$\longrightarrow \cdot$



$1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ $1 \cdot 0 = 0$ $(0 \cdot 1 = 0)$ $\quad$ $0 \cdot 0 = 0$

2. Δίπολα

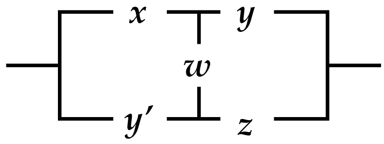
Σε κάθε συνάρτηση Boole αντιστοιχεί ένα δίπολο και αντίστροφα:
Στο δίπολο



αντιστοιχεί η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = x'y' + z(x+y).$$

Στο δίπολο



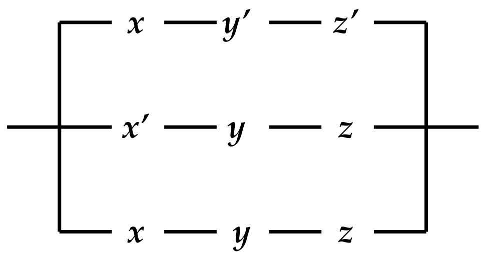
αντιστοιχεί η συνάρτηση

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= xy + xwz + y'wy + y'z \\
&= xy + xwz + y'yw + y'z \\
&= xy + xwz + 0w + y'z \\
&= xy + xwz + y'z.
\end{aligned}
$$

Αντίστροφα:
Στη συνάρτηση

$$f(x,y,z) = xy'z' + x'yz + xyz$$

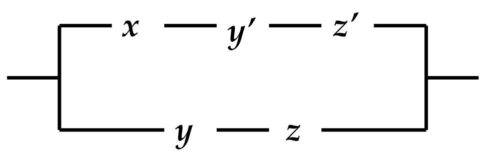
αντιστοιχεί το δίπολο



Αλλά

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= xy'z' + (x'+x)yz \\
&= xy'z' + 1 \cdot yz \\
&= xy'z' + yz,
\end{aligned}
$$

οπότε παίρνουμε το αντίστοιχο (απλούστερο) δίπολο



3. Άλγεβρα λογικών προτάσεων

Α (αληθής πρόταση) αντί 1.
Ψ (ψευδής πρόταση) αντί 0.
$\vee$ (ή) αντί $+$.
$\wedge$ (και) αντί $\cdot$.
$\sim$ (άρνηση) αντί $'$.
Οι τρεις πράξεις της Άλγεβρας Boole, δίνουν τις αντίστοιχες πράξεις της άλγεβρας λογικών προτάσεων.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

p	$\sim p$
Α	Ψ
Ψ	Α

Επίσης ορίζονται και οι πράξεις $\rightarrow$ (αν ... τότε), $\leftrightarrow$ (αν και μόνο αν) με βάση τον παρακάτω πίνακα:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Ο έλεγχος της αλήθειας των λογικών προτάσεων γίνεται με πίνακες αλήθειας.

Παράδειγμα Για την πρόταση

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$$

προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αλήθειας:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Εκφράσεις της Λογικής και της Άλγεβρας Boole οι οποίες δίνουν σε κάθε περίπτωση αντίστοιχα αποτελέσματα (Α αντί 1 και Ψ αντί 0) θεωρούνται αντίστοιχες στη Λογική και την Άλγεβρα Boole.

Παράδειγμα 1 Η συνεπαγωγή $p \to q$ της Λογικής αντιστοιχεί στην έκφραση $x' + y$ της Άλγεβρας Boole, αφού

p	q	$p \to q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

x	y	x'	$x' + y$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Παράδειγμα 2 Η ισοδυναμία $p \leftrightarrow q$ της Λογικής αντιστοιχεί στην έκφραση $xy + x'y'$ της Άλγεβρας Boole αφού

p	q	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

x	y	xy	x'	y'	$x'y'$	$xy + x'y'$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

4. Αρχές Λογικής

Αρχή της διπλής άρνησης

Η $(x')' = x$ αντιστοιχεί στην $\sim (\sim p) \leftrightarrow p$.

Αρχή της του τρίτου αποκλείσεως

Η $x + x' = 1$ δίνει ότι $p \vee \sim p$: Αληθής.

Αρχή της αντίφασης

Η $xx' = 0$ δίνει ότι $p \wedge \sim p$: Ψευδής.

Ασκήσεις

1) Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ ορίζεται η μερική διάταξη $/$ (διαιρετότητα), με x/y αν και μόνο αν ο x διαιρεί τον y. Αν E είναι το σύνολο των διαιρετών του 36, να δειχθεί ότι το $(E, /)$ είναι ένα δικτυωτό, για το οποίο να δοθεί και το αντίστοιχο σχήμα.

2) Στο σύνολο $\mathbb{N}^2$ ορίζεται η μερική διάταξη $\leq$ (διάταξη γινόμενο), με $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ αν και μόνο αν $x_1 \leq x_2$ και $y_1 \leq y_2$.
Αν $E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$, να δειχθεί ότι το $(E, \leq)$ είναι ένα δικτυωτό, για οποίο να δοθεί και το αντίστοιχο σχήμα.

3) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες v, vi και vii (De Morgan) της Άλγεβρας Boole.

4) Με χρήση των ιδιοτήτων, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

   i) $xy' + yz + z'w + x'y'z$.

   ii) $x(x' + y)(z' + w)z$.

5) Να λυθούν οι εξισώσεις της Άλγεβρας Boole:

   i) $x' + xy' = 1$.

   ii) $xy' + x'y + yz' = 0$.

   iii) $xyz' + x'yz + xyz = 1$.

6) Να λυθούν τα συστήματα της Άλγεβρας Boole:

   i) $\left\{ \begin{array}{l} x' + xy' = 1 \\ x + xy = 0. \end{array} \right.$

   ii) $\left\{ \begin{array}{l} y + x'y + z = 1 \\ y' + xz + y'z = 0. \end{array} \right.$

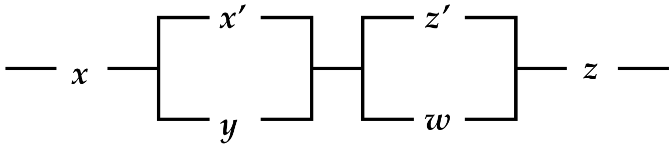
   iii) $\left\{ \begin{array}{l} x' + xy' + y' = 0 \\ y + x'y + x = 1. \end{array} \right.$

7) Να βρεθούν τα δίπολα που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις:

   i) $f(x, y, z) = (x + y)z + x'y'z'$.

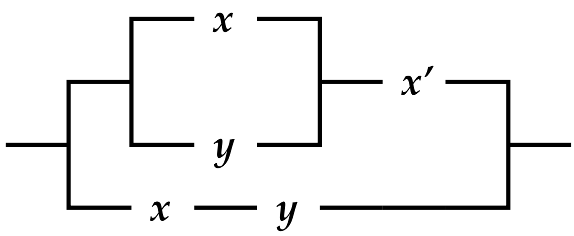
   ii) $f(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z'$.

8) i) Να βρεθεί η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο δίπολο



ii) Να απλοποιηθεί το παραπάνω δίπολο.

9) Να απλοποιηθει το παρακάτω δίπολο.



10) Να γραφεί ο πίνακας αλήθειας για τις παρακάτω λογικές προτάσεις:

i) $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee q)$.

ii) $p \rightarrow (q \wedge r)$.