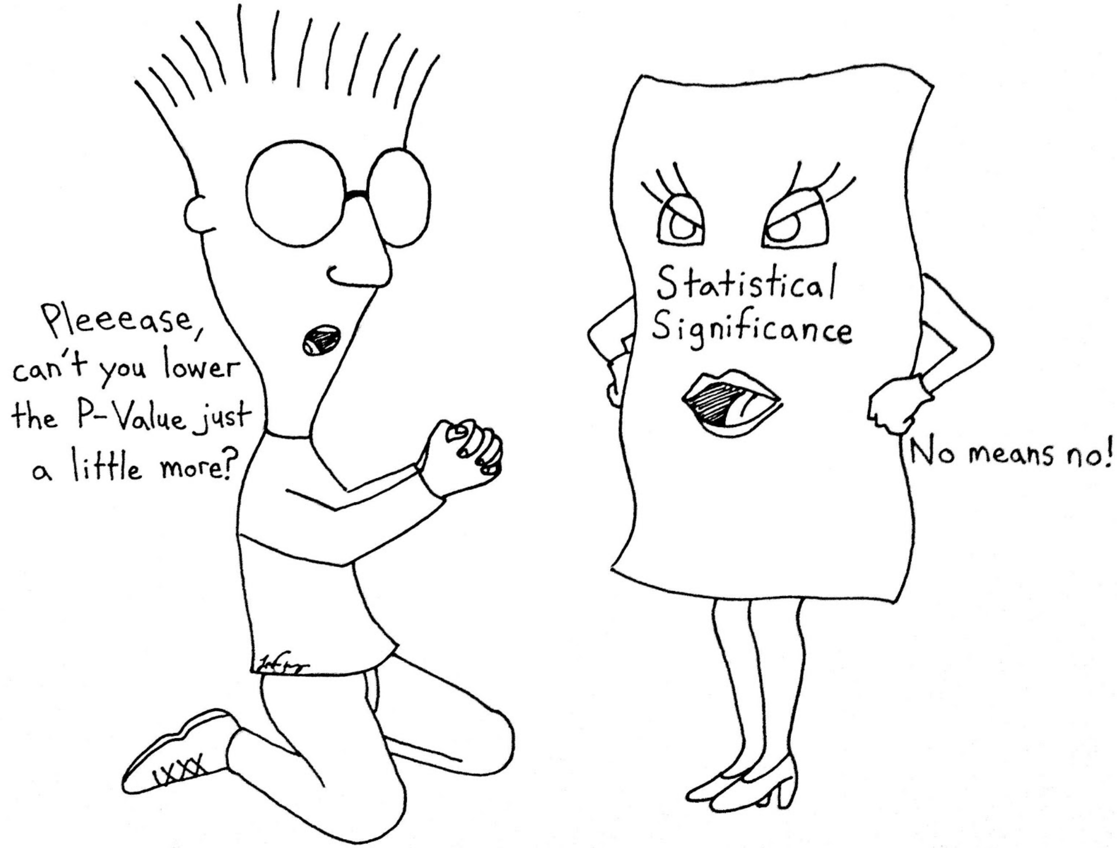
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΔΙΑΛΕΞΗ: ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Διδάσκουσα: Ε. Γάκη, Επίκ. Καθηγήτρια

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω


Pleeeease,
can't you lower
the P-Value just
a little more?
Statistical
Significance
No means no!

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Έλεγχοι υποθέσεων, ερμηνεία
- Έλεγχος για μέση τιμή με γνωστή διασπορά και δ.ε.
- Έλεγχος για μέση τιμή με άγνωστη διασπορά και δ.ε.
- Έλεγχος για την διαφορά δύο μέσων τιμών με γνωστή διασπορά και δ.ε.
- Έλεγχος για την διαφορά δύο μέσων τιμών με άγνωστη διασπορά και δ.ε.

Έλεγχοι Υποθέσεων

Μια υπόθεση είναι μια αφαιρετική δήλωση της σχέσης μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών που μπορούν να μετρηθούν.

Στατιστικές Υποθέσεις (Statistical Hypothesis): Οι έλεγχοι περιλαμβάνουν δύο ισχυρισμούς, οι οποίοι αφορούν κάποια παράμετρο του υπό μελέτη πληθυσμού.

