



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ - MBA”

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
ΚΑΙ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

*Επιλεγμένες Ασκήσεις με ενδεικτική λύση
στην Ανάλυση Διακύμανσης*

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Ας υποθέσουμε ότι ο διευθυντής παραγωγής μιας βιομηχανίας η οποία παρασκευάζει και συσκευάζει σε κουτιά μίγμα δημητριακών σκέπτεται να αντικαταστήσει την παλιά μηχανή με μία σύγχρονη. Στην αγορά κυκλοφορούν τρεις τύποι μηχανών διαφορετικών προμηθευτών, το κόστος αγοράς και συντήρησης των οποίων είναι περίπου ίδιο. Κατά συνέπεια η επιλογή θα βασιστεί στην απόδοση των τριών μηχανών σε πραγματικές συνθήκες λειτουργίας. Για το σκοπό αυτό ο διευθυντής παραγωγής ζήτησε από τους τρεις προμηθευτές να του παραχωρήσουν από ένα μηχάνημα για μια περίοδο δοκιμής και σχεδίασε το ακόλουθο πείραμα για να προσδιορίσει αν υπάρχει σημαντική διαφορά στην απόδοση των τριών μηχανημάτων. Δεκαπέντε εργάτες της ίδιας πείρας, ηλικίας και των ίδιων γνώσεων επιλέγονται και τοποθετούνται τυχαία ανά πέντε σε κάθε ένα μηχάνημα ως χειριστές του. Μετά από ένα διάστημα εκπαίδευσης μετράται ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα) που χρειάζεται ο κάθε εργάτης για να ολοκληρώσει τη συσκευασία ενός πακέτου χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μηχάνημα. Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

	Μ Η Χ Α Ν Ε Σ		
	A	B	Γ
	25,40	23,40	20,00
	26,31	21,80	22,20
	24,10	23,50	19,75
	23,74	22,75	20,60
	25,10	21,60	20,40
Μέσοι	$\bar{Y}_{1.}=24,93$	$\bar{Y}_{2.}=22,61$	$\bar{Y}_{3.}=20,59$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για πλήρως τυχαιοποιημένο σχεδιασμό δεδομένου ότι οι 15 εργάτες τοποθετούνται τυχαία στις τρεις μηχανές. Ο «ένας παράγοντας», του οποίου την αντίδραση θέλουμε να προσδιορίσουμε, είναι η μηχανή με τρία «επίπεδα μεταχείρισης»: μηχανή A, μηχανή B, μηχανή Γ.

Από τον πίνακα 9.4 προκύπτει ότι οι τρεις μηχανές έχουν διαφορετικούς δειγματικούς μέσους χρόνους. Συγκεκριμένα απαιτούνται 24,93 δευτερόλεπτα κατά μέσο όρο για να ολοκληρωθεί η διαδικασία με την πρώτη μηχανή, 22,61 δευτερόλεπτα κατά μέσο όρο για να ολοκληρωθεί η διαδικασία με τη δεύτερη μηχανή και 20,59 δευτερόλεπτα κατά μέσο όρο για να ολοκληρωθεί η διαδικασία με την τρίτη μηχανή. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν τα δειγματικά αυτά αποτελέσματα είναι σημαντικά διαφορετικά ώστε ο διευθυντής παραγωγής να οδηγηθεί στο συμπέρασμα ότι διαφέρουν σημαντικά και οι πληθυσμιακοί μέσοι όροι.

Για τον πειραματικό σχεδιασμό που περιγράψαμε η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση διατυπώνονται ως εξής:

H_0 : Όλες οι μηχανές έχουν τους ίδιους μέσους.
 ή H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1 : Όλες οι μηχανές δεν έχουν τους ίδιους μέσους.
 ή H_1 : $\mu_i \neq \mu_j$ για $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$

Με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος μας (Πίνακας 9.4) και τους αντίστοιχους ορισμούς (σχέσεις 9.1, 9.2, 9.3) έχουμε ότι:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n} = 22,71$$

και

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = 58,2172$$

$$SSTr = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2 = 47,164$$

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 = 11,0532$$

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του παραδείγματος, για λόγους άσκησης και μόνο, θα επαναλάβουμε τους υπολογισμούς των SST, SSTr, SSE χρησιμοποιώντας τους τύπους (9.5), (9.6), (9.7). Για διευκόλυνση μας μπορούμε να συμπληρώσουμε τον Πίνακα 2ως εξής:

Πίνακας 2

	Μ Η Χ Α Ν Ε Σ		
	1	2	3
	25,40	23,40	20,00
	26,31	21,80	22,20
	24,10	23,50	19,75
	23,74	22,75	20,60
	25,10	21,60	20,40
Y_i	$Y_1 = 124,65$	$Y_2 = 113,05$	$Y_3 = 102,95$
n_i	5	5	5
\bar{Y}_i	24,93	22,61	20,59

Κατά συνέπεια,

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$Y_{..} = 124,65 + 113,05 + 102,95 = 340,65$$

$$\frac{Y_{..}^2}{n} = \frac{(340,65)^2}{15} = 7736,1615$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 = 25,40^2 + 26,31^2 + \dots + 23,40^2 + \dots + 20,40^2 = 7794,3787$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{Y_i^2}{n_i} = \frac{124,65^2 + 113,05^2 + 102,95^2}{15} = 7783,3255$$

Επομένως,

$$SST = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n}$$

$$= 7794,3787 - 7736,1615 = 58,2172$$

$$SSTr = \sum_{i=1}^3 \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{n}$$

$$= 7783,3255 - 7736,1615 = 47,164$$

$$SSE = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{Y_{i.}^2}{n_i}$$

$$= 7.794,3787 - 7.783,3255 = 11,0532$$

Παρατηρούμε ότι με βάση τα αριθμητικά μας αποτελέσματα επαληθεύεται η σχέση (9.4). Δηλαδή,

$$SST = 58,2172 = 47,164 + 11,0532 = SSTr + SSE$$

Επίσης,

$$MSTr = \frac{SSTr}{k-1} = \frac{47,164}{2} = 23,582$$

και

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{11,0532}{12} = 0,9211$$

Επομένως,

$$F_0 = \frac{23,5820}{0,9211} = 25,60$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη τους υπολογισμούς που έχουμε ήδη κάνει, ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης παίρνει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

Πηγή	S S	D F	M S	F
Μεταξύ Αγωγών	47,1640	2	23,5820	25,60
Εντός Αγωγών	11,0532	12	0,9211	
Σύνολο	58,2172	14		

Για $\alpha = 0,01$

$$F_{2,12,0,99} = 6,93$$

Επειδή $F_0 > F_{2,12,0,99}$ απορρίπτουμε την H_0 .

Είναι προφανές ότι τα συμπεράσματα ισχύουν με την προϋπόθεση ότι:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$

και ότι οι πληθυσμοί ακολουθούν την κανονική κατανομή.

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Ο Πίνακας 3 περιέχει τις βαθμολογίες μαθητών της Α΄ Λυκείου τριών σχολείων της Αθήνας οι οποίοι έλαβαν μέρος στον Πανελλήνιο Διαγωνισμό της Μαθηματικής Εταιρείας.

Πίνακας 3
Βαθμολογία Μαθητών
(κλίμακα 0-6)

Μαθητές Σχολείου 1 (Y_{1i})	2	3	4				
Μαθητές Σχολείου 2 (Y_{2i})	4	5		6	4	5	6
Μαθητές Σχολείου 3 (Y_{3i})	2	3	3	4			

α. Να δημιουργηθεί ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης.

β. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι η επίδραση των μαθητών στο συγκεκριμένο διαγωνισμό δεν επηρεάζεται από το σχολείο στο οποίο φοιτούν.

ΛΥΣΗ

ΜΑΘ. ΣΧΟΛ. 1	ΜΑΘ. ΣΧΟΛ. 2	ΜΑΘ. ΣΧΟΛ. 3	
2	4	2	
3	5	3	
4	5	3	
	6	4	
	4		
	5		
	6		
Y _{1.} =9	Y _{2.} =35	Y _{3.} =12	Y _{..} =56
$\bar{Y}_{1.} = 3$	$\bar{Y}_{2.} = 5$	$\bar{Y}_{3.} = 3$	$\bar{Y}_{..} = 4$

$n = 14$ ($n_1=3, n_2=7, n_3=4$), $k=3, \alpha=0.05$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 = 4 + 9 + 16 + 16 + 25 + 25 + 36 + 16 + 25 + 36 + 4 + 9 + 9 + 16 = 246$$

$$\frac{Y_{..}^2}{n} = \frac{56^2}{14} = \frac{3136}{14} = 224$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{Y_{i.}^2}{n_i} = \frac{9^2}{3} + \frac{35^2}{7} + \frac{12^4}{4} = \frac{81}{3} + \frac{1225}{7} + \frac{144}{4} = 27 + 175 + 36 = 238$$

$$SST = 246 - 224 \rightarrow SST = 22$$

$$SST_r = 238 - 224 \rightarrow SST_r = 14 \rightarrow MST_r = \frac{SST_r}{k-1} = \frac{14}{2} \rightarrow MST_r = 7 \quad (1)$$

$$SSE = SST - SST_r \rightarrow SSE = 8 \rightarrow MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{8}{11} \rightarrow MSE = 0.73 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow F_0 = \frac{7}{0.73} \rightarrow F_0 \cong 9.59$$

