ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΙΕΡΗΣΕΩΝ

Εργαστήριο
Ποσοτικών Μεθόδων

Σημειώσεις

Επιχειρησιακής Έρευνας

Κεφάλαιο 1

Β.Α. Αγγελής

Χίος, 2008

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό

Σκοπός

Σκοπός του εισαγωγικού αυτού κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των βασικών εννοιών και των πεδίων εφαρμογής της μεθοδολογίας του γραμμικού προγραμματισμού, των κύριων στοιχείων ενός μοντέλου προγραμματισμού και των προϋποθέσεων που πρέπει να πληρούνται ώστε ένα πρόβλημα να μπορεί να διατυπωθεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια, όσα παρουσιάζονται θεωρητικά τίθενται σε εφαρμογή σε δύο συγκεκριμένα προβλήματα, τα οποία διατυπώνονται ως μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού.

Ενότητα 1.1

Ιστορικά στοιχεία

Οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί αντιμετωπίζουν συχνά το πρόβλημα της **λήψης μιας απόφασης** (*decision making*) και ειδικότερα το πρόβλημα λήψης της βέλτιστης επιχειρηματικής απόφασης για την επίτευξη ενός στόχου, με περιορισμούς, ενδογενείς ή εξωγενείς. Στους ενδογενείς περιορισμούς εντάσσονται αυτοί που αφορούν, αφενός, τους διαθέσιμους πόρους της επιχείρησης, όπως το εργατικό δυναμικό, τις πρώτες ύλες και τα κεφάλαια και, αφετέρου, την πολιτική και τον κανονισμό λειτουργίας της. Αντίστοιχα, στους εξωγενείς περιορισμούς περιλαμβάνονται αυτοί που αφορούν τη ζήτηση των προϊόντων ή των υπηρεσιών της επιχείρησης, τον ανταγωνισμό και το θεσμικό πλαίσιο λειτουργίας της.

Η **λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας** (*decision making under uncertainty*) διευκολύνεται και η ποιότητα των αποφάσεων βελτιώνεται με τη χρήση ποσοτικών τεχνικών το σύνολο των οποίων αναφέρεται ως **ποσοτική ανάλυση** (*quantitative analysis*), μέρος της οποίας αποτελεί η **επιχειρησιακή έρευνα** (*operations/operational research).* Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιούν συνήθως **μαθηματικά μοντέλα** *(mathematical models)* για να περιγράψουν και στη συνέχεια να βελτιώσουν τη λειτουργία ενός συστήματος. Με τον όρο **σύστημα** (*system*) εννοούμε ένα σύνολο αλληλεπιδρώντων στοιχείων που συνεργάζονται μεταξύ τους για την επίτευξη ενός κοινού σκοπού. Οι αλληλεπιδράσεις των στοιχείων του συστήματος είναι οι κανόνες που διέπουν τη λειτουργία του. Κάθε επιχείρηση ή οργανισμός μπορεί να θεωρηθεί ένα τέτοιο σύστημα.

Ο **γραμμικός προγραμματισμός** *(linear programming)* είναι μία από τις πιο διαδεδομένες και ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές της **επιχειρησιακής έρευνας**, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί για να βοηθούν τα στελέχη των επιχειρήσεων και των οργανισμών στη λήψη τέτοιων επιχειρηματικών αποφάσεων.

Η μεθοδολογία του γραμμικού προγραμματισμού έχει τις ρίζες της στη θεωρία των γραμμικών ανισώσεων, η μελέτη των οποίων είχε ξεκινήσει το 1826 από τον **Fourier**, αλλά τη βάση της αποτέλεσαν τα θεωρητικά μοντέλα οικονομικής ισορροπίας και βέλτιστης κατανομής πόρων, όπως αυτά του **Von-Neumann** και του **Leontief**, που αναπτύχθηκαν κατά την περίοδο 1930-1940. Πάντως, η συστηματική μελέτη και ανάπτυξη της μεθοδολογίας του γραμμικού προγραμματισμού στη σημερινή της μορφή οφείλονται κατά κύριο λόγο στον **G. Dantzig**, ο οποίος κατά τη δεκαετία του 1940 ήταν επικεφαλής μιας επιστημονικής ομάδας ενταγμένης στην Πολεμική Αεροπορία των ΗΠΑ. Έργο της ομάδας αυτής ήταν η δημιουργία βέλτιστων προγραμμάτων συντήρησης και ανάπτυξης πολεμικού υλικού καθώς και εκπαίδευσης στρατιωτικού προσωπικού. Τα προγράμματα αυτά μπορούσαν να εκφραστούν μαθηματικά με τη βοήθεια συστημάτων γραμμικών σχέσεων, γεγονός στο οποίο οφείλεται και η απόδοση της ονομασίας «γραμμικός προγραμματισμός» στη μεθοδολογία.