Για να ελεγχθούν οι υποθέσεις πρέπει να διαμορφωθούν

Μηδενική Υπόθεση – Null Hypothesis (H_0)	η Εναλλακτική Υπόθεση – Alternative Hypothesis (H_1)
⇩	⇩
Τίθεται εκείνη της οποίας η εσφαλμένη απόρριψη εγκυμονεί τους περισσότερους κινδύνους.	*Είναι η άρνηση της μηδενικής υπόθεσης με την έννοια ότι δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο*

Η Μηδενική Υπόθεση ονομάζεται επίσης και «Υπόθεση της μη Διαφοράς»

Έλεγχοι Υποθέσεων

ΣΤΟΧΟΣ:
Η επεξεργασία ενός δείγματος σε σχέση με το εξεταζόμενο χαρακτηριστικό και η διαπίστωση της ύπαρξης/παρουσίας αυτού του χαρακτηριστικού στον πληθυσμό

Η απόρριψη της Η0 και η αποδοχή της Η1 **δε θεωρείται εμπεριστατωμένη απόδειξη** ότι η εναλλακτική υπόθεση είναι πράγματι αληθινή, απλώς αποτελεί στοιχείο για την αύξηση της πεποίθησης του ερευνητή ότι η Η1 είναι σωστή.

Παραδείγματα Ελέγχων

•Ο διευθυντής παραγωγής θέλει να εξετάσει εάν το ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων που παράγει η μηχανή Μ1 είναι μεγαλύτερο από αυτό της μηχανής Μ2.

•Ένας οικονομικός αναλυτής θέλει να εξετάσει εάν οι αμοιβές των εργαζόμενων στον κλάδο Κ1 είναι μικρότερες από τις αμοιβές των εργαζόμενων στον κλάδο Κ2.

Έλεγχοι Υποθέσεων – Βασικά Βήματα

Βήμα 1ο Διατύπωση των Υποθέσεων

Είναι το πιο σημαντικό βήμα στον έλεγχο υποθέσεων

Βήμα 2ο Καθορισμός του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας (significance level)

Το επίπεδο σημαντικότητας είναι η (μικρή) πιθανότητα εκείνη η οποία είναι η μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα εσφαλμένης απόρριψης της H_0. Συμβολίζεται με α και εκφράζει την πιθανότητα να απορρίψουμε την H_0 όταν αυτή είναι αληθής.

Έλεγχοι Υποθέσεων – Βασικά Βήματα

Βήμα 3ο Υπολογισμός της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου (test statistic)

Η επιλογή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου υπαγορεύεται από το πρόβλημα και τις υποθέσεις. Η τιμή ή οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου που αντιστοιχούν στο επίπεδο σημαντικότητας α ονομάζονται ***κρίσιμα σημεία (critical points)*** *και οριοθετούν την* ***περιοχή απόρριψης*** *και την* ***περιοχή μη απόρριψης*** *της μηδενικής υπόθεσης. Η περιοχή απόρριψης ονομάζεται και* ***κρίσιμη περιοχή (critical region)***

Βήμα 4ο Διατύπωση της απόφασης

Αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, κάτω από την μηδενική υπόθεση, εντοπίζεται στην περιοχή μη απόρριψης της H_0, *αυτό συνεπάγεται ότι οι ενδείξεις από τα δεδομένα οδηγούν σε μη απόρριψης της* H_0. *Αν όμως η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου εντοπίζεται στην περιοχή απόρριψης της* H_0, *αυτό συνεπάγεται ότι οι ενδείξεις οδηγούν σε απόΡριψη της* H_0.

