Κεφάλαιο 1

Διατάξεις, Συνδυασμοί

1.1 Πολλαπλασιαστική αρχή ή Κανόνας γινομένου

Αν ένα αντικείμενο A μπορεί να επιλεγεί κατά m τρόπους και ένα αντικείμενο B κατά n τρόπους τότε και τα δύο μαζί μπορούν να επιλεγούν κατά $m \cdot n$ τρόπους.

Παράδειγμα Αν από την πόλη A στην πόλη B υπάρχουν 3 διαφορετικοί δρόμοι, από την B στη Γ 2 δρόμοι και από τη Γ στη Δ 4 δρόμοι, πόσες διαδρομές υπάρχουν από την πόλη A στη Δ μέσω των πόλεων B και Γ;

Απάντηση : Υπάρχουν $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ διαδρομές.

1.2 Διατάξεις

Έστω E είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία, δηλαδή $|E| = n$ $(\mathcal{N}(E) = n)$.

Κάθε διατεταγμένη m-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ με $a_i \in E$, $\forall i \in [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ ονομάζεται **διάταξη** των n στοιχείων ανά m.

Αν τα στοιχεία μιας διάταξης είναι διαφορετικά (δηλαδή $a_i \neq a_j$ για κάθε $i, j \in [m]$ με $i \neq j$) τότε αυτή ονομάζεται **απλή διάταξη** (ή **διάταξη**) ενώ αν τα στοιχεία της δεν είναι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικά τότε αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διάταξη** ή **διάταξη με επανάληψη**.

Αν $n = m$, τότε η διάταξη n ανα n ονομάζεται **μετάθεση** n στοιχείων.

Μια επαναληπτική μετάθεση στην οποία εμφανίζονται k διαφορετικά στοιχεία ονομάζεται **μετάθεση k ειδών στοιχείων**.

Παραδείγματα

1. Αν $n = 4$ και $m = 2$, γράφουμε $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Τότε οι διατάξεις των 4 ανά 2 είναι :

$$(\alpha,\beta),\quad (\alpha,\gamma),\quad (\alpha,\delta),\quad (\beta,\gamma),\quad (\beta,\delta),\quad (\gamma,\delta),$$
$$(\beta,\alpha),\quad (\gamma,\alpha),\quad (\delta,\alpha),\quad (\gamma,\beta),\quad (\delta,\beta),\quad (\delta,\gamma).$$

ενώ οι διατάξεις με επανάληψη των 4 ανα 2 είναι οι *προηγούμενες* και *επιπλέον* οι:

$$(\alpha,\alpha),\quad (\beta,\beta),\quad (\gamma,\gamma),\quad (\delta,\delta)$$

2. Οι μεταθέσεις των 3 στοιχείων είναι :

$$(\alpha,\beta,\gamma),\quad (\alpha,\gamma,\beta),\quad (\beta,\alpha,\gamma),\quad (\beta,\gamma,\alpha),\quad (\gamma,\alpha,\beta),\quad (\gamma,\beta,\alpha).$$

3. Οι μεταθέσεις 3 ειδών όπου το α εμφανίζεται 2 φορές και τα β,γ από μία φορά είναι:

$$\begin{array}{llll}(\alpha,\alpha,\beta,\gamma), & (\alpha,\alpha,\gamma,\beta), & (\alpha,\beta,\alpha,\gamma), & (\alpha,\beta,\gamma,\alpha),\\ (\alpha,\gamma,\alpha,\beta), & (\alpha,\gamma,\beta,\alpha) & (\beta,\alpha,\alpha,\gamma), & (\beta,\alpha,\gamma,\alpha)\\ (\beta,\gamma,\alpha,\alpha), & (\gamma,\alpha,\alpha,\beta), & (\gamma,\alpha,\beta,\alpha), & (\gamma,\beta,\alpha,\alpha)\end{array}$$

1.2.1 Αριθμός απλών διατάξεων $P(n,m)$ ή (A_n^m)

Ο αριθμός των απλών διατάξεων n στοιχείων ανα m δίνεται από τον τύπο:

$$P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

Αριθμός μεταθέσεων

Ο αριθμός των μεταθέσεων n στοιχείο δίνεται από τον τύπο :

$$P_n=n!.$$

Αριθμός επαναληπτικών διατάξεων

Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων n στοιχείων ανα m δίνεται από τον τύπο:

$$U(n,m)=n^m.$$

1.3 Συνδυασμοί

Έστω ένα σύνολο E με $|E|=n$.

Κάθε οικογένεια που αποτελείται από m στοιχεία του E ονομάζεται **συνδυασμός** των n στοιχείων ανά m.

Αν τα στοιχεία ενός συνδυασμού είναι διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **απλός συνδυασμός** (ή **συνδυασμός**) ενώ αν τα στοιχεία του δεν είναι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **επαναληπτικός συνδυασμός** ή **συνδυασμός με επανάληψη**.

Ουσιαστικά κάθε απλός συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά m είναι ένα υποσύνολο του E με m στοιχεία.

Η διαφορά συνδυασμών και διατάξεων είναι ότι στους συνδυασμούς δεν παίζει ρόλο η σειρά των στοιχείων.

