Μαθηματικά στις 3 διαστάσεις

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Μαρία Μαύρη

m.mavri@ba.aegean.gr

Περιεχόμενα

- Αόριστο Ολοκλήρωμα
- Ολοκληρώματα Στοιχειωδών Συναρτήσεων
- Ορισμένο Ολοκλήρωμα
- Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος

Έστω $f: \Delta \to \Re$, Δ διάστημα. Αν $F : \Delta \to \Re$ είναι μια συνάρτηση, τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$,
$\forall\ x \in \Delta$, τότε η F λέγεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ και συμβολίζεται:

$$F(x) = \int f(x)dx,\ x \in \Delta$$

Αν η G είναι μια άλλη αρχική της f , τότε $G'(x)=f(x)$.

Άρα $(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$

Κατά συνέπεια υπάρχει c σταθερή τέτοια ώστε:

$F(x)=G(x)+c$

Συνεπώς η $\int f(x)dx$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα

Παραγώγιση και Ολοκλήρωση είναι αντίστροφοι τελεστές

Παραγωγιση αντιστροφο ολοκληρωσης

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Ολοκληρωση αντιστροφο παραγωγισης

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

Ολοκληρώματα Στοιχειωδών Συναρτήσεων

$$\int x^{\nu} dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c, \nu \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c, x > 0 \ \eta \ x < 0$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1, x > 0$$

$$\int \alpha^{x} dx = \frac{\alpha^{x}}{\log\alpha} + c, \alpha \in (0, +\infty) - \{1\}, x \in \Re$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, x \in \Re$$

$$\int \cos dx = \sin x + c, x \in \Re$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, x \in (k\pi, k\pi + \pi)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c, x \in (-1, 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x, x \in \Re$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c, x \in \Re$$

$$\int \cosh dx = \sinh x + c, x \in \Re$$

Ολοκληρώματα -παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

$$\int\left[\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{(x-\alpha)^{k}}\right]dx=\log|x-\alpha|-\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}}+c$$

Παράδειγμα 2:

$$\int tg^{2}x\,dx=\int\frac{1-\cos^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx-\int\frac{\cos^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx-\int 1dx=tgx-x+c$$

Παράδειγμα 3:

$$\int\frac{1+2x^{2}}{x^{2}(1+x^{2})}dx=\int\frac{1+x^{2}}{x^{2}(1+x^{2})}dx+\int\frac{x^{2}}{x^{2}(1+x^{2})}dx=$$

$$\int\frac{1}{x^{2}}dx+\int\frac{1}{(1+x^{2})}dx=$$

$$-\frac{1}{x}+\mathrm{arctg}x+c$$

Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Ορισμός: Έστω f: [α,β]→ℜ, μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση. Διαιρούμε το [α,β] σε ν ίσα τμήματα. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f από το α μέχρι το β ορίζεται να είναι

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{n} f\left(\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}$$

Παρατήρηση: Θεωρούμε ότι $f(x)\geq 0$, $\forall\ x \in [\alpha,\beta]$. Για τυχαία συνεχή συνάρτηση f το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα Οχ δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$$

Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Ορισμός: Έστω f: [α,β]→ℜ, μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση. Αν το

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{n} f\left(\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}$$

όριο υπάρχει, τότε το συμβολίζουμε με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και το ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f.

Ισχύει $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

Ιδιότητες ολοκληρώματος

Θεώρημα:(Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού) Έστω f: [α,β]→ℜ, μια συνεχής συνάρτηση. Τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

όπου F τυχούσα συνάρτηση τέτοια ώστε : F′(x)= f(x)≥, ∀ x ∈ [α,β].