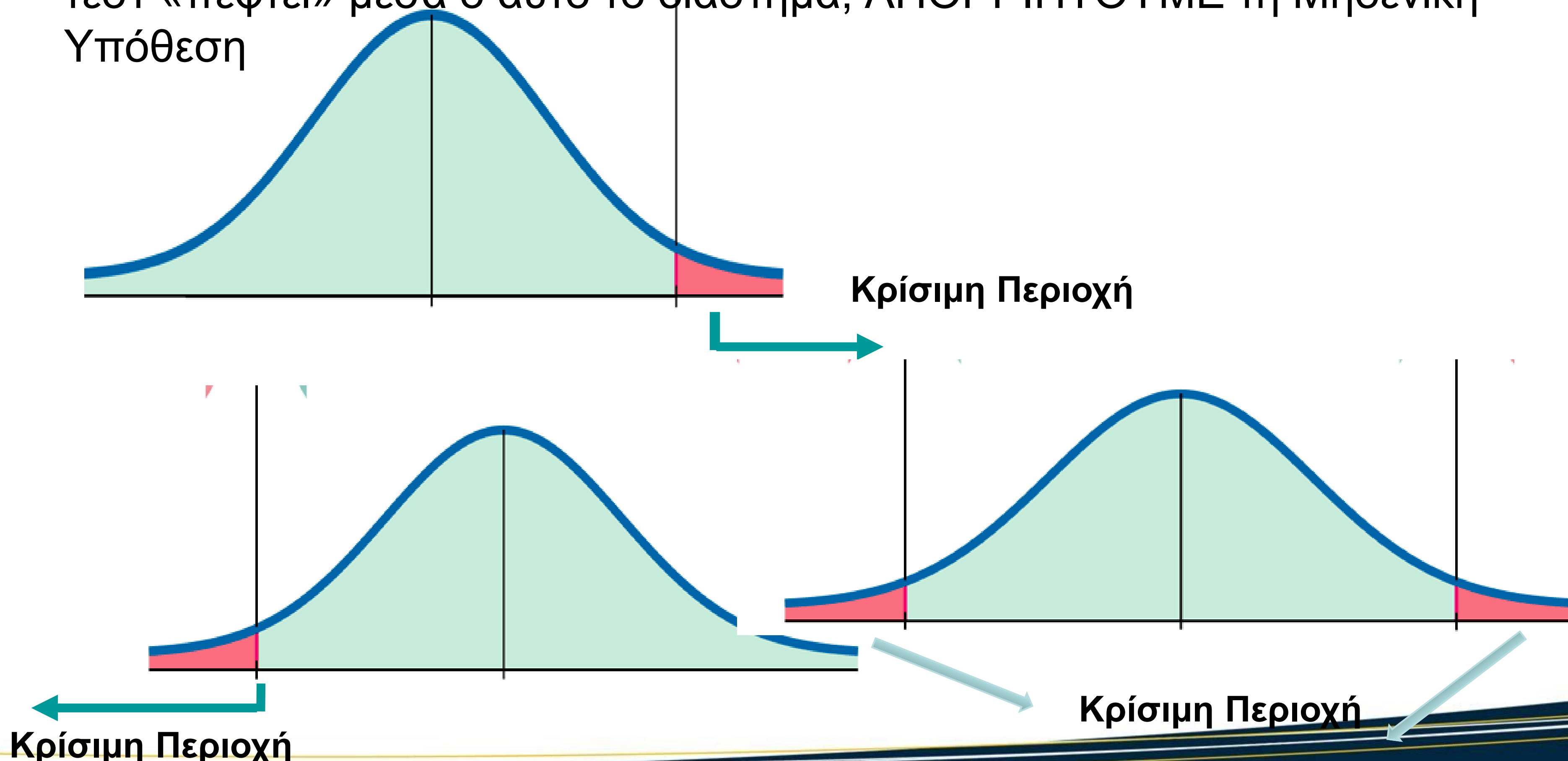
Έλεγχοι Υποθέσεων : Τύποι Σφαλμάτων

Πραγματική Κατάσταση / Απόφαση	H_0 Αληθής	H_0 Όχι αληθής
Μη απόρριψη της H_0	Σωστή Απόφαση	Σφάλμα τύπου ΙΙ
Απόρριψη της H_0	Σφάλμα τύπου Ι	Σωστή Απόφαση

$$\alpha = P(Type\ I\ Error) \quad \beta = P(Type\ II\ Error)$$

Έλεγχοι Υποθέσεων : Κρίσιμη Περιοχή

Πρόκειται για ένα διάστημα τιμών, τέτοιο ώστε αν η τιμή του στατιστικού τέστ «πέφτει» μέσα σ’αυτό το διάστημα, ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΥΜΕ τη Μηδενική Υπόθεση



Έλεγχοι Υποθέσεων – κλείνοντας

Συμπερασματικά

- Όταν **απορρίπτουμε την H_0**, σε επίπεδο σημαντικότητας α, τότε **είμαστε κατά τουλάχιστον (1-α)100% βέβαιοι ότι η μηδενική υπόθεση δεν ισχύει**.

- Όταν **δεν απορρίπτουμε την H_0** σε επίπεδο σημαντικότητας α, τότε απλώς δεν έχουμε επαρκή στοιχεία για να τεκμηριώσουμε την απόρριψή της. Με άλλα λόγια, από τα δεδομένα δεν παρέχονται επαρκείς ενδείξεις υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης.

Έλεγχος για το Μέσο Όρο ενός πληθυσμού: σ^2-γνωστή

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έστω X η μέση τιμή του δείγματος και S2 η διακύμανση αυτού

Ο καλυτερος εκτιμητης του μ ειναι $\hat{\mu} = \bar{X} = \sum \frac{X_i}{v}$

Το τυπικο σφαλμα ειναι $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$

Θα ελεγξουμε την υποθεση

$H_o : \mu = \mu_o$ εναντι της εναλλακτικης

$H_1 : \mu \neq \mu_o$

με επιπεδο στατιστικης σημαντικοτητας α

Χρησιμοποιουμε το κριτηριο $Z = \frac{\left(\bar{X} - \mu_o\right)}{\sigma/\sqrt{n}}$ »N(0,1)

Η κρισιμη περιοχη ειναι $C = \left(-¥,-z_{\alpha/2}\right] \cup \left[z_{\alpha/2},¥\right)$ δηλαδη $|Z|$ ³$Z_{\alpha/2}$