Παράδειγμα

Αν $n = 4$ και $m = 2$, έστω $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Τότε οι συνδυασμοί των 4 ανά 2 είναι :

$$\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\}$$

ενώ οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των 4 ανά 2 είναι :

$$\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma, \delta\delta, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta.$$

1.3.1 Αριθμός συνδυασμών $\binom{n}{m}$, ή $C(n, m)$, ή C_n^m

Ο αριθμός των συνδυασμών των n ανά m δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Παρατήρηση

Προφανώς ισχύει ότι

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

1.3.2 Αναγωγικές εξισώσεις συνδυασμών

Τρίγωνο του Pascal

Ισχύει η σχέση:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

όπου $m \leq n$, με $\binom{n}{0} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\binom{n}{m} = 0$ αν $m > n$.

1.3.3 Αριθμός επαναληπτικών συνδυασμών $\left[{n \atop m}\right]$, ή $E(n,m)$

Ο αριθμός των επαναληπτικών συνδυασμών των n ανά m

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}.$$

1.3.4 Αριθμός μεταθέσεων k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα $M(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Ο αριθμός των μεταθέσεων k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα δίνεται από τον τύπο:

$$M(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

όπου $n = n_1 + n_2 \cdots + n_k$.

Λυμένες Ασκήσεις

1. Από μια κληρωτίδα που περιέχει 100 λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το 100 κληρώνονται διαδοχικά 5 λαχνοί, χωρίς μετα από κάθε κλήρωση να επανατοποθετούνται στη κληρωτίδα. Ο πρώτος λαχνός που κληρώνεται κερδίζει 10.000 ευρώ, ο δεύτερος 5.000 ευρώ, ο τρίτος 3.000 ευρώ, ο τέταρτος 2.000 ευρώ και ο πέμπτος 1.000 ευρώ. Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης.

   Λύση Για τον υπολογισμό των δυνατών αποτελεσμάτων παρατηρούμε ότι η σειρά με την οποία εξάγονται οι αριθμοί είναι σημαντική λόγω του διαφορετικού ποσού που κερδίζεται σε κάθε κλήρωση. Έτσι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με τον αριθμό των διατάξεων των 100 ανά 5 δηλαδή

$$\begin{aligned} P(100,5) &= \frac{100!}{(100-5)!} \\ &= 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \\ &= 9034502400 \end{aligned}$$

2. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 6×6 σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.

   Λύση

   Το πρώτο πιόνι τοποθετείται στην πρώτη γραμμή με 6 διαφορετικούς τρόπους. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρείται το τετράγωνο της δεύτερης γραμμής στην στήλη του οποίου έχουμε βάλει στην πρώτη γραμμή το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 4 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρούνται τα τετράγωνα της τρίτης γραμμής στις στήλες των οποίων έχουμε ήδη βάλει τα δυο προηγούμενα πιόνια). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο (βλέπε προηγούμενο σχήμα) για το τέταρτο πιόνι υπάρχουν 3 τρόποι, για το πέμπτο 2 τρόποι και για το έκτο ένας μόνο τρόπος τοποθέτησής του.

   Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή για να τοποθετήσουμε και τα 6 πιόνια στην σκακιέρα θα υπάρχουν

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720 \text{ τρόποι.}$$

3. Πόσους τετραψήφιους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5,6,7

(i) όταν όλα τα ψηφία τους είναι διαφορετικά.

(ii) όταν τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.

(iii) όταν πρέπει να είναι περιττοί και τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.

(iv) όταν το άθροισμα του δεύτερου και τέταρτου ψηφίου τους είναι ίσο με 9 και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά.

Λύση Επειδή στην κατασκευή των αριθμών αυτών παίζει ρόλο η σειρά των ψηφίων τους, πρόκειται για διατάξεις στο (i) και για επαναληπτικές διατάξεις στο (ii) των 7 ανά 4. Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε:

(i) $P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 840$ φυσικούς αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.

(ii) $U(7,4) = 7^4 = 2401$ φυσικούς αριθμούς με ψηφία που μπορεί να επαναλαμβάνονται.

(iii) Επειδή θέλουμε οι αριθμοί που κατασκευάζουμε να είναι περιττοί θα υπάρχουν 4 διαφορετικές επιλογές για το τελευταίο ψηφίο τους (1 ή 3 ή 5 ή 7). Για τα υπόλοιπα 3 φηφία τους υπάρχουν 7 επιλογές (διότι τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται). Έτσι εδώ μπορούμε να κατασκευάσουμε $4 \cdot 7^3 = 1372$ τέτοιους αριθμούς.

(iv) Έστω $xyzw$ ένας τέτοιος αριθμός. Πρέπει να ισχύει $y + w = 9$ οπότε υπάρχουν 6 επιλογές για το ζευγάρι (y, w):

$$(2,7), (7,2), (3,6), (6,3), (4,5) \text{ και } (5,4)$$

Αφού έχουμε διαλέξει το ζευγάρι (y, w) το ζευγάρι (x, y) θα επιλέγεται μεταξύ των διατάξεων του συνόλου $[7] \setminus \{y, w\}$, δηλαδή θα επιλέγεται με $P(5, 2)$ τρόπους.

Άρα σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, μπορούμε να κατασκευάσουμε $6 \cdot P(5,2) = 6\frac{5!}{(5-2)!} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ διαφορετικούς αριθμούς.