Ενότητα 1.2

Εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού

Όπως ήδη αναφέρθηκε ο γραμμικός προγραμματισμός γνωρίζει ευρύτατη χρήση στον τομέα της διοίκησης των επιχειρήσεων. Σε αυτό συντέλεσε η γραμμική δομή που έχουν πολλά από τα προβλήματα στον τομέα αυτόν αλλά και οι αποτελεσματικότατες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυσή τους, ιδιαίτερα μετά τη ραγδαία εξέλιξη των Η/Υ, όταν εκφραστούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

Ορισμένες ενδεικτικές περιπτώσεις προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν με τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού αναφέρονται στη συνέχεια:

- **Πρόβλημα μείγματος προϊόντων** *(product mix problem)*

  Το πρόβλημα αυτό αφορά σε οικονομικές μονάδες που χρησιμοποιούν τους περιορισμένους διαθέσιμους πόρους τους για την παραγωγή δύο τουλάχιστον διαφορετικών προϊόντων. Οι απαιτήσεις των προϊόντων σε πρώτες ύλες αλλά και το μοναδιαίο κέρδος που αποφέρει η πώλησή τους διαφέρουν μεταξύ των δύο προϊόντων. Το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της ποσότητας που πρέπει να παραχθεί από κάθε προϊόν σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, ώστε να βελτιστοποιηθεί ένα προεπιλεγμένο κριτήριο απόδοσης, όπως, για παράδειγμα, το κέρδος της επιχείρησης κατά τη μελετώμενη περίοδο.

- **Πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής** *(production planning/scheduling problem)*

  Το πρόβλημα αυτό αφορά σε οικονομικές μονάδες που χρησιμοποιούν τους πόρους που διαθέτουν για την παραγωγή ενός προϊόντος. Μέρος της παραγόμενης ποσότητας προωθείται αμέσως στην αγορά για να καλύψει τη ζήτηση, ενώ το υπόλοιπο αποθηκεύεται για να πωληθεί σε επόμενες χρονικές περιόδους. Το μοναδιαίο κόστος παραγωγής και το κόστος της αποθήκευσης εξαρτώνται, μεταξύ των άλλων, και από την ποσότητα που παράγεται κάθε φορά. Συγκεκριμένα, το μοναδιαίο κόστος παραγωγής μειώνεται όσο αυξάνεται η ποσότητα παραγωγής, ενώ, αντίθετα, το συνολικό κόστος της αποθήκευσης αυξάνεται. Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί ο βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος της οικονομικής μονάδας.

- **Πρόβλημα μεταφοράς** *(transportation problem)*

  Το πρόβλημα αυτό αφορά σε οικονομικές μονάδες που διακινούν ένα προϊόν από διαφορετικές πηγές παραγωγής/προέλευσης (εργοστάσια, κεντρικές αποθήκες, κέντρα διανομής), σε διαφορετικά κέντρα κατανάλωσης/προορισμού (σημεία πώλησης, τοπικές αποθήκες, σταθμούς, λιμάνια). Το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς είναι διαφορετικό για κάθε ζεύγος προέλευσης-προορισμού. Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί το βέλτιστο πρόγραμμα μεταφοράς ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό μεταφορικό κόστος της οικονομικής μονάδας.

- **Πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου** *(portfolio selection problem)*
  Το πρόβλημα αυτό αφορά σε διοικητικά στελέχη επιχειρήσεων και οργανισμών, κυρίως τραπεζικών και ασφαλιστικών, που έχουν ως έργο τους να δημιουργήσουν ένα χαρτοφυλάκιο επενδύσεων. Τα επενδυτικά σχέδια μεταξύ των οποίων μπορούν να επιλέξουν, διαφέρουν τόσο ως προς την απόδοση όσο και ως προς τον κίνδυνο. Το ζητούμενο είναι να επιλεγεί το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο επενδύσεων που θα μεγιστοποιεί ένα προκαθορισμένο κριτήριο απόδοσης.