$(-\infty,-Z_{1-\alpha/2}) \cup (Z_{1-\alpha/2}, +\infty)$

Ο έλεγχος δηλαδή απορρίπτεται όταν $Z > Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z < -Z_{1-\alpha/2}$

Έλεγχος για το Μέσο Όρο ενός πληθυσμού: σ2-γνωστή

Ο έλεγχος δηλαδή απορρίπτεται όταν $Z>Z_{1-\alpha}$

$H_o : \mu = \mu_o$ εναντι της εναλλακτικης

$H_1 : \mu > \mu_o$

με επιπεδο στατιστικης σημαντικοτητας α

Χρησιμοποιουμε $Z = \dfrac{(\overline{X} - \mu_o)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Η κρισιμη περιοχη ειναι $C = [z_{\alpha/2},\infty)$ δηλαδη $Z \geq z_\alpha$

$(Z_{1-\alpha}\ ,+\infty)$

$H_o : \mu = \mu_o$ εναντι της εναλλακτικης

$H_1 : \mu < \mu_o$

με επιπεδο στατιστικης σημαντικοτητας α

Χρησιμοποιουμε $Z = \dfrac{(\overline{X} - \mu_o)}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$

Η κρισιμη περιοχη ειναι $C = (-\infty,-z_{1-\alpha}]$ δηλαδη $Z \leq -z_{1-\alpha}$

Ο έλεγχος δηλαδή απορρίπτεται όταν $Z<-Z_{1-\alpha}$

Παράδειγμα 1

Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22 ώρες και τυπική απόκλιση 3 ώρες . Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο του χρόνου ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (*σε ώρες*) είναι:

16	18	22	20	21	20	16	22	25

Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής μπορεί να υποστηριχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, ότι το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του ;

Η υπόθεση που πρέπει να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 είναι:

$H_o : \mu = 22$

$H_1 : \mu \neq 22$

Υπολογίζω: $\bar{x} = 20$ $\sigma_{\bar{X}} = 1$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{20 - 22}{1} = -2$$

$Z_{0,975} = 1,96.$

Κατά συνέπεια η τιμή $Z_0 = -2$ βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης

Έλεγχος για το Μέσο Όρο ενός πληθυσμού: σ^2-άγνωστη

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_v$ ένα τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έστω X η μέση τιμή του δείγματος και S^2 η διακύμανση αυτού

Η τιμή της διασπορά σ^2 είναι άγνωστη και αντικαθίσταται από μια εκτίμηση που μπορεί είναι η δειγματική τυπική απόκλιση s που δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \sum (xi - \bar{x})^2 / (v - 1)$$

Πλέον αντί για κανονική κατανομή η τροποποιημένη μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Student με v-1 βαθμούς ελευθερίας

$$H_o: \mu = \mu_o \text{ vs } H_a: \mu > \mu_o$$
$$H_o: \mu = \mu_o \text{ vs } H_a: \mu < \mu_o$$
$$H_o: \mu = \mu_o \text{ vs } H_a: \mu \neq \mu_o$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < -t_{1-\alpha/2, n-1}$$

$$C = [t_{n-1,1-a}, +\infty), t \geq t_{n-1,a}$$
$$C = (-\infty, -t_{n-1,1-a}], t \leq -t_{n-1,a}$$
$$C = (-\infty, -t_{n-1,1-a/2}] \cup [t_{n\ 1,1-a/2}, +\infty), |t| \geq t_{n-1,1-a/2}$$

Παράδειγμα 2

Να ξαναγίνει ο έλεγχος του προηγουμένου θέματος, αλλά με **σ άγνωστη.**.

16	18	22	20	21	20	16	22	25

Η μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με N(24,σ^2:άγνωστη))

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_o : \mu = 22$

εναλλακτικά με την $H_1 : \mu \neq 22$

Παράδειγμα 2

Η τιμή της διασπορά σ^2 είναι άγνωστη και αντικαθίσταται από μια εκτίμηση που μπορεί είναι η δειγματική τυπική απόκλιση s που δίνεται από τον τύπο

Υπολογίζω: $\bar{x} = 20$ $\quad s = 2.96$ $\quad s_{\bar{X}} = 1$

Πλέον αντί για κανονική κατανομή η τροποποιημένη μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Student με 10-1 βαθμούς ελευθερίας

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{20 - 22}{0,986} = -2,03$$

$t_{8,\ 0.975} = 2.306.$

Κατά συνέπεια η τιμή $T_0 = -2.03$ βρίσκεται στην περιοχή μη απόρριψης.

Έλεγχος για την διαφορά 2 Μέσων Όρων ενός πληθυσμού: σ_1^2-σ_2^2 γνωστές

Ο συγκεκριμένος έλεγχος βασίζεται στο κριτήριο

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{v_1} + \frac{\sigma_2^2}{v_2}}} \sim N(0,1)$$

ΔΗΛΑΔΗ

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left((\mu_1 - \mu_2), \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m} \right)$$

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_a: \mu_1 < \mu_2$$

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_a: \mu_1 > \mu_2$$

$$C = (-\infty, -Z_{1-a}], Z \leq -Z_{1-a}$$

$$C = (-\infty, -Z_{1-a}] U [Z_{1-a}, +\infty), |Z| \geq Z_{1-a}$$

$$C = [Z_{1-a}, +\infty), Z \geq Z_{1-a}$$

Έλεγχος για την διαφορά 2 Μέσων Όρων ενός πληθυσμού:$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ άγνωστη

Όταν οι διασπορές είναι άγνωστες με την προϋπόθεση ότι είναι ίσες. Χρησιμοποιείται η συνηθισμένη από κοινού εκτιμήτρια s όπου ο συντελεστής t προκύπτει από την κατανομή t με v_1+v_2-2 β.ε

$$s_p^{\,2} = \frac{(n-1)S_1^{\,2}+(m-1)S_2^{\,2}}{v_1-v_2-2}$$

Ο συγκεκριμένος έλεγχος βασίζεται στο κριτήριο

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}} \sim t_{v_1+v_2-2}$$

Έλεγχος για την διαφορά 2 Μέσων Όρων ενός πληθυσμού:$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ άγνωστη

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_\alpha: \mu_1 > \mu_2$$
$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_\alpha: \mu_1 \neq \mu_2$$
$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_\alpha: \mu_1 < \mu_2$$

$$C = \left[t_{v_1+v_2-2,1-\alpha}, +\infty\right), t \geq t_{v_1+v_2-2,1-\alpha}$$
$$C = \left(-\infty, -t_{v_1+v_2-2,1-\alpha/2}\right] \cup \left[t_{v_1+v_2-2,1-\alpha/2}, +\infty\right), |t| \geq t_{v_1+v_2-2,1-\alpha/2}$$
$$C = \left(-\infty, -t_{v_1+v_2-2,1-\alpha}\right], t \leq -t_{v_1+v_2-2,1-\alpha}$$

Παράδειγμα 3

Ο μέσος χρόνος για την πραγματοποίηση της διπλωματικής εργασίας 50 φοιτητών από το σύνολο των εγγεγραμμένων φοιτητών του τμήματος ΤΔΕ με τυπική απόκλιση 15 ώρες, βρέθηκε ίσος με 130 ώρες εργασίας. Από ένα δεύτερο δείγμα 40 φοιτητών από το σύνολο των εγγεγραμμένων φοιτητών του τμήματος Οικονομικών με τυπική απόκλιση 12 ώρες προέκυψε ότι ο μέσος χρόνος που χρειάζονται είναι 120 ώρες εργασίας. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο μέσος χρόνος ωρών εργασίας και στα δύο τμήματα είναι ίδιος.

ΛΥΣΗ

Έχουμε δύο πληθυσμούς, έναν από το τμήμα ΤΔΕ και έναν από το τμήμα Οικονομικών

Παίρνουμε ένα δείγμα από τον πρώτο πληθυσμό με μέση τιμή $\mu_1=130$ και τυπική απόκλιση $\sigma_1=15$ και $\nu_1=50$.

Το δείγμα από τον δεύτερο πληθυσμό έχει $\mu_2=120$ και $\sigma_2=12$ και $\nu_2=40$.

Παράδειγμα 3

Θα ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση
H_o: Δεν υπάρχει διαφορά στη μέση τιμή των δύο δειγμάτων δηλαδή $\mu_1=\mu_2$

έναντι της εναλλακτικής

H1: Υπάρχει διαφορά στη μέση τιμή των δύο δειγμάτων δηλαδή $\mu_1 \neq \mu_2$

$$Z = \frac{(\mu_1 - \mu_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(130 - 120) - 0}{\sqrt{\frac{15^2}{50} + \frac{12^2}{40}}} = \frac{10}{\sqrt{\frac{225}{50} + \frac{144}{40}}} \sim 3$$

Επειδή η τιμή του Z είναι μεγαλύτερη από 1.65 απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση

Παράδειγμα 3 … συνέχεια, διακυμάνσεις άγνωστες

Οι δειγματικές διακυμάνσεις είναι 49 και 39 αντίστοιχα

Η από κοινού εκτίμηση της τυπικής απόκλισης θα είναι

$$S_p^2 = \sqrt{\frac{(n1-1)s_1^2 + (n2-1)s_2^2}{n1+n2-2}} = \sqrt{\frac{(50-1)49 + (40-1)39}{50+40-2}} = 189{,}1$$

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\left(130 - 120\right)}{13.7\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{40}}} = \frac{10}{2.9} \sim 3.44$$

t_{88} με α=0.05 =2 άρα σε ε.σ. η Ho απορρίπτεται

Έλεγχος για Ζευγαρωτές Παρατηρήσεις

- Η ανάλυση αυτή διαφέρει από την αντίστοιχη ανάλυση των ανεξάρτητων δειγμάτων
- Η διαδικασία είναι
  - Υπολογίζω την διαφορά $d_i=x_{1i}-x_{2i}$
  - Εκτελείται έλεγχος για τις διαφορές
- Το κριτήριο του ελέγχου είναι

$$\frac{\bar{D}-\mu_d}{s_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$\bar{D}$: ο μεσος ορος των διαφορων

s_d : η τυπικη τους αποκλιση

$$H_0 : \mu_D = 0$$

$$H_1 : \mu_D < 0 \qquad H_1 : \mu_D \neq 0 \qquad H_1 : \mu_D > 0$$

$$T_0 = \frac{\bar{D}}{s_{\bar{D}}} < -t_{\nu,\,1-\alpha} \qquad T_0 = \frac{\bar{D}}{s_{\bar{D}}} < -t_{\nu,\,1-\alpha/2} \qquad T_0 = \frac{\bar{D}}{s_{\bar{D}}} > t_{\nu,\,1-\alpha/2}$$

$$T_0 = \frac{\bar{D}}{s_{\bar{D}}} > t_{\nu,\,1-\alpha/2}$$

Παράδειγμα 4

Η μέγιστη ταχύτητα 10 αυτοκινήτων με και χωρίς τη χρήση κάποιου νέου συστατικού στη βενζίνη φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Χωρίς	205	193	191	197	209	206	211	181	201	202
Με	208	196	195	197	208	209	214	183	202	206

Να ελεγχθεί αν υπάρχει αλλαγή στη λειτουργία των αυτοκινήτων.

Ο έλεγχος που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε είναι Ho: $\bar{d}=0$
έναντι της εναλλακτικής H1: $\bar{d} \neq 0$

Χωρίς	205	193	191	197	209	206	211	181	201	202
Με	208	196	195	197	208	209	214	183	202	206
Διαφορά di	-3	-3	-4	0	1	-3	-3	-2	-1	-4

Η μέση τιμή των διαφορών είναι -22/10=-2 και η τυπική τους απόκλιση θα είναι s=5,09. Άρα έχουμε

$$\frac{\bar{d}}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.2}{5.09/\sqrt{10}} = 1.36$$

Η τιμή αυτή συγκρίνεται με τις κρίσιμες τιμές της Student κατανομής με 9 βαθμούς ελευθερίας, όπου για α=0.05 t=2.262, δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

…και ορισμένα ακόμη παραδείγματα

Παράδειγμα 5

Ένας εργαζόμενος ακολουθεί καθημερινά μια συγκεκριμένη διαδρομή A για να πάει στη δουλειά του. Το τελευταίο διάστημα, λόγω έργων που εκτελούνται, διαπίστωσε ότι η συγκεκριμένη διαδρομή έχει πολύ κίνηση και βρήκε και μια δεύτερη διαδρομή B την οποία θεωρεί συντομότερη. Προκειμένου να διαπιστώσει ότι αυτό ευσταθεί έκανε το εξής πείραμα. Για δύο διαδοχικές εβδομάδες που είχαν τις ίδιες κυκλοφοριακές συνθήκες, ακολούθησε την πρώτη εβδομάδα τη διαδρομή A, τη δεύτερη εβδομάδα τη διαδρομή B και κατέγραψε τους αντίστοιχους χρόνους διαδρομής (σε λεπτά), όπως φαίνονται στον πίνακα 1.

Με βάση τα στοιχεία, να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 εάν θα πρέπει να αλλάξει διαδρομή.

Διαδρομή	1η ημέρα	2η ημέρα	3η ημέρα	4η ημέρα	5η ημέρα	6η ημέρα
A	35	30	28	29	30	35
B	34	31	30	30	30	33

Παράδειγμα 5

Έλεγχος Υποθέσεων για διαφορά μέσων – δεδομένα σε μορφή ζευγών

$$H_0 : \mu_D = 0$$

Έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \mu_D > 0$$

Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$

Για τον έλεγχο αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα1: Προσδιορισμός Συνάρτησης και Κριτηρίου Ελέγχου

Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου $T_0 = \dfrac{\bar{D}}{S_D / \sqrt{n}}$

Κριτήριο Ελέγχου

Απορρίπτουμε την H_0 αν $T_0 > t_{v,1-\alpha}$, διαφορετικά Αποδεχόμαστε την H_0

Βήμα 2: Υπολογισμός των T_o, $t_{v,1-\alpha}$

Παράδειγμα 5

	$1^η$ ημέρα	$2^η$ ημέρα	$3^η$ ημέρα	$4^η$ ημέρα	$5^η$ ημέρα	$6^η$ ημέρα	
A	35	30	28	29	30	35	
B	34	31	30	30	30	33	
D	1	-1	-2	-1	0	2	**-0,167**
Di-Dmes	1,167	-0,833	-1,833	-0,833	0,167	2,167	
Sqr (Di-Dm	1,361	0,694	3,361	0,694	0,028	4,694	**10,833**
							2,167
					Sd		1,472

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{1+(-1)+(-2)+(-1)+0+2}{6} = \frac{-1}{6} = -0.167$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - D)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{10.833}{5}} = 1.472$$

$$T_0 = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{-0.167}{1.472/\sqrt{6}} = \frac{-0.167}{0.60} = -0.278$$

Δίνεται ότι: $\alpha=0.05 \rightarrow 1-\alpha=0.095 \rightarrow t_{v,1-\alpha} = t_{5,0,95} = 2{,}015$

Βήμα 3: Έλεγχος / Συμπέρασμα

Αφού $T_o=-0{,}278 < t_{5,0,95} = 2{,}015$ Δέχομαι την Ho. Δηλαδή οι δύο διαδρομές δίνουν τους ίδιους χρόνους.

Παράδειγμα 6

Ο καθηγητής Οικονομικών ενός Πανεπιστημίου διδάσκει το μάθημα Εισαγωγή στην Οικονομική σε δύο διαφορετικά τμήματα του Πανεπιστημίου του. Στην τελευταία εξεταστική περίοδο συμμετείχαν 16 φοιτητές του πρώτου τμήματος και 25 του δεύτερου. Ο πίνακας 4 περιέχει τη βαθμολογία των φοιτητών του πρώτου τμήματος.

Βαθμολογία Φοιτητών Πρώτου Τμήματος	10	6	3	2	2	5	8	9	2	1	4	7	6	5	2	4

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία των φοιτητών του δεύτερου Τμήματος ήταν 5,24 μονάδες και η τυπική απόκλιση 2,88 μονάδες.

Με βάση τα στοιχεία αυτά και αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η βαθμολογία των φοιτητών των δύο τμημάτων ακολουθεί κανονική κατανομή:

α. Μπορούμε, σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05, να ισχυριστούμε ότι η διασπορά των βαθμολογιών των φοιτητών της ομάδας Β είναι μεγαλύτερη από αυτή των φοιτητών της ομάδας Α;

β. Ποια θα πρέπει να είναι η τυπική απόκλιση των βαθμολογιών των φοιτητών του πρώτου τμήματος προκειμένου να ανατραπεί το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε στο ερώτημα α; (Σημειώνεται ότι η μέση βαθμολογία και η τυπική απόκλιση για το δεύτερο τμήμα παραμένει αμετάβλητη).

Παράδειγμα 6

	Τμήμα A	Xi-Xmes	sqr(Xi-Xmes)		Τμήμα B	Xi-Xmes	sqr(Xi-Xmes)
1	10	5,25	27,56		5	-0,24	0,06
2	6	1,25	1,56		8	2,76	7,62
3	3	-1,75	3,06		7	1,76	3,10
4	2	-2,75	7,56		4	-1,24	1,54
5	2	-2,75	7,56		2	-3,24	10,50
6	5	0,25	0,06		1	-4,24	17,98
7	8	3,25	10,56		1	-4,24	17,98
8	9	4,25	18,06		5	-0,24	0,06
9	2	-2,75	7,56		3	-2,24	5,02
10	1	-3,75	14,06		6	0,76	0,58
11	4	-0,75	0,56		8	2,76	7,62
12	7	2,25	5,06		9	3,76	14,14
13	6	1,25	1,56		10	4,76	22,66
14	5	0,25	0,06		5	-0,24	0,06
15	2	-2,75	7,56		4	-1,24	1,54
16	4	-0,75	0,56		6	0,76	0,58
17					3	-2,24	5,02
18					7	1,76	3,10
19					8	2,76	7,62
20					10	4,76	22,66
21					9	3,76	14,14
22					2	-3,24	10,50
23					1	-4,24	17,98
24					4	-1,24	1,54
25					3	-2,24	5,02
Sum	**76,00**		**113,00**		**131,00**		**198,56**
Average	**4,75**				**5,24**		
STV	**2,74**				**2,88**		
Var	**7,53**				**8,27**		

Παράδειγμα 6

Ερώτημα α

<u>Υποθέσεις</u>

H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

<u>Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου</u>

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \; , \quad F_0 \sim F_{n_1-1,\, n_2-1}$$

<u>Κριτήριο Απόρριψης</u>

Απορρίπτουμε την H_0 αν $F_0 < F_{n_1-1, n_2-1, \alpha} \equiv 1/F_{n_2-1, n_1-1, 1-\alpha}$

Παράδειγμα 6

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{2,74^2}{2,88^2} = \frac{7,53}{8,27} = 0,91$$

$$F_{n_1-1,n_2-1,\alpha} = F_{15,24,0.05} \equiv 1/F_{24,15,0.95} = 2.288$$

Επομένως αφού $F_0 = 0,91 < 2,288$ απορρίπτουμε την H_0, δηλαδή η διασπορά των βαθμολογιών των φοιτητών της ομάδας Β είναι μεγαλύτερη από αυτή των φοιτητών της ομάδας Α.