α)

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

ΠΗΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ	SS	DF	MS	F ₀
Μεταξύ Αγωγών	14	k-1=2	7	
Εντός Αγωγών	8	n-k=11	0.73	9.59
ΣΥΝΟΛΟ	22	n-1=13		

β) Έλεγχος Υποθέσεων:

H₀: Η επίδοση των μαθητών δεν επηρεάζεται από το σχολείοH₁: Η επίδοση των μαθητών επηρεάζεται από το σχολείο

Κριτήριο Απόρριψης:

Απορρίπτουμε την H₀ αν $F_0 > F_{k-1, n-k, 1-\alpha}$

$$F_{k-1, n-k, 1-\alpha} = F_{2, 11, 0.95} = 3.982$$

$$\text{Άρα } 9.59 = F_0 > 3.982 = F_{2, 11, 0.95}$$

Συμπέρασμα:

Άρα απορρίπτουμε την H₀ και δεχόμαστε την H₁. Δηλαδή δεχόμαστε ότι η επίδοση των μαθητών επηρεάζεται από το σχολείο στο οποίο φοιτούν.

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Τα δάνεια που χορηγεί μια τράπεζα κατατάσσονται, ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο προορίζονται, σε 4 κατηγορίες Σ_i , $i = 1, \dots, 4$ και ανάλογα με την διάρκειά τους σε 5 κατηγορίες Δ_r , $r = 1, \dots, 5$. Ο αρμόδιος Διευθυντής θέλει να διερευνήσει αν το ύψος των χορηγημένων δανείων επηρεάζεται από τον σκοπό και την διάρκειά τους. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιεί τα στοιχεία δανειοδοτήσεων του προηγούμενου μήνα και δημιουργεί το σχετικό Πίνακα Ανάλυσης Διακύμανσης θεωρώντας τις κατηγορίες Σ_i ως αγωγές και τις κατηγορίες Δ_r ως blocks. Με βάση τα παραπάνω στοιχεία και αν επιπλέον είναι γνωστό ότι:

- i. Το μέσο ύψος των δανείων ανά κατηγορία Σ_i ($\bar{Y}_{i.}$) είναι 3, 2, 4 και 7 εκατ. δρχ. αντίστοιχα.
- ii. Το μέσο ύψος των δανείων ανά κατηγορία Δ_r ($\bar{Y}_{.r}$) είναι 1, 2, 3, 4 και 10 εκατ. δρχ. αντίστοιχα.
- iii. Το συνολικό άθροισμα τετραγώνων είναι 320.

Ζητούνται τα ακόλουθα:

- α. Να δημιουργηθεί ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης.
- β. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, η υπόθεση ότι το ύψος ενός δανείου δεν επηρεάζεται από τον σκοπό για τον οποίο προορίζεται.
- γ. Να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, η υπόθεση ότι το ύψος ενός δανείου δεν επηρεάζεται από την διάρκεια του.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για περίπτωση Ανάλυσης Διακύμανσης κατά δύο παράγοντες όπου οι κατηγορίες Σ_i θεωρούνται ως αγωγές και οι κατηγορίες Δ_i ως blocks.

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης δημιουργείται ο Πίνακας 0.0 ο οποίος επιπλέον περιέχει τους μέσους τόσο των αγωγών ($Y_{.i}$) όσο και των blocks ($Y_{i.}$).

Πίνακας 4

ΑΓΩΓΕΣ ΜΠΛΟΚ	1	2	3	4	ΣΥΝΟΛΑ	ΜΕΣΟΙ
1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	Y_{41}	$Y_{.1} =$	$\bar{Y}_{.1} = 1$
2	Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	Y_{42}	$Y_{.2} =$	$\bar{Y}_{.2} = 2$
.					$Y_{.3} =$	$\bar{Y}_{.3} = 3$
.					$Y_{.4} =$	$\bar{Y}_{.4} = 4$
5	Y_{15}	Y_{25}	Y_{35}	Y_{45}	$Y_{.5} =$	$\bar{Y}_{.5} = 10$
ΣΥΝΟΛΑ	$Y_{1.} =$	$Y_{2.} =$	$Y_{3.} =$	$Y_{4.} =$	$Y_{..} =$	
ΜΕΣΟΙ	$\bar{Y}_{1.} = 3$	$\bar{Y}_{2.} = 2$	$\bar{Y}_{3.} = 4$	$\bar{Y}_{4.} = 7$		$\bar{Y}_{..} = 4$

Δίνεται επιπλέον: $SST = 320$

Υπολογισμός των υπολοίπων στοιχείων του Πίνακα:

$$k = 4$$

$$\Rightarrow n = kb = 4 \cdot 5 = 20$$

$$b = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{Y}_i = \frac{Y_i}{n_i} \rightarrow Y_i = \bar{Y}_i * n_i \\ i = 1,2,3,4 \\ n_i = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y_{1.} = 15 \\ Y_{2.} = 10 \\ Y_{3.} = 20 \\ Y_{4.} = 35 \end{array} \Rightarrow Y_{..} = 80 \rightarrow \bar{Y}_{..} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{Y}_j = \frac{Y_j}{n_j} \rightarrow Y_j = \bar{Y}_j * n_j \\ j = 1,2,3,4,5 \\ n_j = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y_{.1} = 4 \\ Y_{.2} = 8 \\ Y_{.3} = 12 \\ Y_{.4} = 16 \\ Y_{.5} = 40 \end{array} \Rightarrow Y_{..} = 80 \rightarrow \bar{Y}_{..} = 4$$

Υπολογισμός βοηθητικών στοιχείων:

$$\sum_{i=1}^4 (Y_{i.})^2 = 15^2 + 10^2 + 20^2 + 35^2 = 1950$$

$$\sum_{j=1}^5 (Y_{.j})^2 = 4^2 + 8^2 + 12^2 + 16^2 + 40^2 = 2080$$

$$(Y_{..})^2 = 80^2 = 6400$$

Υπολογισμός των στοιχείων για την δημιουργία του Πίνακα Ανάλυσης Διακύμανσης:

$$SST_r = \frac{\sum_{ii} (Y_{i.})^2}{b} - \frac{(Y_{..})^2}{bk} = \frac{1950}{5} - \frac{6400}{20} \Rightarrow SST_r = 70$$

$$SSBl = \frac{\sum_{jj} (Y_{.j})^2}{k} - \frac{(Y_{..})^2}{kb} = \frac{2080}{4} - \frac{6400}{20} \Rightarrow SSBl = 200$$

$$\text{Γνωρίζω ότι: } SST = SST_r + SSBl + SSE \Rightarrow SSE = 50$$

Έτσι μπορώ να υπολογίζω : την διακύμανση

$$MSTr = \frac{SSTr}{k-1} = \frac{70}{3} \Rightarrow MSTr = 23.33$$

$$MSBl = \frac{SSBl}{b-1} = \frac{200}{4} \Rightarrow MSBl = 50$$

$$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(b-1)} = \frac{50}{12} \Rightarrow MSE = 4.17$$

$$F_{Tr} = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{23.33}{4.17} \Rightarrow F_{Tr} = 5.59$$

$$F_{Bl} = \frac{MSBl}{MSE} = \frac{50}{4.17} \Rightarrow F_{Bl} = 11.99$$

Με βάση τα παραπάνω δημιουργείται ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης:

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

ΠΗΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ	SS	DF	MS	F ₀
ΜΕΤΑΞΥ ΑΓΩΓΩΝ	70	3	23.33	5.59
ΜΕΤΑΞΥ BLOCKS	200	4	50	11.99
ERROR	50	12	4.17	
ΣΥΝΟΛΟ	320	19		

Υποθέσεις:

Για τις αγωγές H₀ : Το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από το σκοπό για τον οποίο προορίζεται.

H₁ : Το ύψος του δανείου επηρεάζεται από το σκοπό για τον οποίο προορίζεται.

Για τα blocks: H₀: Το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από το σκοπό τη διάρκειά του.

H₁: Το ύψος του δανείου επηρεάζεται από τη διάρκειά του.

Έλεγχος για τις αγωγές:

Κριτήριο Απόρριψης:

Απορρίπτω την H₀ αν $F_{Tr} > F_{k-1, (b-1)(k-1), 1-\alpha}$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$F_{Tr} = 5.59$$

$$F_{k-1, (b-1)(k-1), 1-\alpha} = F_{3, 12, 0.95} = 3.49 \Rightarrow 5.59 > F_{3, 12, 0.95} = 3.49$$

$$\alpha = 5\%$$

Συμπέρασμα:

Απορρίπτω την H₀ που σημαίνει ότι η χρήση για την οποία προορίζεται το δάνειο επηρεάζει το ύψος του.

Έλεγχος για τα blocks

Κριτήριο Απόρριψης:

Απορρίπτω την H_0 αν $F_{Bl} > F_{(b-1),(b-1)(k-1),1-\alpha}$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$F_{Bl} = 11.99$$

$$F_{b-1,(b-1)(k-1),1-\alpha} = F_{4,12,0.95} = 3.29 \Rightarrow F_{Bl} = 11.99 > F_{4,12,0.95} = 3.26$$

$$\alpha = 5\%$$

Συμπέρασμα:

Απορρίπτω την H_0 δηλαδή η διάρκεια του δανείου επηρεάζει το ύψος του δανείου.

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Τα δάνεια που χορηγεί μία Τράπεζα κατατάσσονται ανάλογα με τη χρήση για την οποία προορίζονται σε Εμπορικά, Βιομηχανικά και Αγροτικά και ανάλογα με τη διάρκεια τους σε Βραχυπρόθεσμα, Μεσοπρόθεσμα και Μακροπρόθεσμα. Στον Πίνακα 4.1 εμφανίζεται το ύψος ανά κατηγορία (σε εκ. δρχ.) ενός τυχαίου δείγματος δανείων που χορηγήθηκαν από τη συγκεκριμένη Τράπεζα κατά τη διάρκεια του προηγούμενου οικονομικού έτους.

Πίνακας 4. 1

Είδος Διάρκεια	Εμπορικά	Βιομηχανικά	Αγροτικά
Βραχυπρόθεσμα	17	9	3
Μεσοπρόθεσμα	4	10	4
Μακροπρόθεσμα	2	10	4

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

- Να δημιουργηθεί ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης.
- Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 η υπόθεση ότι το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από τη χρήση για την οποία προορίζεται.
- Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 η υπόθεση ότι το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από τη διάρκεια του.

Σημείωση: Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών δίνονται:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 y_{ir}^2 = 631$$

$$\sum_i (y_{i.})^2 = 1491$$

$$\sum_i (y_{.r})^2 = 1421$$

$$y_{..} = 63$$

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα θα εξετασθεί με τη βοήθεια του Πίνακα Ανάλυσης Διακύμανσης κατά δύο παράγοντες. Με βάση τον Πίνακα δεδομένων προκύπτει ότι:

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΑΝΕΙΟΥ	ΕΙΔΟΣ ΔΑΝΕΙΟΥ			ΣΥΝΟΛΑ	ΜΕΣΟΙ
	E_1	E_2	E_3		
Δ_1	17	9	3	$Y_{.1}=29$	$\bar{Y}_{.1} = 9.7$
Δ_2	4	10	4	$Y_{.2}=18$	$\bar{Y}_{.2} = 6.0$
Δ_3	2	10	4	$Y_{.3}=16$	$\bar{Y}_{.3} = 5.3$
ΣΥΝΟΛΑ	$Y_{1.}=23$	$Y_{2.}=29$	$Y_{3.}=11$	$Y_{..}=63$	
ΜΕΣΟΙ	$\bar{Y}_{1.} = 7.7$	$\bar{Y}_{2.} = 9.7$	$\bar{Y}_{3.} = 3.7$		$\bar{Y}_{..} = 7$

$$SST = SSTr + SSBl + SSE \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^b y_{ir}^2 = 17^2 + 9^2 + 3^2 + \dots + 10^2 + 4^2 = 631 \quad k=3, b=3$$

$$\frac{(y_{..})^2}{kb} = \frac{63^2}{3 \cdot 3} = 441$$

$$\sum_i (Y_{i.})^2 = 23^2 + 29^2 + 11^2 = 1491$$

$$\sum_r (Y_{.r})^2 = 29^2 + 18^2 + 16^2 + 40^2 = 1421$$

$$\text{Συνολική μεταβλητότητα : } SST = \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 y_{ir}^2 - \frac{(y_{..})^2}{kb} = 631 - 441 \Rightarrow SST = 190$$

$$SSTr = \frac{\sum_i (Y_{i.})^2}{b} - \frac{(Y_{..})^2}{kb} = \frac{1491}{3} - 441 \Rightarrow SSTr = 56$$

$$SSBl = \frac{\sum_r (Y_{.r})^2}{k} - \frac{(Y_{..})^2}{kb} = \frac{1421}{3} - 441 \Rightarrow SSBl = 32.7$$

$$(1) \Rightarrow SSE = SST - SSTr - SSBl = 190 - 56 - 32.7 \Rightarrow SSE = 101.3$$

$$\text{ή } SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^b y_{ir}^2 - \frac{\sum_i (y_{i.})^2}{b} - \frac{\sum_r (y_{.r})^2}{k} + \frac{(y_{..})^2}{kb} \Rightarrow$$

$$SSE = 631 - \frac{1491}{3} - \frac{1421}{3} + 441 \Rightarrow SSE = 101.3$$

Διακυμάνσεις:

$$MSTr = \frac{SSTr}{k-1} = \frac{56}{2} = 28 \Rightarrow MSTr = 28$$

$$MSBl = \frac{SSBl}{b-1} = \frac{32.7}{2} \Rightarrow MSBl = 16.35$$

$$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(b-1)} = 1.1, F_{Bl} = \frac{MSBl}{MSE} = 0.65$$

