ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ – MBA"

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Επιλεγμένες Ασκήσεις με ενδεικτική λύση στις Ειδικές Κατανομές

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έρευνα σχετικά με τα αίτια των τροχαίων ατυχημάτων αποκάλυψε ότι:

- 60% του συνόλου των ατυχημάτων γίνονται τη νύκτα.
- Από τα νυκτερινά ατυχήματα 65% οφείλονται στο αλκοόλ ενώ από τα ατυχήματα που γίνονται κατά τη διάρκεια της ημέρας μόνο το 35% οφείλεται στο αλκοόλ.

Να υπολογισθούν:

i. Το ποσοστό του συνόλου των ατυχημάτων που οφείλονται στο αλκοόλ.
ii. Από τα ατυχήματα που οφείλονται στο αλκοόλ το ποσοστό εκείνων που γίνονται νύκτα.

ΛΥΣΗ

Ενδεχόμενα και αντίστοιχες πιθανότητες:

N : το ενδεχόμενο ατυχήματος κατά τη διάρκεια της νύχτας.
N΄: το ενδεχόμενο ατυχήματος κατά τη διάρκεια της ημέρας.
A : το ενδεχόμενο ατυχήματος που οφείλεται στο αλκοόλ.

Δίνεται ότι : $P(A/N)=0.65$, $P(A/N')=0.35$, $P(N)=0.6$, $P(N')=0.4$

i. Ζητάμε $P(A)$:

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(A)=P(N)*P(A/N)+P(N')*P(A/N')=0.6*0.65+0.4*0.35=0.39+0.14=0.53$$

Άρα το ποσοστό των ατυχημάτων που οφείλονται στο αλκοόλ είναι 53%.

ii. Ζητάμε $P(N/A)$:

Από το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(N/A)=\frac{P(A\cap N)}{P(A)} \quad \text{(I)}$$

Πρέπει να υπολογίσω το $P(A\cap N)$:

$$P(A/N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}\Rightarrow P(A\cap N)=P(A/N)*P(N)=0.65*0.6\Rightarrow P(A\cap N)=0.39$$

Από (Ι) $\rightarrow\ P(N/A)=\frac{0.39}{0.53}\Rightarrow P(N/A)=0.7358\cong 0.74$

Άρα από τα ατυχήματα που οφείλονται στο αλκοόλ το ποσοστό εκείνων που γίνονται τη νύχτα είναι 74%.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε έρευνα που έγινε από τη Διεύθυνση Μελετών της Τράπεζας Τ, διαπιστώθηκε ότι το ύψος των λογαριασμών όψεως που τηρούνται σ΄ αυτή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 500 χ. μ. και τυπική απόκλιση 150 χ. μ.

i. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος λογαριασμός έχει ύψος μεταξύ 310 και 770 χ. μ.
ii. Η Τράπεζα στο πλαίσιο της πολιτικής προσέλκυσης νέων πελατών, προγραμματίζει να προσφέρει υψηλότερο επιτόκιο σε πελάτες που το μέσο ύψος του λογαριασμού τους υπερβαίνει κάποιο ποσό Π. Αν το μέτρο αυτό δεν πρέπει να επεκταθεί σε περισσότερους από το 1% των πελατών της να υπολογισθεί ποιο θα πρέπει να είναι το ποσό Π.

ΛΥΣΗ

Έστω Χ το ύψος ενός τυχαίου λογαριασμού Χ ~ Ν (μ=500, σ=150). Γνωρίζουμε ότι το Χ ακολουθεί κανονική κατανομή.

i. Ζητάμε:

$$\mathrm{P}(317 < X < 770) = \mathrm{P}\left(\frac{317-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{770-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{317-500}{150} < \mathrm{Z} < \frac{770-500}{150}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{-183}{150} < \mathrm{Z} < \frac{270}{150}\right) =$$

$$\mathrm{P}(-1.22 < \mathrm{Z} < 1.80) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.8) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < -1.22)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.8) - (1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.22)) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.8) + \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.22) - 1 =$$

$$= 0.9641 + 0.8888 - 1 = 1.8529 - 1 = 0.8529$$

$$\mathrm{P}(317 < X < 770) = 0.8529 \cong 0.85$$

ii. Έστω Π το ζητούμενο ποσό. Θέλουμε P(X>Π) = 0.01

$$\mathrm{P}(X > \Pi) = 0.01 \rightarrow \quad \mathrm{P}(X < \Pi) = 0.99$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\Pi-\mu}{\sigma}\right) = 0.99 \rightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{\Pi-\mu}{\sigma}\right) = 0.99$$

$$\frac{\Pi-\mu}{\sigma}=2.33 \Rightarrow \Pi-\mu=2.33*\sigma \Rightarrow \Pi=\mu+2.33*\sigma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Pi=500+2,33*150 \Rightarrow \Pi=500+349,5 \Rightarrow \Pi=849,5 \cong 850$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μία στρατιωτική μονάδα θα δεχθεί την 1/7/96, 20.000 νεοσύλλεκτους για κατάταξη και πρέπει να προετοιμάσει τις στολές τους. Σύμφωνα με τα υπάρχοντα ιστορικά στοιχεία, για να καλυφθούν οι ενδυματολογικές ανάγκες όλων των νεοσύλλεκτων οι στολές τους θα πρέπει να χωρισθούν στις παρακάτω τέσσερις κατηγορίες:

Α) Στολές για άνδρες ύψους μικρότερου των 165 εκ.
Β) Στολές για άνδρες ύψους μεταξύ 165 εκ. και 172 εκ.
Γ) Στολές για άνδρες ύψους μεταξύ 172 εκ. και 180 εκ.
Δ) Στολές για άνδρες ύψους μεγαλυτέρου των 180 εκ.