Παράδειγμα 6

Ερώτημα β

Για να ανατραπεί το προηγούμενο συμπέρασμα θα πρέπει να δεχτούμε την Ho δηλαδή θα πρέπει το Fo να είναι τουλάχιστον ίσο (ή μεγαλύτερο) από το $F_{24,15,0.95} = 2.288$

$$F_o \geq 2.288 \rightarrow \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 2.288 \rightarrow \frac{S_1^2}{8.27} = \geq 2.288 \rightarrow S_1^2 \geq 18.92$$

Άρα $S_1 \geq 4.35$

για να ανατραπεί το προηγούμενο συμπέρασμα, δηλαδή για να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στη διασπορά των βαθμολογιών των φοιτητών των δύο τμημάτων θα πρέπει η δειγματική απόκλιση των φοιτητών του τμήματος Α να είναι τουλάχιστον 4,35 μονάδες.

Παράδειγμα 7

Ένας εργαζόμενος ακολουθεί καθημερινά μια συγκεκριμένη διαδρομή Α για να πάει στη δουλειά του. Το τελευταίο διάστημα, λόγω έργων που εκτελούνται, διαπίστωσε ότι η συγκεκριμένη διαδρομή έχει πολύ κίνηση και βρήκε και μια δεύτερη διαδρομή Β την οποία θεωρεί συντομότερη. Προκειμένου να διαπιστώσει ότι αυτό ευσταθεί έκανε το εξής πείραμα. Για δύο διαδοχικές εβδομάδες που είχαν τις ίδιες κυκλοφοριακές συνθήκες, ακολούθησε την πρώτη εβδομάδα τη διαδρομή Α, τη δεύτερη εβδομάδα τη διαδρομή Β και κατέγραψε τους αντίστοιχους χρόνους διαδρομής (σε λεπτά), όπως φαίνονται στον πίνακα 1.

Με βάση τα στοιχεία, να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $a=0,05$ εάν θα πρέπει να αλλάξει διαδρομή.

Διαδρομή	1η ημέρα	2η ημέρα	3η ημέρα	4η ημέρα	5η ημέρα	6η ημέρα
Α	35	30	28	29	30	35
Β	34	31	30	30	30	33

Παράδειγμα 7

Έλεγχος Υποθέσεων για διαφορά μέσων – δεδομένα σε μορφή ζευγών

$$H_0 : \mu_D = 0$$

Έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \mu_D > 0$$

Σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05

Για τον έλεγχο αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα1: Προσδιορισμός Συνάρτησης και Κριτηρίου Ελέγχου

Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου $T_0 = \dfrac{\bar{D}}{S_D / \sqrt{n}}$

Κριτήριο Ελέγχου

Απορρίπτουμε την H_0 αν $T_0 > t_{v,1-\alpha}$, διαφορετικά Αποδεχόμαστε την H_0

Βήμα 2: Υπολογισμός των T_o, $t_{v,1-\alpha}$

Παράδειγμα 7

	$1^η$ ημέρα	$2^η$ ημέρα	$3^η$ ημέρα	$4^η$ ημέρα	$5^η$ ημέρα	$6^η$ ημέρα	
A	35	30	28	29	30	35	
B	34	31	30	30	30	33	
D	1	-1	-2	-1	0	2	**-0,167**
Di-Dmes	1,167	-0,833	-1,833	-0,833	0,167	2,167	
Sqr (Di-Dm	1,361	0,694	3,361	0,694	0,028	4,694	**10,833**

2,167

Sd 1,472

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{1+(-1)+(-2)+(-1)+0+2}{6} = \frac{-1}{6} = -0.167$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - D)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{10.833}{5}} = 1.472$$

$$T_0 = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{-0.167}{1.472/\sqrt{6}} = \frac{-0.167}{0.60} = -0.278$$

Δίνεται ότι: α=0.05→1 -α =0.095→ $t_{v,1-\alpha}$ = $t_{5,0,95}$ =2,015

Βήμα 3: Έλεγχος / Συμπέρασμα

Αφού T_o=-0,278 < $t_{5,0,95}$ =2,015 Δέχομαι την Ho. Δηλαδή οι δύο διαδρομές δίνουν τους ίδιους χρόνους.