Θεώρημα: Έστω f,g : [α,β]→ℜ, δύο συνεχής ε συναρτήσεις. Τότε

1.$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\lambda f(x)+\mu g(x)\right]dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

2.$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

3.$\text{Αν } f(x) \geq 0, \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

4.$\text{Αν} f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

5.$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

6.$\text{Αν } m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

7.$\exists \xi \in [\alpha,\beta] : \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta - \alpha) f(\xi)$

Ολοκληρώματα Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Παράδειγμα 4:

$$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{1/2} -(2x-1)dx + \int_{1/2}^2 2x-1dx = x^2+x\Big|_0^{1/2} + x^2 - x\Big|_{1/2}^2 = \frac{5}{2}$$

Παράδειγμα 5:

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\frac{\pi}{6} \le \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx \le \frac{\pi}{3}$

Η $f(x)=\sin x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} \le \sin x \le \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}dx \le \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx \le \int_{\pi/6}^{\pi/2} 1dx \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \le \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx \le \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ορισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος

Θεώρημα Έστω f: [α,β]→$\Re$, μια συνεχής συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε c με α<c<β, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα c≤ x ≤β. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f με F'(x)=f(x).

Από το ΘΘΑΛ $\int_c^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(c)$

Ορισμός: Αν το όριο $\lim_{x\to c} F(c)$ υπάρχει τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει και ορίζουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{c\to a}\int_c^\beta f(x)dx = F(\beta) - \lim_{c\to a} F(c)$$

Παρόμοια ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της $f:[\alpha,\beta)\to\Re$ ως το

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{c\to \beta}\int_\alpha^c f(x)dx = \lim_{c\to a} F(c) - F(\alpha)$$

Παράδειγμα 6

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0}\left[\log 1 - \log c\right] = \lim_{c\to 0}\left[-\log c\right] = +\infty$$

Περιεχόμενα

- **Μέθοδοι Ολοκλήρωσης**
  - **Μέθοδος αντικατάστασης**
  - **Παραγοντική Ολοκλήρωση**
  - **Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων**
  - **Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις**
  - **Ειδικές Περιπτώσεις**
  - **Αναγωγικοί Τύποι**

Ι. Μέθοδος αντικατάστασης

Για να υπολογίσουμε το $\int f(x)dx$ κάνουμε την αντικατάσταση

$x=\varphi(t)$

$dx=\varphi'(t)dt$

Παράδειγμα 1:

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx$$

Θέτω $\sqrt{x^2+1}=u$

$2xdx=2udu$

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+c$$

Παράδειγμα 2:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

Θέτω $e^x+1=u$

$e^xdx=du$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int \frac{1}{u}du=\log u \;=\log\left(e^x+1\right)+c$$

Αν θεωρήσουμε το $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ με $f(x) \neq 0 \forall x \in D$, τότε

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$$

στα διαστήματα που ισχύει $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

Παράδειγμα 3:

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx = -\log|\cos x| + c$$

$$x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

ΙΙ. Παραγοντική Ολοκλήρωση

Αν f και g είναι συναρτήσεις παραγωγ΄ισιμες

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

$$f(x)\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) - g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Παιρνοντας τα ολοκληρωματα

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα 4:

$$\int e^x x dx = xe^x - \int \left(x\right)' e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Παράδειγμα 5:

$$\int e^x x^2 dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int e^x x dx =$$

$$x^2 e^x - 2\int e^x x dx = x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Παράδειγμα 6:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c$$

Παράδειγμα 7:

$$\int e^{-3x} x dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \int \frac{1}{3}e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} + c$$

Παράδειγμα 8:

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}\cos 3x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 3x 3dx =$$

$$\frac{1}{2}\cos 3x e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx \Leftrightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos 3x dx + \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}\cos 3x e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x \Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}\cos 3x e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x \Leftrightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{2}{13}\cos 3x e^{2x} - \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x$$

III. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

P(x)=R(x) / Q(x)

- Αν deg R(x) ≥ degQ(x) τότε $P(x)=P_1(x)Q(x)+P_2(x)$

  (διαίρεση πολυωνύμων/Σχήμα Horner)

- Αν deg R(x)<degQ(x) για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της πρέπει να κάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα

Παράδειγμα 9:

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$$

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(2x+5)} \Leftrightarrow 6-x = 2xA+5A+xB-3B \Leftrightarrow$$

$$6-x = (2A+B)x+5A-3B \Leftrightarrow 2A+B=6,\ 5A-3B=-1$$

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx = \int \frac{3}{11}\frac{1}{(x-3)}dx - \int \frac{17}{11}\frac{1}{(2x+5)}dx =$$

$$\frac{3}{11}\ln|x-3| - \frac{17}{11}\frac{\ln|2x+5|}{2} + c$$

Παράδειγμα 10:

$$\int \frac{2x-3}{\left(x^2-2x+5\right)}dx = \int \frac{2x-3}{\left(x-2\right)^2+1}dx$$

$$\int \frac{2x-3}{\left(x^2-2x+5\right)}dx = \overbrace{\int \frac{2x}{\left(x^2-2x+5\right)}dx}^{\text{Α ολοκλήρωμα}} - 3\overbrace{\int \frac{1}{\left(x^2-2x+5\right)}dx}^{\text{Β ολοκλήρωμα}}$$

Υπολογίζω τα ολοκληρώματα Α και Β χωριστά

$$A = \int \frac{2x}{\left(x^2-2x+5\right)}dx = \int \frac{\left(x^2-2x\right)'}{\left(x^2-2x+5\right)}dx = \ln\left|x^2-2x+5\right|$$

$$B = \int \frac{1}{\left(x^2-2x+5\right)}dx$$

θετω $x-2=y$

$$\int \frac{1}{\left(x^2-2x+5\right)}dx = \int \frac{1}{\left(x-2\right)^2+1}dx = \int \frac{1}{\left(y\right)^2+1}dy = \text{arctg}y + c = \text{arctg}(x-2)$$

ΟΠΟΤΕ

$$\int \frac{2x-3}{\left(x^2-2x+5\right)}dx = \ln\left|x^2-2x+5\right| - 3\text{arctg}(x-2) + c$$

IV.Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

1. Αρχικά πρέπει να γίνει έλεγχος για την συνάρτηση που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα αν είναι άρτια ή περιττή στο cosx ή sinx

2. Η αντικατάσταση που γίνετια είναι η ακόλουθή

   R(-sinx, cosx)=-R(sinx, cosx) περιττή στο sinx, cosx=t

   R(sinx, -cosx)=-R(sinx, cosx) περιττή στο cosx, sinx=t

   R(-sinx,-cosx)=R(sinx, cosx) άρτια sin & cosx στο tgx=t

Παράδειγμα 18 *(Το παράδειγμα έχει λυθεί αναλυτικά στην τάξη):*

$$\int \frac{dx}{\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)}, \text{περιττη} \ \sin, \cos x = t$$

$$\int \frac{-\sin x dx}{\sin x^2\left(2\cos^2 x-1\right)} \overset{\text{αντικατάσταση}}{=} \int \frac{-dt}{\left(1-t^2\right)\left(2t^2-1\right)} \overset{\text{ανάλυση ρητών συναρτήσεων}}{=}$$

$$2\int \frac{dt}{\left(1-2t^2\right)} - \int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \overset{\text{αντικατάσταση του t}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + c$$

Παραγοντική Ολοκλήρωση με τη χρήση των Τριγωνομετρικών Εξισώσεων

2sinasinb=cos(a-b) - cos(a+b)
2sinacosb=sin(a+b) + sin(a-b)
2cosacosb=cos(a+b) + cos(a-b)

Παράδειγμα 19:

$$\int e^x \sin2x\cos x dx = \frac{1}{2}\int e^x \sin3x dx + \frac{1}{2}\int e^x \sin x dx =$$

$$\sin2x\cos x = \frac{1}{2}(\sin3x + \sin x)$$

$$\int e^x \sin3x dx = e^x \sin3x - \int e^x \cos3x 3dx = e^x \sin3x - 3e^x \cos3x - 3\int e^x \sin3x dx \Leftrightarrow$$

$$4\int e^x \sin3x dx = e^x \sin3x - 3e^x \cos3x \Leftrightarrow \int e^x \sin3x dx = \frac{1}{4}e^x \sin3x - \frac{3}{4}e^x \cos3x$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow$$

$$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

V.Ειδικές Περιπτώσεις

Περίπτωση 1:

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει παράσταση της μορφής

$$\sqrt{\alpha^2 - x^2} \text{ τοτε θετουμε } x = \alpha\sin\theta \text{ η } x = \alpha\cos\theta$$

$$1.\ x = \alpha\sin\theta,\ dx = \alpha\cos\theta d\theta,\ \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha\cos\theta$$

$$2. x = \alpha\cos\theta,\ dx = -\alpha\sin\theta d\theta,\ \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha\sin\theta$$

Περίπτωση 2:

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει παράσταση της μορφής

$$\sqrt{\alpha^2 + x^2} \text{ τοτε θετουμε } x = \alpha tg\theta \text{ η } x = \alpha ctg\theta$$

$$x = \alpha tg\theta,\ dx = \frac{\alpha}{\cos^2\theta} d\theta,\ \sqrt{\alpha^2 + x^2} = \frac{\alpha}{\cos\theta}$$

Περίπτωση 3:

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει παράσταση της μορφής

$$\sqrt{x^2 - \alpha^2} \text{ τοτε θετουμε } x = \frac{\alpha}{\cos\theta}$$

$$x = \frac{\alpha}{\cos\theta},\ dx = \alpha\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta, \sqrt{x^2 - \alpha^2} = \alpha\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \alpha tg\theta$$

Οι παραπάνω περιπτώσεις είναι απαραίτητες για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\, dx$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - k^2})\, dx$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + k^2})\, dx$$

$$\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2})\, dx$$

Περίπτωση 4:

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει ριζικό της μορφής

$$\sqrt{\alpha x+\beta} \text{ τοτε θετουμε } t=\sqrt{\alpha x+\beta}$$

Παράδειγμα 20:

$\int\sqrt{1-x^2}dx, -1<x<1.$

Θετω $x=\sin y, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Το πεδιο τιμων ειναι $-1<x<1$ και η παραγωγος ειναι $\cos x>0\ \forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Αρα η $\sin y$ ειναι αύξουσα και $y=\arcsin x, -1<x<1$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 y}\,\cos y dy=\int\cos y\cos y dy=\frac{1}{2}\sin y\cos y+\frac{1}{2}y=$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+c, -1<x<1$$

Παράδειγμα 21:

$$\int \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx, -\alpha < x < \alpha.$$

$$\Theta\varepsilon\tau\omega \; x = \alpha\sin\theta, dx = \alpha\cos\theta d\theta$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx = \int \frac{\alpha\sin\theta}{\alpha\cos\theta} a\cos\theta d\theta = \alpha\int \sin\theta d\theta = -\alpha\cos\theta = -\alpha\sqrt{1 - \sin^2\theta} =$$

$$-\sqrt{\alpha^2 - x^2} + c$$

Παράδειγμα 22:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} dx,$$

$$\Theta\varepsilon\tau\omega \; x = 2tg\theta t \, dx = \frac{\alpha}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} dx = \int \frac{2tg\theta}{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{2}{\cos^2\theta} d\theta = 2\int \frac{tg\theta}{\cos\theta} d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \sqrt{4 + x^2} + c$$

VI. Αναγωγικοί τύποι

Παράδειγμα 23: Να υπολογίσετε τον αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int \cos^n x dx, n \in N$$

$$u = \cos^{n-1} x, du = (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)dx$$

$$I_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} \cos x dx = \cos^{n-1} x\sin x - \int \sin x(n-1)(\cos^{n-2} x)(-\sin x)dx$$

$$\cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int (\cos^{n-2} x)\sin^2 x dx = \cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int (\cos^{n-2} x)(1-\cos^2 x)dx$$

$$\cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int (\cos^{n-2} x)dx - (n-1)\int \cos^n x dx$$

Αρα $I_n = \int \cos^n x dx = \dfrac{\cos^{n-1} x\sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int (\cos^{n-2} x)dx$