ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΜΑΡΙΑ ΚΟΛΤΣΑΚΗ (mkoltsaki@aegean.gr)

UNIVERSITY OF THE AEGEAN

01

ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

$$\boxed{y=\alpha x+\beta}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

Γραμμική Συνάρτηση, όπου x και y → Μεταβλητές,
α → Συντελεστής του x,
β → Σταθερά

ΠΩΣ ΛΥΝΟΥΜΕ ΩΣ ΠΡΟΣ x;

$$y=\alpha x+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha} x=y-\beta \Rightarrow \boxed{x=\frac{y-\beta}{\alpha}}$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

$\boxed{y=\alpha x+\beta}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

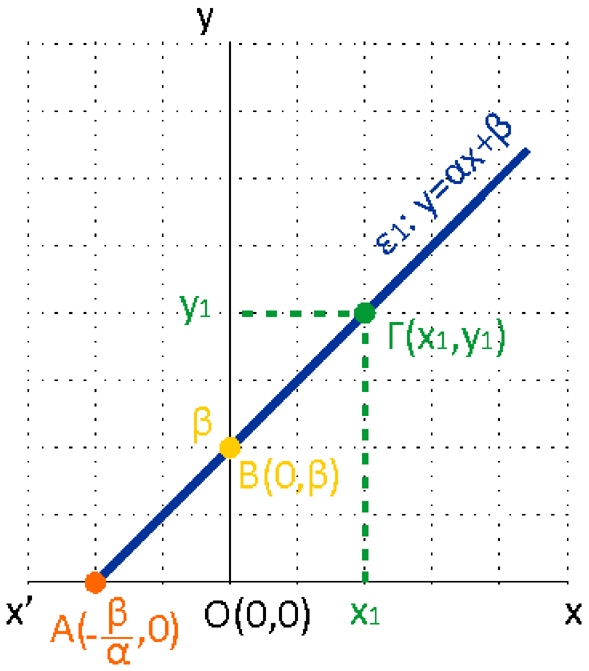
1. Ορίζω 2 σημεία στο σύστημα αξόνων λύνοντας την εξίσωση για x=0 και για y=0

Για y=0 → $0=\alpha x+\beta \Rightarrow \alpha x=-\beta \Rightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

άρα **$A(-\frac{\beta}{\alpha},0)$**

Για x=0 → $y=0x+\beta \Rightarrow y=\beta$ άρα **$B(0,\beta)$**

2. Ενώνω τα 2 σημεία και παίρνω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης



02

ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ → **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

1. **Μεταβλητές**
2. **Συνάρτηση**
3. **Περιορισμοί**

ΕΙΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

- **Μεγιστοποίηση → max ΚΕΡΔΟΣ**
- **Ελαχιστοποίηση → min ΚΟΣΤΟΣ**

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ Μ.Γ.Π.

01 → 02 → 03 → 04 → 05

01 Αναγνωρίζω το είδος του προβλήματος **(max/min)**

02 Ορίζω τις **μεταβλητές**

03 Καταγράφω την **αντικειμενική συνάρτηση** (εξίσωση)

04 Ορίζω τους **περιορισμούς** (ανισότητες)

05 Θεωρώ τους περιορισμούς ως **εξισώσεις**

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ Μ.Γ.Π.

06

Λύνω κάθε εξίσωση για **x=0 και y=0** και παίρνω 2 ζεύγη τιμών για κάθε εξίσωση

07

Κάθε ζευγάρι τιμών εκφράζει τις συντεταγμένες ενός σημείου. Σημειώνω τα **σημεία στο Σ.Σ**.

08

Ενώνω τα σημεία κάθε εξίσωσης και ορίζω την κάθε **ευθεία**

09

Ορίζω τα **ημιεπίπεδα** όπου επαληθεύεται η κάθε ανισότητα

10

Σημειώνω την περιοχή που **συναληθεύουν** όλοι οι περιορισμοί

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Γ.Π.