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

ΠΗΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ	SS	DF	MS	F
ΜΕΤΑΞΥ ΑΓΩΓΩΝ	56	$(k-1) = 3-1=2$	28	1.1
ΜΕΤΑΞΥ BLOCKS	32.7	$(b-1) = 3-1=2$	16.35	0.6 5
ΛΑΘΟΣ	101.3	$(b-1)(k-1)=(3-1)(3-1)=4$	25.3	
ΣΥΝΟΛΟ	190	$Kb-1=3*3-1=8$		

Από τον Πίνακα έχουμε ότι

$F_{Tr} = 1.1$ και $F_{B1} = 0.65$ επίσης γνωρίζουμε $k = b = 3$, $\alpha = 0.05$

α) Πρώτη υπόθεση : Το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από το είδος του

Για να δεχθούμε την H_0 πρέπει $F_{Tr} < F_{k-1, (b-1)(k-1), 1-\alpha}$

$$\left. \begin{array}{l} F_{Tr} = 1.1 \\ F_{k-1, (b-1)(k-1), 1-\alpha} = 2,4,0.95 = 6.94 \end{array} \right\} \Rightarrow F_{Tr} < F_{2,4,0.95}$$

Δεχόμαστε την H_0 . Άρα το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από το είδος του.

β) Δεύτερη υπόθεση : Το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από τη διάρκεια του

Για να απορρίψουμε την H_0 πρέπει $F_{B1} > F_{(b-1), (k-1)(b-1), 1-\alpha}$

$$\left. \begin{array}{l} F_{B1} = 0.65 \\ F_{(b-1), (k-1)(b-1), 1-\alpha} = 2,4,0.95 = 6.94 \end{array} \right\} \Rightarrow F_{B1} < F_{2,4,0.95}$$

Δεχόμαστε την H_0 . Άρα το ύψος του δανείου δεν επηρεάζεται από τη διάρκεια του.

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Ένα Πανεπιστήμιο στην προσπάθειά του να βελτιώσει την απόδοση των τελειοφοίτων φοιτητών του στις συνεντεύξεις που θα έχουν κατά την αναζήτηση της πρώτης θέσης εργασίας τους, προγραμματίζει να τους προσφέρει ένα από τα ακόλουθα τρία προγράμματα προετοιμασίας:

- Μία τρίωρη ανασκόπηση του τύπου των ερωτήσεων που θα κληθούν να απαντήσουν στις συνεντεύξεις (Π₁).
- Μία ημερίδα όπου κάποιοι φοιτητές θα «περάσουν» από μία «τυπική» συνέντευξη η οποία θα αναλυθεί και θα σχολιασθεί (Π₂).
- Μία σειρά σχετικών μαθημάτων διάρκειας δύο εβδομάδων (Π₃).

Προκειμένου να επιλεγεί το αποτελεσματικότερο πρόγραμμα προετοιμασίας επιλέγονται τυχαία 18 φοιτητές, 6 από κάθε ένα από τα τρία Τμήματα του Πανεπιστημίου (Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ₁), Περιβάλλοντος (Τ₂) και Κοινωνικών Επιστημών (Τ₃)). Στη συνέχεια, 2 φοιτητές από κάθε Τμήμα παρακολουθούν καθένα από τα τρία προγράμματα και τέλος «περνούν» από μία συνέντευξη όπου βαθμολογείται η απόδοσή τους. Η βαθμολογία των 18 φοιτητών και μια πρώτη μερική επεξεργασία τους συνοψίζονται στον Πίνακα 4:

Πίνακας 4

Πρόγραμμα Προετοιμασίας Τμήμα	Π ₁	Π ₂	Π ₃	Σύνολο Βαθμολογιών Τμημάτων
Τ ₁	Y ₁₁₁ = 50	Y ₂₁₁ = 54	Y ₃₁₁ = 48	
	Y ₁₁₂ = 58	Y ₂₁₂ = 46	Y ₃₁₂ = 40	
	Y _{11.} = 108	Y _{21.} = 100		Y _{.1.} =
Τ ₂	Y ₁₂₁ = 46	56	42	
	Y ₁₂₂ = 54	62	48	
	Y _{12.} = 100			
Τ ₃	Y ₁₃₁ = 56	60	48	
	Y ₁₃₂ = 60	58	41	
Σύνολο Βαθμολογιών Προγραμμάτων	Y _{1..} =			

Με βάση τα στοιχεία αυτά και αν επιπλέον είναι γνωστό ότι το άθροισμα των τετραγώνων όλων των παρατηρήσεων (βαθμολογιών) είναι 48565 ζητούνται:

- Να δημιουργηθεί ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης.
- Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι το πρόγραμμα προετοιμασίας δεν επηρεάζει την απόδοση στη συνέντευξη.
- Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι το Τμήμα δεν επηρεάζει την απόδοση στη συνέντευξη.
- Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση Τμήματος και προγράμματος προετοιμασίας που επιδρά στη βαθμολογία.

Λύση

α. Να δημιουργηθεί ο Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

Για την κατασκευή του Πίνακα Ανάλυσης Διακύμανσης προχωρούμε στους ακόλουθους υπολογισμούς:

Blocks	Αγωγές	Π ₁	Π ₂	Π ₃	Σύνολα Blocks
T ₁		Y ₁₁₁ = 50	Y ₂₁₁ = 54	Y ₃₁₁ = 48	
		Y ₁₁₂ = 58	Y ₂₁₂ = 46	Y ₃₁₂ = 40	
Σύν. Κυψελίδας		Y _{11.} = 108	Y _{21.} = 100	Y _{31.} = 88	Y _{.1.} = 296
T ₂		Y ₁₂₁ = 46	Y ₂₂₁ = 56	Y ₃₂₁ = 42	
		Y ₁₂₂ = 54	Y ₂₂₂ = 62	Y ₃₂₂ = 48	
Σύν. Κυψελίδας		Y _{12.} = 100	Y _{22.} = 118	Y _{32.} = 90	Y _{.2.} = 308
T ₃		Y ₁₃₁ = 56	Y ₂₃₁ = 60	Y ₃₃₁ = 48	
		Y ₁₃₂ = 60	Y ₂₃₂ = 58	Y ₃₃₂ = 41	
Σύν. Κυψελίδας		Y _{13.} = 116	Y _{23.} = 118	Y _{33.} = 89	Y _{.3.} = 323
Σύνολα Αγωγών		Y _{1..} = 324	Y _{2..} = 336	Y _{3..} = 267	Y _{...}} = 927

$$k=3, b=3, m=2$$

$$kbm=3*3*2 \rightarrow kbm=18$$

$$\sum_i (y_{i..})^2 = (324)^2 + (336)^2 + (267)^2 = 104976 + 112896 + 71289 = 289161$$

$$\sum_r (y_{.r.})^2 = (296)^2 + (308)^2 + (323)^2 = 87616 + 94864 + 104329 = 286809$$

$$\sum_i \sum_r (y_{ir.})^2 = (108)^2 + (100)^2 + (116)^2 + (100)^2 + (118)^2 + (118)^2 + (88)^2 + (90)^2 + (89)^2 = 11664 + 10000 + 13456 + 10000 + 13924 + 13924 + 7744 + 8100 + 7921 = 96733$$

$$SST = \sum_{i=1}^5 \sum_{r=1}^3 \sum_{j=1}^2 y_{irj}^2 - \frac{(y_{...})^2}{kbm} = 48565 - \frac{(927)^2}{18} = 48565 - \frac{859329}{18} = 48565 - 47740,5 = 824,5$$

$$SSTr = \frac{\sum_i (y_{i..})^2}{mb} - \frac{(y_{...})^2}{kbm} = \frac{289161}{6} - 47740,5 = 48193,5 - 47740,5 = 453$$

$$SSBl = \frac{\sum_r (y_{.r.})^2}{mk} - \frac{(y_{...})^2}{kbm} = \frac{286809}{6} - 47740,5 = 47801,5 - 47740,5 = 61$$

$$SSE = \sum_{i=1}^5 \sum_{r=1}^3 \sum_{j=1}^2 y_{irj}^2 - \sum_{i=1}^5 \sum_{r=1}^3 \frac{(y_{ir.})^2}{m} = 48565 - \frac{96733}{2} = 48565 - 48366,5 = 198,5$$

$$\lambda_{\text{ρα}} SSI = SST - SSTr - SSBl - SSE = 824,5 - 453 - 61 - 198,5 = 112$$

Στη συνέχεια υπολογίζω τα Μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα:

$$MSTr = \frac{SSTr}{k-1} = \frac{453}{2} = 226,5$$

$$MSBl = \frac{SSBl}{b-1} = \frac{61}{2} = 30,5$$

$$MSI = \frac{MSI}{(k-1)(b-1)} = \frac{112}{2*2} = 28$$

$$MSE = \frac{MSE}{kb(m-1)} = \frac{198,5}{3*3*1} = 22,05$$

Τέλος υπολογίζω τις τιμές της F (F_{Tr} , F_{Bl} , F_I)

$$F_{Tr} = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{226,5}{22,05} = 10,27$$

$$F_{Bl} = \frac{MSBl}{MSE} = \frac{30,5}{22,05} = 1,38$$

$$F_I = \frac{MSI}{MSE} = \frac{28}{22,05} = 1,27$$

$$F_{k-1, kb(m-1), 1-a} = F_{2,9,0,95} = 4,256 = 4,26$$

Για $\alpha = 0,05$ $F_{b-1, kb(m-1), 1-a} = F_{2,9,0,95} = 4,256 = 4,26$

$$F_{(k-1)(b-1), kb(m-1), 1-a} = F_{4,9,0,95} = 3,633 = 3,63$$

Πίνακας Ανάλυσης Διακύμανσης

Πηγή	DF	SS	MS	F
Αγωγή (παράγων Α)	453	2	226,5	10,27
Μπλοκ (Παράγων Β)	61	2	30,5	1,38
Αλληλοεπίδραση (Interaction)	112	4	28	1,27
Λάθος (Error)	198,5	9	22,05	
Σύνολο	824,5	17		

- β. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι το πρόγραμμα προετοιμασίας δεν επηρεάζει την απόδοση στη συνέντευξη.

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση αν το Πρόγραμμα Προετοιμασίας επιδρά στη βαθμολογία, δηλαδή:

$$H_0: \mu_{1..} = \mu_{2..} = \dots = \mu_{k..}$$

$$H_1: \text{Δύο, τουλάχιστον, από τους μέσους διαφέρουν}$$

$$\text{Συνάρτηση Ελέγχου } F_{Tr} = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{226,5}{22,05} = 10,27$$

Κριτήριο Ελέγχου: Απορρίπτουμε την H_0 αν $F_{Tr} > F_{k-1, kb(m-1), 1-a}$

Επειδή $F_{Tr} = 10,27 > 4,26 = F_{k-1, kb(m-1), 1-a}$ απορρίπτουμε την H_0 και δεχόμαστε την H_1 .

Δεχόμαστε δηλαδή ότι το Πρόγραμμα Προετοιμασίας επιδρά στη βαθμολογία.

- γ. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι το Τμήμα δεν επηρεάζει την απόδοση στη συνέντευξη.

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση αν το Τμήμα επιδρά στη βαθμολογία, δηλαδή:

H_0 : $\mu.1. = \mu.2. = \dots = \mu.b.$

H_1 : Δύο, τουλάχιστον, από τους μέσους διαφέρουν

Συνάρτηση Ελέγχου $F_{Bl} = \frac{MSBl}{MSE} = \frac{30,5}{22,05} = 1,38$

Κριτήριο Ελέγχου: Απορρίπτουμε την H_0 αν $F_{Bl} > F_{b-1, kb(m-1), 1-a}$

Επειδή $F_{Bl} = 1,38 < 4,26 = F_{b-1, kb(m-1), 1-a}$ δεχόμαστε την H_0 . Δεχόμαστε δηλαδή ότι το Τμήμα δεν επιδρά στη βαθμολογία.

- δ. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ η υπόθεση ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση Τμήματος και προγράμματος προετοιμασίας που επιδρά στη βαθμολογία.

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση:

H_0 : Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση τμήματος, προετοιμασίας που επιδρά στη βαθμολογία

H_1 : Υπάρχει αλληλεπίδραση τμήματος, προετοιμασίας που επιδρά στη βαθμολογία

Συνάρτηση Ελέγχου $F_I = \frac{MSI}{MSE} = \frac{28}{22,05} = 1,27$

Κριτήριο Ελέγχου: Απορρίπτουμε την H_0 αν $F_I > F_{(k-1)(b-1), kb(m-1), 1-a}$

Επειδή $F_I = 1,27 < 3,63 = F_{(k-1)(b-1), kb(m-1), 1-a}$ δεχόμαστε την H_0 . Δεχόμαστε δηλαδή ότι δεν υπάρχει

αλληλεπίδραση Τμήματος και Προγράμματος Προετοιμασίας στη βαθμολογία. .