Ενότητα 1.3

Μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού

1.3.1 Βασικά στοιχεία

Για να εφαρμοστεί η μεθοδολογία του γραμμικού προγραμματισμού σε κάποιο πρόβλημα, θα πρέπει κατ’ αρχάς το πρόβλημα αυτό να εκφραστεί μαθηματικά με τη μορφή γραμμικών σχέσεων, δηλαδή να δημιουργηθεί ένα αντίστοιχο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού και στη συνέχεια να διερευνηθεί αν αυτό το **μοντέλο** (*model*) ικανοποιεί τις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται ώστε να μπορεί να επιλυθεί με τη μεθοδολογία αυτή.

Στο χώρο της διοικητικής επιστήμης, κάθε μοντέλο νοείται ως μια αφαίρεση της πραγματικότητας, δηλαδή ως μια απλουστευμένη και ιδεατή απεικόνιση ενός πραγματικού συστήματος, που στοχεύει να βοηθήσει στη λήψη μιας επιχειρηματικής απόφασης για την επίτευξη προκαθορισμένων στόχων.

Τα βασικά στοιχεία ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού είναι τα ακόλουθα:

- Οι μεταβλητές.
- Η αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι περιορισμοί.

- Οι παράμετροι.

Οι **μεταβλητές** *(variables)* αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία του μοντέλου και εκφράζουν τις ποσότητες εκείνες που μπορεί να επηρεάσει το πρόσωπο που λαμβάνει την απόφαση. Για το λόγο αυτόν, αναφέρονται και ως **μεταβλητές απόφασης** *(decision variables)* ή ως **μεταβλητές ελέγχου** *(control variables)* ή, επίσης, ως **δομικές μεταβλητές** *(structural variables).*

Η **αντικειμενική συνάρτηση** *(objective function)* εκφράζει το **κριτήριο** ή **μέτρο απόδοσης** *(performance criterion/measure),* το οποίο επιδιώκει να βελτιστοποιήσει η επιχειρηματική απόφαση και το οποίο μπορεί να είναι η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση μιας ποσότητας (π.χ., κέρδος ή κόστος αντίστοιχα).

Οι **περιορισμοί** *(constraints)* εκφράζουν όλες εκείνες τις καταστάσεις (π.χ., διαθεσιμότητα πόρων, ζήτηση αγοράς κ.λπ.) που μπορεί να εμποδίσουν την επίτευξη των στόχων που έχουν τεθεί.

Τέλος, οι **παράμετροι** *(parameters)* εκφράζουν διάφορες σταθερές ποσότητες, γνωστές ή εκτιμημένες εκ των προτέρων.

1.3.2 Προϋποθέσεις

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, θα αναφερθούμε στις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται έτσι ώστε ένα πρόβλημα να μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις αυτές είναι οι ακόλουθες:

- **Γραμμικότητα** των συναρτήσεων (*linearity*).
- **Διαιρετότητα** των τιμών των μεταβλητών απόφασης (*divisibility*).
- **Βεβαιότητα** των τιμών των παραμέτρων (*certainty*).
- **Μοναδικότητα κριτηρίου αξιολόγησης** (*uniqueness of objective*).

Σύμφωνα με την **αρχή της γραμμικότητας**, όλες οι συναρτήσεις τού υπό εξέταση προβλήματος, δηλαδή η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί, πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις μεταβλητές απόφασης. Οι γραμμικές συναρτήσεις έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες:

i. **Αναλογικότητα** (*proportionality*), δηλαδή οι μεταβολές της τιμής τους είναι ανάλογες των μεταβολών μιας οποιασδήποτε μεταβλητής τους.

ii. **Προσθετικότητα** (*additivity*), δηλαδή οι μεταβολές της τιμής τους ισούνται με το άθροισμα των επιμέρους μεταβολών των μεταβλητών τους.

Η **προϋπόθεση της γραμμικότητας** είναι πολύ σημαντική και η τήρησή της θα πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα. Σε περιπτώσεις όπου η προϋπόθεση της γραμμικότητας δεν πληρούται απόλυτα, θα πρέπει αρχικά να καταβληθεί προσπάθεια ώστε οι συναρτήσεις να προσεγγιστούν με γραμμικές συναρτήσεις. Αν όμως αυτό δεν είναι δυνατό, τότε ο γραμμικός προγραμματισμός δεν είναι η κατάλληλη μέθοδος και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές **μη γραμμικού προγραμματισμού** (*non-linear programming*).