Η τομή των επιπέδων που σχηματίζουν οι περιορισμοί ορίζει μια περιοχή (κλειστή ή μη) όπου όλα τα σημεία δίνουν λύσεις στην αντικειμενική συνάρτηση → Αυτή η περιοχή ονομάζεται ΕΦΙΚΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ και οριοθετείται από ένα ανοιχτό ή κλειστό πολύγωνο

<u>ΚΑΠΟΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΚΟΡΥΦΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ</u>

και οι συντεταγμένες της κορυφής αυτής δίνουν τις βέλτιστες τιμές στις μεταβλητές και άρα και στην αντικειμενική συνάρτηση

Πως βρίσκω το ημιεπίπεδο που επαληθεύεται η κάθε ανισότητα;

1. Παίρνω ένα **τυχαίο σημείο** -συνήθως την αρχή των αξόνων O(0,0)
2. Αντικαθιστώ στην ανισότητα όπου x, y τις συντεταγμένες του σημείου. Για το σημείο O $\rightarrow$ x=0 και y=0 και **λύνω την ανισότητα**
3. Ελέγχω **αν ισχύει** ή όχι η ανισότητα και βρίσκω την εφικτή περιοχή

Αν ισχύει, το ζητούμενο ημιεπίπεδο είναι αυτό που περιέχει το σημείο

Αν ΔΕΝ ισχύει, το ζητούμενο ημιεπίπεδο είναι το συμπληρωματικό του.

Παράδειγμα 1

Έστω ο παρακάτω περιορισμός:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16$$

<u>Για να βρω την ευθεία στο σ.σ.</u> →

Έστω $2x_1 + 4x_2 = 16$

Για $x_1=0$ → $4x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = 4$ → A(0,4)

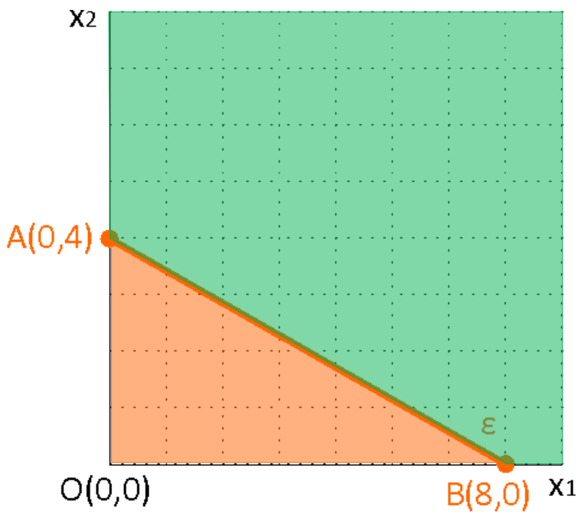
Για $x_2=0$ → $2x_1 = 16 \Rightarrow x_1 = 8$ → B(8,0)

<u>Για να βρω την εφικτή περιοχή</u> →

Έστω ότι το σημείο O(0,0) ανήκει στην εφικτή περιοχή, τότε:

Για $x_1=0$ και $x_2=0$ → $0 \leq 16$ ΙΣΧΥΕΙ

Αν ο περιορισμός ήταν $2x_1 + 4x_2 \geq 16$, τότε η εφικτή περιοχή θα ήταν η πράσινη



Βέλτιστη Λύση

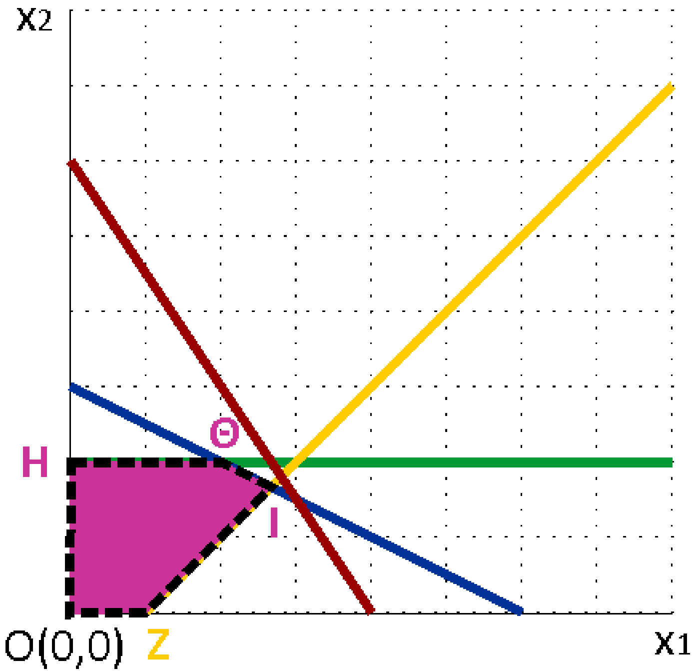
Το πολύγωνο ΟΗΘΙΖΟ περιέχει όλες τις εφικτές λύσεις του προβλήματος, δλδ τις ποσότητες x_1, x_2 που δίνουν στην επιχείρηση κέρδος.