Αν από ιστορικά στοιχεία, γνωρίζουμε επίσης, ότι το ύψος των νεοσύλλεκτων ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 168 εκ. και τυπική απόκλιση 5 εκ., να προσδιοριστεί ο αριθμός των στολών που θα χρειασθούν για τις κατηγορίες Β και Δ.

ΛΥΣΗ

Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το ύψος των νεοσύλλεκτων. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος Χ~Ν (μ=168cm, σ=5cm)

i.

$$P(165 \le X \le 172) = P\left(\frac{165-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{172-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{165-168}{5} \le \mathrm{Z} \le \frac{172-168}{5}\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(-\frac{3}{5} \le \mathrm{Z} \le \frac{4}{5}\right) = \mathrm{P}(-0,6 \le \mathrm{Z} \le 0,8) =$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 0,8) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le -0,6) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 0,8) - \left[1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \le 0,6\right)\right] =$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 0,8) + \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 0,6) - 1 = 0,7881 + 0,7257 - 1 =$$
$$= 1,5138 - 1 \rightarrow \mathrm{P}(165 \le X \le 172) = 0,5138$$

Άρα θα χρειαστούν 20.000*0,5138=10.276 στολές για την κατηγορία β, δηλαδή για νεοσύλλεκτους ύψους μεταξύ 165 και 172 εκατοστών.

ii.

$$P(X > 180) = 1 - P(X \leq 180) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{180-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{180-168}{5}\right) = 1 - P(Z \leq 2,4) =$$

$$= 1 - 0,9918 = 0,0082 \rightarrow P(X > 180) = 0,0082$$

Άρα θα χρειαστούν 20.000*0,0082=164 στολές για την κατηγορία δ, δηλαδή για νεοσύλλεκτους ύψους μεγαλύτερου των 180 εκατοστών

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έρευνες έδειξαν ότι το 40% των επισκεπτών μουσείων αγοράζουν και κάποιο αναμνηστικό αντικείμενο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι σε 12 τυχαία επιλεγμένους επισκέπτες ενός μουσείου:

i. το πολύ 2 αγόρασαν κάποιο αναμνηστικό.
ii. τουλάχιστον 3 αγόρασαν κάποιο αναμνηστικό.

ΛΥΣΗ

Έστω Χ ο αριθμός των επισκεπτών που αγοράζουν κάποιο αναμνηστικό.
Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης Χ ~ Διωνυμική Κατανομή με p = 0.40.

i.
$$P(x \leq 2 / n = 12, p = 0.40) =$$
$$= P(x = 0 / n = 12, p = 0.40) + P(x = 1 / n = 12, p = 0.40) + P(x = 2 / n = 12, p = 0.40) =$$
$$= 0.0022 + 0.0174 + 0.00639 = 0.0835$$

i.
$$P(x \; 3 / n = 12, \; p = 0.40) \; = \; 1 \; - \; P(x < 3 / n = 12, \; p = 0.40) \; =$$
$$P(x \; 3 / n = 12, \; p = 0.40) \; = \; 1 \; - \; P(x < 3 / n = 12, \; p = 0.40) \; =$$
$$= 1 - [P(x = 0 / n = 12, \; p = 0.40) + \; P(x = 1 / n = 12, \; p = 0.40) + P(x = 2 / n = 12, \; p = 0.40)] =$$
$$1 - [0.0022 \; + \; 0.0174 \; + \; 0.0639] \; = \; 1 - 0.0835 \; = \; 0.9165 \cong \; 0.92$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μία νέα γραμμή παραγωγής παρουσιάζει μέσο όρο 7 βλαβών ανά εβδομάδα (5 εργασίμων ημερών). Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι σε ένα τυχαία επιλεγμένο διήμερο θα παρουσιαστούν τουλάχιστον 2 βλάβες.

ΛΥΣΗ

Έστω X ο αριθμός βλαβών ανά εβδομάδα. Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης X ~ Κατανομή Poisson με λ = 7.

i.

$$P(x \le 3/\lambda = 7) = P(x = 0/\lambda = 7) + P(x = 1/\lambda = 7) + P(x = 2/\lambda = 7) + P(x = 3/\lambda = 7) =$$
$$0.0009 + 0.0064 + 0.0223 + 0.0521 = 0.0817 \cong 0.08$$

ii.

$\rightarrow \lambda = 7$: βλάβες ανά εβδομάδα 5 ημερών

$\rightarrow \lambda_1 = \frac{7}{5} = 1.4$:βλάβες ανά ημέρα

$\rightarrow \lambda_2 = 1.4 * 2 = 2.8$: βλάβες ανά διήμερο

Έστω Y ο αριθμός βλαβών ανά διήμερο.
Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης Y ~ Κατανομή Poisson με λ_2 = 2.8,

$$P(x \ge 2/\lambda_2 = 2.8) = 1 - P(x < 2/\lambda_2 = 2.8) = 1 - [P(x = 0/\lambda_2 = 2.8) + P(x = 1/\lambda_2 = 2.8)] =$$
$$= 1 - [0.0608 + 0.1703] = 1 - 0.2311 = 0.7689 \cong 0.77$$