Σύμφωνα με την **προϋπόθεση της διαιρετότητας,** η κάθε μεταβλητή απόφασης πρέπει να είναι συνεχής και, επομένως, απείρως διαιρετή. Με άλλα λόγια, πρέπει να μπορεί να λαμβάνει ακέραιες αλλά και κλασματικές τιμές. Σε περιπτώσεις όπου η προϋπόθεση της διαιρετότητας δεν πληρούται, τότε: α) αν μεν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες, η προϋπόθεση αγνοείται, το πρόβλημα λύνεται κανονικά και οι τιμές των μεταβλητών που προκύπτουν στρογγυλοποιούνται στην πλησιέστερη ακέραιη μονάδα· β) αν όμως οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές, τότε ο γραμμικός προγραμματισμός δεν είναι η κατάλληλη μέθοδος και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές **ακέραιου προγραμματισμού** (*integer programming*).

Σύμφωνα με την **προϋπόθεση της βεβαιότητας**, όλες οι παράμετροι του προβλήματος πρέπει να είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει, καθώς οι παράμετροι είναι στοχαστικές και ο υπολογισμός τους βασίζεται στη στατιστική επεξεργασία δεδομένων που έχουν συγκεντρωθεί. Αν τα δεδομένα δεν παραπέμπουν σε κάποιο συγκεκριμένο στοχαστικό υπόδειγμα, γεγονός που θα απαιτούσε την εφαρμογή μεθόδων **στοχαστικού προγραμματισμού** (*stochastic programming*), και η διασπορά τους είναι περιορισμένη, τότε οι παράμετροι θα μπορούσαν να ενταχθούν στο μοντέλο ως μέσες τιμές των σχετικών παρατηρήσεων και οι επιπτώσεις από αναμενόμενες αποκλίσεις θα μπορούσαν να μελετηθούν στο πλαίσιο της ανάλυσης ευαισθησίας της τελικής λύσης.

Τέλος, σύμφωνα με την προϋπόθεση της **μοναδικότητας κριτηρίου αξιολόγησης**, για να εκφραστεί ένα πρόβλημα ως **μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού** (*linear programming model*), θα πρέπει να έχει ένα μοναδικό κριτήριο αξιολόγησης. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, υπάρχουν περισσότερα του ενός κριτήρια και, επιπλέον, αντικρουόμενα και ανταγωνιστικά. Στις περιπτώσεις αυτές:

- Αν υπάρχει δυνατότητα ομογενοποίησης των κριτηρίων, εισάγουμε ένα νέο που αποτελεί σταθμισμένο συνδυασμό των αρχικών.
- Αν δεν υπάρχει δυνατότητα ομογενοποίησης των κριτηρίων, αλλά κάποιο από αυτά θεωρείται σημαντικότερο από τα υπόλοιπα, τότε επιλέγεται αυτό ως μοναδικό κριτήριο και τα υπόλοιπα απορρίπτονται ή εντάσσονται στο μοντέλο υπό μορφή περιορισμών.
- Αν τίποτε από τα παραπάνω δεν ισχύει, τότε ο γραμμικός προγραμματισμός δεν είναι η κατάλληλη μέθοδος και θα πρέπει να εφαρμοστούν τεχνικές **πολλαπλών στόχων** (*multiobjective programming*).

- Στην πράξη, όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις έχουν ταυτόχρονα απόλυτη ισχύ μόνο σε ελάχιστες περιπτώσεις. Στις περιπτώσεις πάντως που ισχύουν, έστω και κατά προσέγγιση, μπορεί να εφαρμοστεί το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού για να δώσει μια πρώτη ένδειξη της λύσης. Αν, όμως, απαιτείται ακριβέστερη λύση, τότε θα πρέπει, κατά περίπτωση, να χρησιμοποιηθούν τα άλλα είδη **μαθηματικού προγραμματισμού** (*mathematical programming*) που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα αυτή, σχετικά με τη διατύπωση ενός προβλήματος ως μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού και τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται για να είναι δυνατή η επίλυσή του, θα εφαρμοστούν στην επόμενη ενότητα σε δύο σχετικά παραδείγματα, ένα μεγιστοποίησης και ένα ελαχιστοποίησης κάποιου κριτηρίου αξιολόγησης.