Ποιο είναι όμως το σημείο όπου η επιχείρηση βγάζει το μεγαλύτερο κέρδος;

Η λύση βρίσκεται σε κάποια από τις **κορυφές του πολυγώνου** (δλδ το μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται σε κάποιο από τα σημεία Η, Θ, Ι, Ζ, Ο) και ο προσδιορισμός της γίνεται :

α. Με τη χρήση **ισοσταθμικών**,

β. Με τις **συντεταγμένες** των κορυφών



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ **ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ**

1. Δίνω μια τυχαία τιμή στο z
2. Λύνω την εξίσωση για $x_1=0$ και $x_2=0$
3. Σημειώνω τα σημεία στο Σ.Σ. και ορίζω την ευθεία
4. Μετακινώ παράλληλα την ευθεία μέχρι την τελευταία κορυφή της εφικτής περιοχής
5. Λύνω το σύστημα εξισώσεων των περιορισμών που δημιουργούν αυτή την κορυφή
6. Τα x_1, x_2 που βρίσκω τα αντικαθιστώ στην αντικειμενική συνάρτηση και βρίσκω τη βέλτιστη λύση

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ **ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΟΡΥΦΩΝ**

1. Λύνω το σύστημα εξισώσεων των περιορισμών που ορίζουν την κάθε κορυφή
2. Τα x_1, x_2 που βρίσκω για κάθε κορυφή τα αντικαθιστώ στην αντικειμενική συνάρτηση και βρίσκω το κέρδος σε κάθε κορυφή
3. Δημιουργώ ένα πίνακα με τις συντεταγμένες των κορυφών και τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης σε όλες τις κορυφές
4. Το σημείο που εμφανίζει το μεγαλύτερο κέρδος (ή το ελάχιστο κόστος) είναι η βέλτιστη λύση

03

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια βιομηχανία παράγει δύο είδη χρωμάτων Χ1 και Χ2, για εξωτερικούς και εσωτερικούς χώρους. Για τη βελτίωση της υφής του χρώματος και της επιμήκυνσης του χρόνου ζωής του προστίθενται στο χρώμα δύο νέα υλικά Μ1 και Μ2. Οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών Μ1 και Μ2 (σε κιλά) ανά τόνο χρώματος Χ1 και Χ2, η μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητά τους (σε κιλά) και το κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός τόνου χρώματος φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Είδη Χρωμάτων		Μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητα σε κιλά
	Χ1	Χ2	
Πρώτες Ύλες (σε κιλά)			
Μ1	6	4	24
Μ2	1	2	6
Κέρδος ανά τόνο	5	4	

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ιστορικά στατιστικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία δείχνουν ότι η ημερήσια ζήτηση για το χρώμα εσωτερικού χώρου (X2) δεν μπορεί να υπερβαίνει την αντίστοιχη ζήτηση για το χρώμα εξωτερικού χώρου (X1) περισσότερο από ένα τόνο, ενώ η ημερήσια ζήτηση για χρώμα εσωτερικού χώρου (X2) δεν μπορεί να υπερβαίνει τους δύο τόνους.

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

1. να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό τόνων που πρέπει να πωληθούν από τον κάθε τύπο χρώματος X1 και X2 προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το ημερήσιο κέρδος της εταιρείας.
2. να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος
3. αν η διαθέσιμη ποσότητα (σε κιλά) της πρώτης ύλης M2 μειωθεί κατά 25%, το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής του προβλήματος θα αλλάξει; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας

01

02

03

04

01 → Είναι πρόβλημα **Μεγιστοποίησης**

02 → Έστω οι **Μεταβλητές**:

x_1 η ποσότητα παραγωγής του χρώματος 1

x_2 η ποσότητα παραγωγής του χρώματος 2

03 → Η επιχείρηση κερδίζει συνολικά από την πώληση του Χ1 ΣΥΝ από την πώληση του Χ2.

Από το Χ1 κερδίζει 5 μονάδες ΕΠΙ την ποσότητα x_1, δλδ $5x_1$. Από το Χ2 κερδίζει 4 μονάδες ΕΠΙ την ποσότητα x_2, δλδ $4x_2$. Άρα, το συνολικό κέρδος υπολογίζεται από τη συνάρτηση $\boxed{z = 5x_1 + 4x_2}$

04 → Από το Μ1 η επιχείρηση διαθέτει 24 μονάδες και σε κάθε παραγωγή προσθέτει 6 μονάδες στην ποσότητα x_1 και 4 μονάδες στην ποσότητα x_2 → Άρα χρησιμοποιεί $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (1)

04

04 → Από το Μ2 διαθέτει 6 μονάδες και σε κάθε παραγωγή προσθέτει 1 μονάδα στην ποσότητα παραγωγής του χρώματος 1 και 2 μονάδες στην ποσότητα παραγωγής του χρώματος 2

Άρα χρησιμοποιεί $\mathbf{x_1 + 2x_2 \le 6}$ (2)

Η ζήτηση του x_2 δεν μπορεί να υπερβαίνει (δλδ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη) τη ζήτηση του x_1 περισσότερο από 1 μονάδα → Το max που μπορεί να συμβεί είναι η ζήτηση του x_2 να είναι ίση με x_1+1 Άρα $x_2 \le x_1+1 \Rightarrow \mathbf{x_2 - x_1 \le 1}$ (3)

Η ζήτηση του x_2 δεν μπορεί να υπερβαίνει (δλδ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη) τους 2 τόνους → Το max που μπορεί να συμβεί είναι η ζήτηση του x_2 να είναι ίση με 2 → Άρα $\mathbf{x_2 \le 2}$ (4)

Και φυσικά οι ποσότητες από τα χρώματα δεν είναι δυνατόν να είναι αρνητικές → Άρα $\mathbf{x_1, x_2 \ge 0}$ → Επιλύουμε γραφικά στο 1º τεταρτημόριο

Από περιορισμό (1) $\boxed{6x_1+4x_2 = 24}$

Για $x_1=0$ → $0 + 4x_2 = 24 \Rightarrow 4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 6$ → άρα Α(x1, x2), δλδ **Α(0, 6)**

Για $x_2=0$ → $6x_1 + 0 = 24 \Rightarrow 6x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 4$ → άρα **Β(4, 0)**

06

Από περιορισμό (2) $\boxed{x_1 + 2x_2 = 6}$

Για $x_1=0$ → $0 + 2x_2 = 6 \Rightarrow 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$ → άρα **Γ(0, 3)**

Για $x_2=0$ → $x_1 + 0 = 6 \Rightarrow x_1 = 6$ → άρα **Δ(6, 0)**

07

Από περιορισμό (3) $\boxed{x_2 - x_1 = 1}$

Για $x_1=0 \rightarrow x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \rightarrow$ άρα **Ε(0, 1)**

Για $x_2=0 \rightarrow 0 - x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \rightarrow$ άρα **Ζ(-1, 0)** ★