Ενότητα 1.4

Διατύπωση προβλημάτων ως μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού

1.4.1

Πρόβλημα μεγιστοποίησης

Μια βιομηχανική μονάδα Α παράγει δύο προϊόντα, $Π_1$ και $Π_2$. Για την παραγωγή τους απαιτείται η εργασία εξειδικευμένων τεχνιτών και δύο υλικά, $Υ_1$ και $Υ_2$. Συγκεκριμένα, για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος $Π_1$ απαιτούνται 2 λεπτά εξειδικευμένης εργασίας και 6 μονάδες του υλικού $Υ_1$. Αντίστοιχα, για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος $Π_2$ απαιτούνται 4 λεπτά εξειδικευμένης εργασίας, 2 μονάδες του υλικού $Υ_1$ και 1 μονάδα του υλικού $Υ_2$. Οι διαθέσιμες ποσότητες των τριών αυτών πόρων ανά ημέρα είναι 1600 λεπτά εξειδικευμένης εργασίας, 1800 μονάδες του υλικού $Υ_1$ και 350 μονάδες του υλικού $Υ_2$. Επιπλέον, η ημερήσια ζήτηση της αγοράς μπορεί να απορροφήσει όλη την παραγόμενη ποσότητα και των δύο προϊόντων. Τέλος, το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι 3 και 8 χρηματικές μονάδες (χ.μ.) για τα προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συγκεντρώνονται στον Πίνακα 1.1. Με βάση τα στοιχεία αυτά, ζητείται να προσδιοριστεί το βέλτιστο ημερήσιο πρόγραμμα παραγωγής της βιομηχανικής μονάδας, δηλαδή εκείνο το πρόγραμμα παραγωγής που θα μεγιστοποιεί το κέρδος της.

Πίνακας 1.1
Δεδομένα προβλήματος

Πόρος	**Απαιτούμενη ποσότητα πόρου ανά μονάδα προϊόντος**		**Διαθέσιμη ποσότητα πόρου**
	Προϊόν $Π_1$	**Προϊόν $Π_2$**	
Εξειδικευμένη εργασία (σε λεπτά)	2	4	1600
Υλικό $Υ_1$(σε μονάδες προϊόντος)	6	2	1800
Υλικό $Υ_2$ (σε μονάδες προϊόντος)	-	1	350
Κέρδος/μονάδα (σε χρηματικές μονάδες)	3	8	

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης και, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, θα πρέπει αρχικά να προσδιοριστούν τα βασικά στοιχεία του, δηλαδή οι μεταβλητές απόφασης, οι παράμετροι, η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί.

Οι **μεταβλητές απόφασης** εκφράζουν τις ποσότητες που μπορεί να επηρεάσει το πρόσωπο που αποφασίζει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι ποσότητες αυτές είναι οι ημερήσιες ποσότητες παραγωγής από κάθε προϊόν $Π_1$ και $Π_2$, εκφρασμένες σε μονάδες του προϊόντος. Κατά συνέπεια, οι μεταβλητές απόφασης είναι οι εξής:

x_1: Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος $Π_1$ που παράγονται κάθε μέρα.

x_2: Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος $Π_2$ που παράγονται κάθε μέρα.

Οι **παράμετροι** εκφράζουν διάφορες σταθερές ποσότητες, γνωστές ή εκτιμηθείσες εκ των προτέρων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι παράμετροι είναι οι διαθέσιμες ποσότητες πόρων, οι απαιτούμενες ποσότητες πόρων ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν καθώς και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν.

Η **αντικειμενική συνάρτηση** εκφράζει το κριτήριο απόδοσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει τη μεγιστοποίηση του συνολικού ημερήσιου κέρδους της επιχείρησης, το οποίο υπολογίζεται ως εξής:

Συνολικό ημερήσιο κέρδος επιχείρησης (Z) = Ημερήσιο κέρδος από πωλήσεις του $Π_1$+Ημερήσιο κέρδος από πωλήσεις του $Π_2$= (Μοναδιαίο κέρδος $Π_1$)*(Πωλήσεις $Π_1$)+(Μοναδιαίο κέρδος $Π_2$)*(Πωλήσεις $Π_2$).

Άρα, η αντικειμενική συνάρτηση είναι η ακόλουθη:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \qquad (1.1)$$

Το μοναδιαίο κέρδος κάθε προϊόντος, το οποίο πολλαπλασιάζεται με την αντίστοιχη μεταβλητή απόφασης, ονομάζεται συνήθως **αντικειμενικός συντελεστής** (*objective function coefficient*) ή **συντελεστής απόδοσης** (*performance coefficient*), επειδή εκφράζει την απόδοση ή τη συνεισφορά κάθε προϊόντος στο συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

Οι **περιορισμοί** εκφράζουν όλες εκείνες τις καταστάσεις (π.χ., διαθεσιμότητα πόρων, ζήτηση αγοράς κτλ.) που μπορεί να επηρεάσουν την επίτευξη των στόχων που έχουν τεθεί. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς η ζήτηση της αγοράς για τα παραγόμενα προϊόντα είναι πρακτικά απεριόριστη, οι περιορισμοί είναι τρεις και αφορούν αποκλειστικά τη διαθεσιμότητα των τριών πόρων.