Από περιορισμό (4) $\boxed{x_2 = 2}$

Περιορισμός (5) $\boxed{x_1, x_2 \geq 0}$

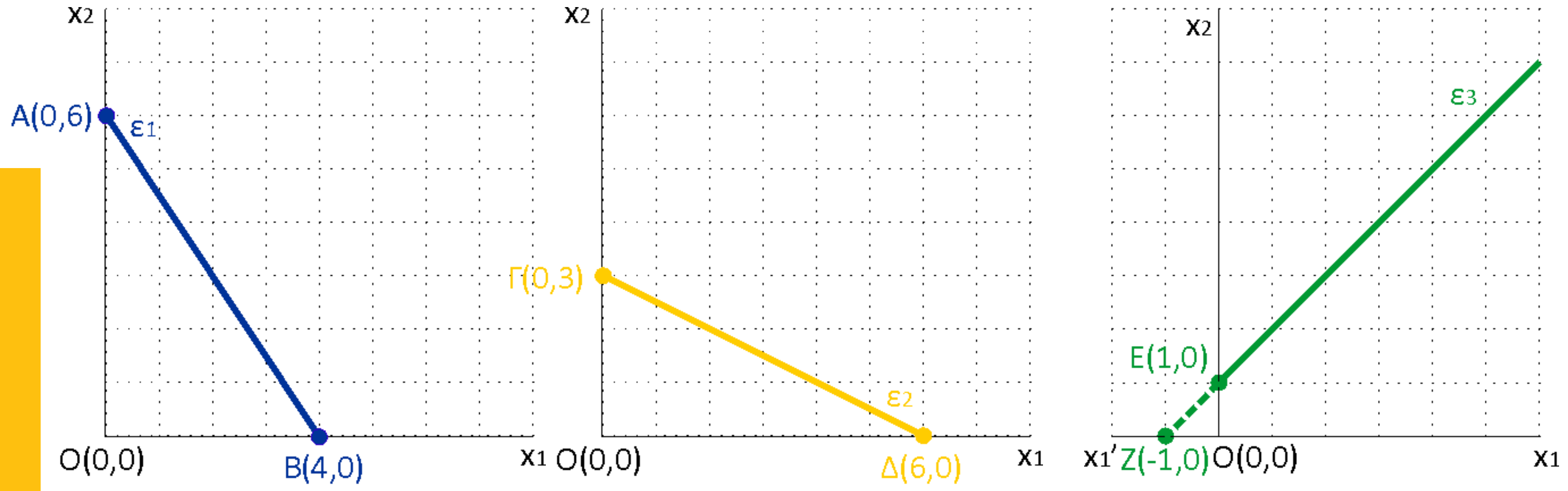
06

07

Από τα σημεία **A(0, 6)** και **B(4, 0)** παίρνουμε την ευθεία **ε_1: $6x_1 + 4x_2 = 24$**

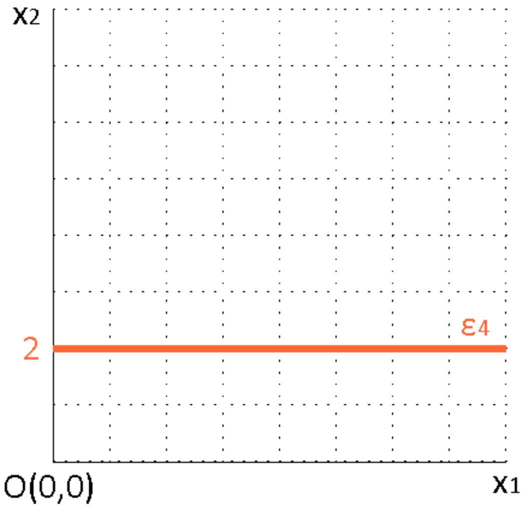
Από τα σημεία **Γ(0, 3)** και **Δ(6, 0)** παίρνουμε την ευθεία **ε_2: $x_1 + 2x_2 = 6$**

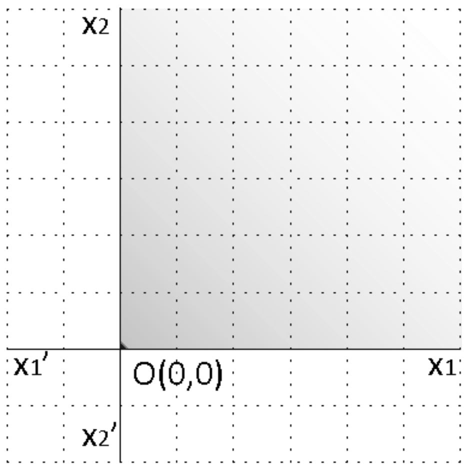
Από τα σημεία **Ε(0, 1)** και **Ζ(-1, 0)** παίρνουμε την ευθεία **ε_3: $x_2 - x_1 = 1$**



Από τους περιορισμούς (4) και (5) $x_2=2$ και $x_1, x_2 \geq 0$ έχουμε τα εξής:

08





09

Περιορισμός (1) : $6x_1+4x_2 \leq 24$ Για $x_1, x_2 = 0 \rightarrow 0 + 0 \leq 24$ <u>ΙΣΧΥΕΙ</u>

Άρα η εφικτή περιοχή είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

Περιορισμός (2) : $x_1+2x_2 \leq 6$ Για $x_1, x_2 = 0 \rightarrow 0 + 0 \leq 6$ <u>ΙΣΧΥΕΙ</u>

Άρα η εφικτή περιοχή είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

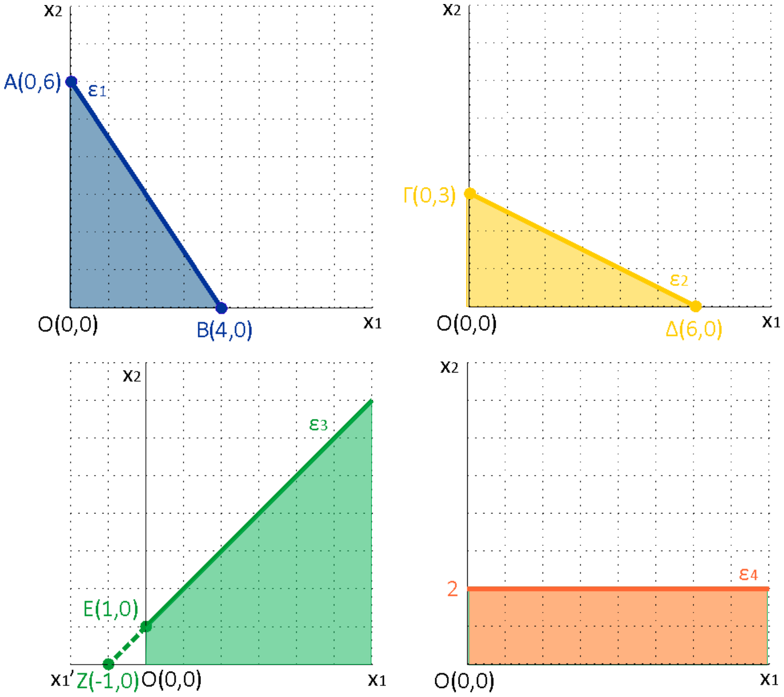
Περιορισμός (3) : $x_2-x_1 \leq 1$ Για $x_1, x_2 = 0 \rightarrow 0 - 0 \leq 1$ <u>ΙΣΧΥΕΙ</u>

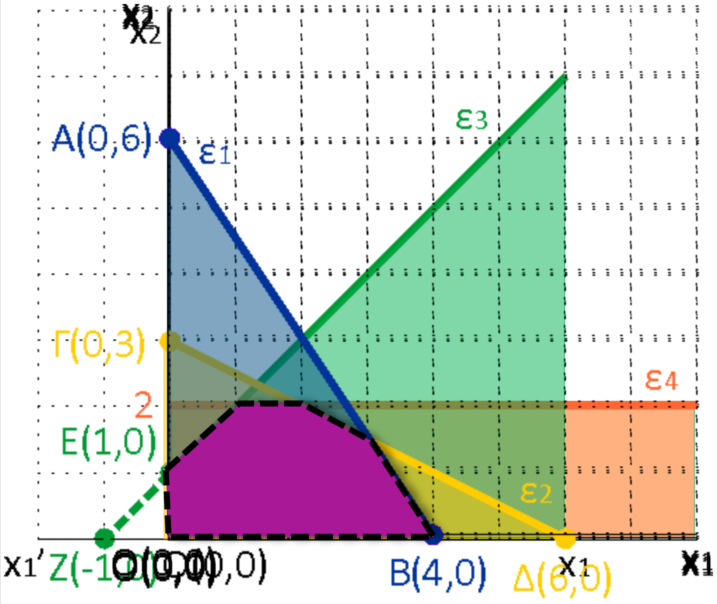
Άρα η εφικτή περιοχή είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