Ο περιορισμός για τη διαθεσιμότητα της εξειδικευμένης εργασίας ορίζεται ως εξής:

Ημερήσια απαιτούμενη εργασία $\leq$ Ημερήσια διαθέσιμη εργασία

Δηλαδή:

(Απαιτούμενη εργασία ανά μονάδα $Π_1$)*(Ημερήσια παραγόμενη ποσότητα $Π_1$) + (Απαιτούμενη εργασία ανά μονάδα $Π_2$)*(Ημερήσια παραγόμενη ποσότητα $Π_2$) ≤ Ημερήσια διαθέσιμη εργασία.

Άρα, ο περιορισμός αυτός εκφράζεται από τη σχέση:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600 \qquad (1.2)$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι περιορισμοί για τα δύο υλικά, οι οποίοι εκφράζονται ως εξής:

$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800 \qquad (1.3)$$

$$x_2 \leq 350 \qquad (1.4)$$

Οι ανισώσεις (1.2)-(1.4) ονομάζονται **περιορισμοί δομής** (*structural constraints*) ή **λειτουργικοί περιορισμοί** (*functional constraints*). Οι ποσότητες στο δεξιό μέλος κάθε ανίσωσης ονομάζονται **σταθερές του δεξιού μέλους** (*right hand side constants*). Τέλος, οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης ονομάζονται και **τεχνολογικοί συντελεστές** (*technological coefficients*), καθώς πολλές φορές εκφράζουν την ποσότητα που απαιτείται από κάθε πόρο για την παραγωγή μιας μονάδας του συγκεκριμένου προϊόντος.

Ας σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι μεταβλητές απόφασης, όπως έχουν οριστεί, δεν μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές. Άρα, στους παραπάνω τρεις λειτουργικούς περιορισμούς θα πρέπει να προστεθούν και οι αντίστοιχοι **περιορισμοί μη αρνητικότητας** (*non-negativity constraints*), που είναι οι εξής:

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \qquad (1.5)$$

Συνοψίζοντας όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημά μας με την εξής μορφή ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \qquad (1.1)$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600 \qquad (1.2)$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800 \qquad (1.3)$$
$$x_2 \leq 350 \qquad (1.4)$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \qquad (1.5)$$

Η ενότητα αυτή θα ολοκληρωθεί με την εξέταση του «κατά πόσο το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού που διατυπώθηκε παραπάνω ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις που έχουν τεθεί (γραμμικότητα, διαιρετότητα, βεβαιότητα, μοναδικότητα κριτηρίου αξιολόγησης), ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος».

Είναι προφανές ότι η **προϋπόθεση της γραμμικότητας** ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, τόσο για την αντικειμενική συνάρτηση όσο και για τους περιορισμούς. Το γεγονός ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική σημαίνει, αφενός, ότι η συνεισφορά κάθε προϊόντος στο συνολικό κέρδος της επιχείρησης είναι ανάλογη του αριθμού των μονάδων του προϊόντος που παράγονται και διατίθενται (αναλογική ιδιότητα) και, αφετέρου, ότι το συνολικό κέρδος της επιχείρησης ισούται με το άθροισμα των συνεισφορών στα κέρδη όλων των προϊόντων (προσθετική ιδιότητα). Αντίστοιχα, το γεγονός ότι οι περιορισμοί είναι γραμμικοί σημαίνει, αφενός, ότι η κατανάλωση ενός πόρου για την παραγωγή κάποιου προϊόντος είναι ανάλογη του αριθμού των μονάδων του προϊόντος που παράγονται και διατίθενται (αναλογική ιδιότητα) και, αφετέρου, ότι η συνολική κατανάλωση ενός πόρου ισούται με το άθροισμα της κατανάλωσής του για την παραγωγή όλων των προϊόντων (προσθετική ιδιότητα).

Η **προϋπόθεση της διαιρετότητας** δεν ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς ο αριθμός των παραγόμενων προϊόντων είναι ακέραιος και δεν μπορούν να παραχθούν κλασματικές μονάδες προϊόντων. Όμως, όπως ήδη αναφέρθηκε, το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί αν υποτεθεί ότι οι κλασματικές μονάδες προϊόντων στρογγυλοποιούνται στην πλησιέστερη ακέραιη μονάδα. Ωστόσο, η στρογγυλοποίηση αυτή μπορεί να γίνει μόνο αν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες, όρος που, όπως θα φανεί στη συνέχεια, ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, έτσι ώστε το σφάλμα που θα προκύψει από τη στρογγυλοποίηση να μην αλλοιώνει το αποτέλεσμα.

Η **προϋπόθεση της βεβαιότητας** ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς οι τιμές των παραμέτρων του προβλήματος, δηλαδή των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, των τεχνολογικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών, είναι σταθερές και δεν προκύπτουν από κάποια πιθανοτική κατανομή. Ωστόσο, στην πράξη είναι πρακτικά αδύνατο να ισχύει η αρχή της βεβαιότητας. Οι τιμές των παραμέτρων είναι συνήθως εκτιμήσεις ή προβλέψεις των πραγματικών τιμών και εμπεριέχουν σφάλμα εκτίμησης/πρόβλεψης. Για το λόγο αυτόν, είναι πολύ σημαντική η **ανάλυση ευαισθησίας** (*sensitivity/postoptimality analysis*) που ακολουθεί μετά τη λύση ενός προβλήματος και μέσω της οποίας διερευνάται η ευαισθησία της λύσης σε μικρές ή μεγαλύτερες μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων. Ο λήπτης της απόφασης θα πρέπει να εντοπίσει τις ευαίσθητες παραμέτρους και να τις εκτιμήσει με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια ώστε να αποφύγει τυχόν λάθη.

Τέλος, η **προϋπόθεση της μοναδικότητας κριτηρίου αξιολόγησης** ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους της επιχείρησης.

1.4.2 Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Μια βιομηχανική μονάδα Α παράγει δύο προϊόντα, $Π_1$ και $Π_2$. Για την παραγωγή τους χρησιμοποιούνται τρία υλικά, $Υ_1$, $Υ_2$ και $Υ_3$. Συγκεκριμένα, για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος $Π_1$ απαιτούνται 30 μονάδες του υλικού $Υ_1$ και 5 μονάδες του υλικού $Υ_2$. Αντίστοιχα, για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος $Π_2$ απαιτούνται 20 μονάδες του υλικού $Υ_1$, 25 μονάδες του υλικού $Υ_2$ και 10 μονάδες του υλικού $Υ_3$. Εξαιτίας κάποιων εσφαλμένων χειρισμών στην πολιτική προμηθειών της βιομηχανικής μονάδας, έχουν συσσωρευτεί στις αποθήκες της μεγάλα αποθέματα των τριών αυτών υλικών. Προκειμένου όμως να απελευθερωθεί άμεσα κάποιος αποθηκευτικός χώρος για μια νέα παρτίδα άλλων υλικών της εταιρείας που θα παραληφθεί σύντομα, η εταιρεία αποφάσισε να χρησιμοποιήσει κάποιες ποσότητες από τα υλικά $Υ_1$, $Υ_2$ και $Υ_3$ για την άμεση παραγωγή προϊόντων $Π_1$ και $Π_2$. Οι ελάχιστες ποσότητες που πρέπει να χρησιμοποιηθούν από κάθε υλικό $Υ_1$, $Υ_2$ και $Υ_3$ είναι 1500, 900 και 200 μονάδες αντίστοιχα. Τα προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$ που θα παραχθούν δεν μπορούν να προωθηθούν στην αγορά πριν από ένα μήνα και, για το διάστημα αυτό, θα πρέπει να παραμείνουν στους αποθηκευτικούς χώρους που θα νοικιάσει η εταιρεία. Το μηνιαίο κόστος αποθήκευσης για κάθε μονάδα προϊόντος $Π_1$ και $Π_2$ είναι 150 και 250 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνοψίζονται στον Πίνακα 1.2. Με βάση τα στοιχεία αυτά, ζητείται να προσδιοριστεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής της βιομηχανικής μονάδας, δηλαδή εκείνο το πρόγραμμα παραγωγής που θα ελαχιστοποιεί το κόστος αποθήκευσης των προϊόντων Π_1 και Π_2 που θα παραχθούν.

Πίνακας 1.2
Δεδομένα προβλήματος

Πόρος	**Απαιτούμενη ποσότητα πόρου ανά μονάδα προϊόντος**		**Ελάχιστη ποσότητα πόρου που πρέπει να χρησιμοποιηθεί**
	Προϊόν Π_1	**Προϊόν Π_2**	
Υλικό Y_1 (σε μονάδες υλικού)	30	20	1500
Υλικό Y_2 (σε μονάδες υλικού)	5	25	900
Υλικό Y_3 (σε μονάδες υλικού)	-	10	200
Κόστος αποθήκευσης/μονάδα προϊόντος (σε χρηματικές μονάδες)	150	250	

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, θα πρέπει αρχικά να προσδιοριστούν τα βασικά στοιχεία του, δηλαδή οι μεταβλητές απόφασης, οι παράμετροι, η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί.

Οι **μεταβλητές απόφασης** εκφράζουν τις ποσότητες παραγωγής που θα παραχθούν και, κατά συνέπεια, θα αποθηκευτούν για ένα μήνα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι ποσότητες αυτές είναι οι ημερήσιες ποσότητες παραγωγής από κάθε προϊόν Π_1 και Π_2, εκφρασμένες σε μονάδες προϊόντος. Κατά συνέπεια οι μεταβλητές απόφασης είναι οι εξής:

x_1: Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Π_1 που θα παραχθούν/αποθηκευτούν.

x_2: Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Π_2 που θα παραχθούν/αποθηκευτούν.

Οι **παράμετροι** εκφράζουν διάφορες σταθερές ποσότητες, γνωστές ή εκτιμηθείσες εκ των προτέρων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι παράμετροι είναι οι ελάχιστες ποσότητες πόρων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν, οι απαιτούμενες ποσότητες πόρων ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν καθώς και το μηνιαίο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν.

Η **αντικειμενική συνάρτηση** εκφράζει το κριτήριο απόδοσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει την ελαχιστοποίηση του συνολικού μηνιαίου κόστους αποθήκευσης, το οποίο υπολογίζεται ως εξής:

Συνολικό μηνιαίο κόστος αποθήκευσης (Z)=

Μηνιαίο κόστος αποθήκευσης Π_1 + Μηνιαίο κόστος αποθήκευσης Π_2 =

(Μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης Π_1) * (Ποσότητα παραγωγής Π_1) +

(Μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης Π_2) * (Ποσότητα παραγωγής Π_2)

Άρα, η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$Z = 150x_1 + 250x_2 \tag{1.6}$$

Οι **περιορισμοί** είναι τρεις και αφορούν τις ελάχιστες απαιτήσεις της εταιρείας για την κατανάλωση των αντίστοιχων πόρων. Ο περιορισμός για την κατανάλωση του πόρου Y_1 ορίζεται ως εξής:

Συνολική κατανάλωση πόρου $Y_1 \geq$ Ελάχιστη απαιτούμενη κατανάλωση πόρουY_1

Δηλαδή:

(Κατανάλωση πόρου Y_1 ανά μονάδα Π_1) * (Συνολική ποσότητα παραγωγής Π_1) + (Κατανάλωση πόρου Y_2 ανά μονάδα Π_2) * (Συνολική ποσότητα παραγωγής Π_2) $\geq$ Ελάχιστη απαιτούμενη κατανάλωση πόρουY_1.

Άρα, ο περιορισμός αυτός εκφράζεται από τη σχέση:

$$30x_1 + 20x_2 \geq 1500 \tag{1.7}$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται οι περιορισμοί και για τα άλλα δύο υλικά Y_2 και Y_3, οι οποίοι εκφράζονται ως εξής:

$$5x_1 + 25x_2 \geq 900 \tag{1.8}$$

$$10x_2 \geq 200 \tag{1.9}$$

Τέλος, στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι μεταβλητές απόφασης, όπως έχουν οριστεί, δεν μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές. Άρα, στους παραπάνω τρεις **λειτουργικούς περιορισμούς** θα πρέπει να προστεθούν και οι αντίστοιχοι **περιορισμοί μη αρνητικότητας**, που δίνονται ως εξής:

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \tag{1.10}$$

Συνοψίζοντας όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημά μας με την εξής μορφή ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 150x_1 + 250x_2 \tag{1.6}$$

με περιορισμούς δομής

$$30x_1 + 20x_2 \geq 1500 \tag{1.7}$$

$$5x_1 + 25x_2 \geq 900 \tag{1.8}$$

$$10x_2 \geq 200 \tag{1.9}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \tag{1.10}$$

Τέλος, εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού που διατυπώθηκε παραπάνω ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις που έχουν τεθεί (**γραμμικότητα, διαιρετότητα, βεβαιότητα, μοναδικότητα κριτηρίου αξιολόγησης**) ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.