Περιορισμός (4) : $x_2 \leq 2$ Για $x_2 = 0 \rightarrow 0 \leq 2$ <u>ΙΣΧΥΕΙ</u>

Άρα η εφικτή περιοχή είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

Συναλήθευση Περιορισμών





Βέλτιστη Λύση

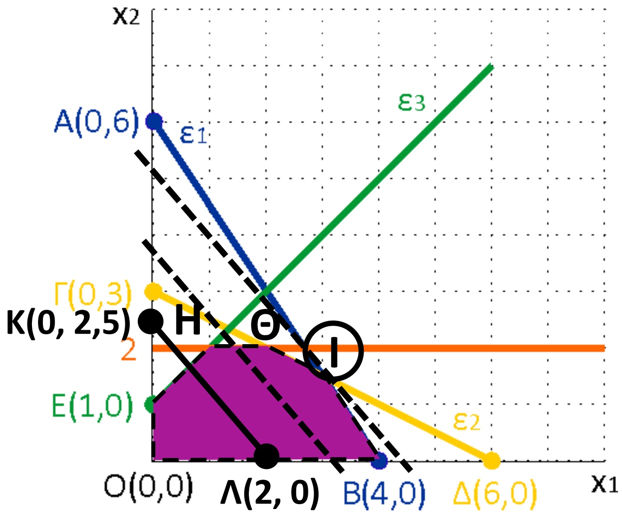
Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε μία από τις κορυφές του πολυγώνου ΟΕΗΘΙΒΟ, δλδ είναι ένα από τα σημεία Ο, Ε, Η, Θ, Ι, Β

<u>Επίλυση με ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ</u>

Έστω z=10 → $5x_1 + 4x_2 = 10$

Για $x_1=0$ → $0 + 4x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 2,5$ →
Άρα **Κ(0, 2,5)**

Για $x_2=0$ → $5x_1 + 0 = 10 \Rightarrow x_1 = 2$ →
Άρα **Λ(2,0)**



Μεγιστοποίηση Κέρδους

MAX $z = 5x_1+4x_2$

Η βέλτιστη λύση βρίσκεται στην **κορυφή Ι**, η οποία ορίζεται από τις ε_1 και ε_2

$$\mathbf{6x_1 + 4x_2 = 24 \text{ και } x_1 + 2x_2 = 6}$$

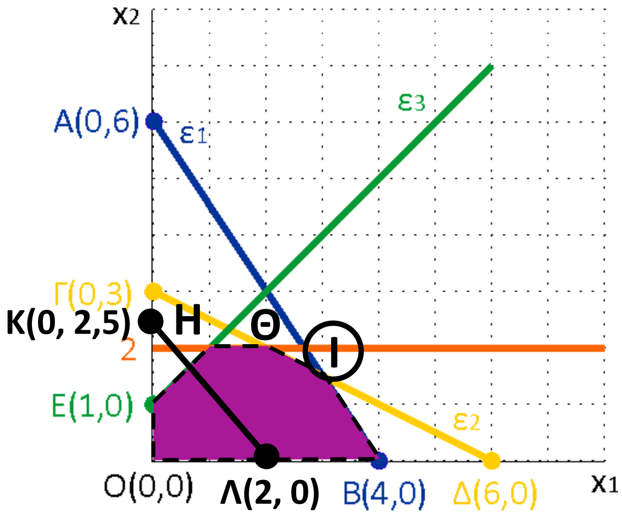
$x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 6 - 2x_2$

$6x_1+4x_2 = 24 \Rightarrow 6(6-2x_2) + 4x_2 = 24 \Rightarrow 36-12x_2+4x_2 = 24 \Rightarrow 8x_2 = 12 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 1,5}$

και $x_1 = 6 - 2\cdot1,5 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 3}$

Για $x_1 = 3$ και $x_2 = 1,5$ (σημείο Ι(3, 1,5))

MAX $z = 5\cdot3 + 4\cdot1,5 = 15 + 6 = 21$



Μεταβολή Περιορισμών (ερώτημα 3)

Το σημείο I(3, 1,5), όπου συμβαίνει η μεγιστοποίηση του κέρδους προκύπτει από την τομή 2 ευθειών: των περιορισμών (1) και (2)

Οποιαδήποτε αλλαγή στους περιορισμούς (1) και (2) μεταβάλλει το σημείο τομής, δλδ τη θέση της κορυφής I και άρα μεταβάλλει και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δλδ το μέγιστο κέρδος. Ο περιορισμός (1) αφορά στη διαθέσιμη ποσότητα του M1 και ο περιορισμός (2) στη διαθέσιμη ποσότητα του M2
Συνεπώς, οποιαδήποτε αλλαγή (αύξηση ή μείωση) στις ποσότητες του M1 ή/και του M2 επηρεάζει το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης.