Μαθηματικά
Α΄ εξάμηνο

Συνέχεια Συναρτήσεων

Μ. Μαύρη
m.mavri@ba.aegean.gr

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περιεχόμενα

- **Συνέχεια Συνάρτησης**

  (Ορισμοί- Θεωρήματα- Παραδείγματα)

- **Σημαντικά Θεωρήματα**

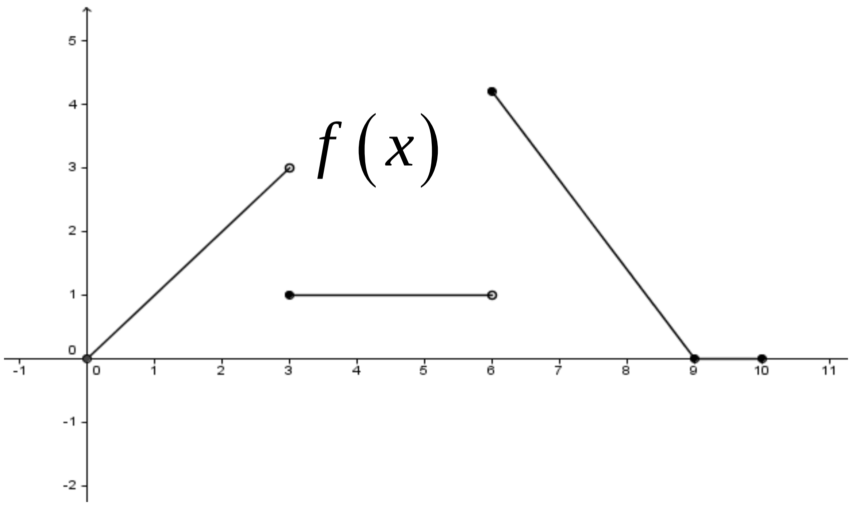
  (Θ. Bolzano, Θ. Μέσης τιμής & άλλα θεωρήματα!!

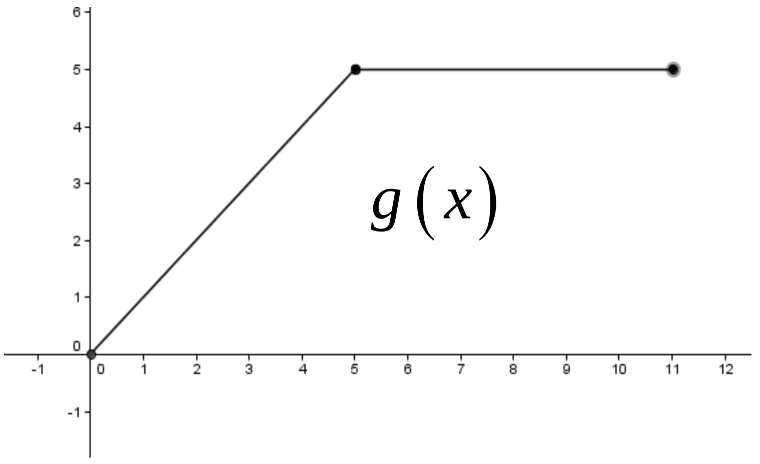
  Γεωμετρική ερμηνεία & παραδείγματα)

Συνέχεια Συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<3 \\ 1 & 3\le x<6 \\ -1{,}3x+12 & 6\le x\le 9 \\ 0 & 9\le x\le 11 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 5 \\ 5 & 5<x\le 11 \end{cases}$$





Ορισμός Συνέχειας Συνάρτησης

Ορισμός:

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι μια **συνάρτηση** f είναι **συνεχής** στο x_0 αν

i. ορίζεται το $f(x_0)$

ii. υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δηλαδή $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$ και

iii. η τιμή της συνάρτησης f στο x_0 ισούται με την τιμή του ορίου $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right)$

Είδη ασυνέχειας

- Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και είναι διαφορετικό από την $f(x_0)$ τότε η συνάρτηση είναι ασυνεχής (**α' είδος ασυνέχειας**)

  Παρατήρηση: Δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης

- Στην περίπτωση που δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ τότε η συνάρτηση παρουσιάζει ουσιώδης ασυνέχεια (**β' είδος ασυνέχειας**).

Συνέχεια στα άκρα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

i. $f(x) = x$

Έστω $x_0 \in \Re$ και $\varepsilon > 0$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Re$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.

Άρα για $\delta = \varepsilon$ η συνάρτηση είναι συνεχής.

Παράδειγμα 2

$f : \Re \to \Re$ με $f(x) = 5x - 3$ στο σημείο $x_0 = 2$

Έστω $x_0 \in \Re$ και $\varepsilon > 0$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Re$ με $|x - 2| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(2)| = |(5x - 3) - (5*2 - 3)| = |5x - 10|$

$= 5|x - 2| < \varepsilon$.

Άρα για $\delta = \varepsilon/5$ η συνάρτηση είναι συνεχής.

Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Αν η f(x) είναι συνεχής στο x για κάθε x στο (α,β), τότε η f λέγεται **συνεχής** στο (α,β)

Η συνέχεια σ' ένα κλειστό διάστημα μπορεί να οριστεί λίγο διαφορετικά:

Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο κλειστό [α,β] αν

(1) Η f είναι συνεχής στο x για κάθε x στο (α,β)

(2) αν $\lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta-} f(x) = f(\beta)$

Θεωρήματα-Παράδειγμα

Θεώρημα Αν f, g συνεχεις τοτε : $f+g, f*g, \frac{f}{g}, g \neq 0, |f|, \lambda f$ συνεχεις

Θεώρημα: Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Αν η f ειναι συνεχης στο $x_0 \in \Delta(f)$ και $g : R(f) \to \Re$ ειναι συνεχης στο $f(x_0) \in R(f)$

τοτε η $g \circ f$ ειναι συνεχης στο x_0

Επειδη η f ειναι συνεχης στο $x_0 \in \Delta(f)$ $\forall \varepsilon^* > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Delta(f) |x - x_0| < \delta$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^*$

Απο τη συνεχεια της g στο $f(x_0)$ εχω

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall f(x) \in R(f)$ με $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

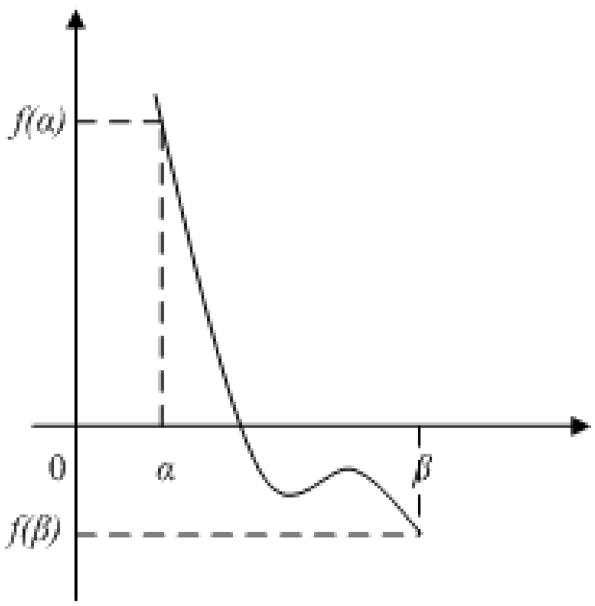
Για $\varepsilon^* = \delta_1$ εχουμε $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ αρα και $\delta > 0, \forall x \in \Delta(f)$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow$

$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ που σημαινει $g \circ f$ ειναι συνεχης στο x_0

Θεώρημα Bolzano

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)<0<f(\beta)$ τότε υπάρχει κάποιο x στο $[\alpha,\beta]$ τετοιο ώστε $f(x)=0$



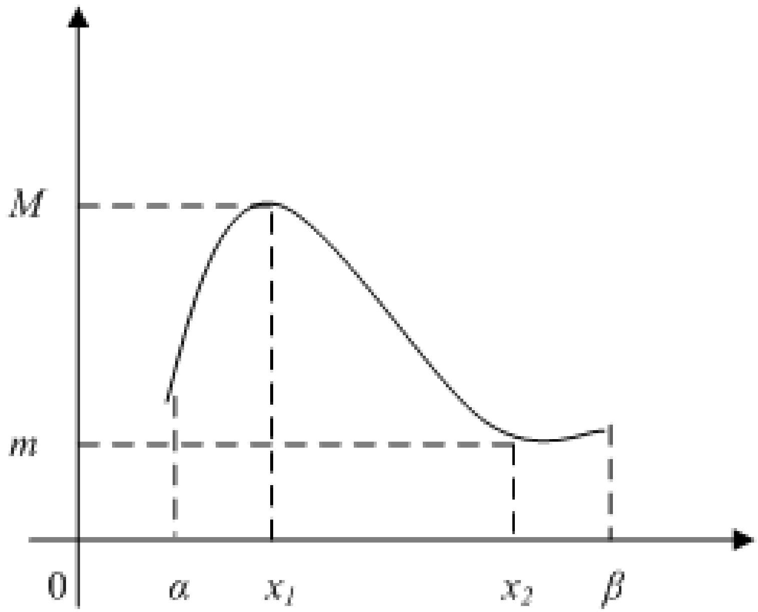
(α)

Γεωμετρική Σημασία

Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης που ξεκινάει πάνω από τον οριζόντιο άξονα και τελειώνει κάτω από αυτό πρέπει να τέμνει αυτόν τον άξονα σε κάποιο σημείο

Θεώρημα Μέγιστης & Ελάχιστης Τιμής

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τοτε η f είναι άνω φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$, δηλαδή υπάρχει κάποιος αριθμός M τέτοιος ώστε $f(x)\leq M$ για κάθε x στο $[\alpha,\beta]$



(β)

<u>Γεωμετρική Σημασία</u>

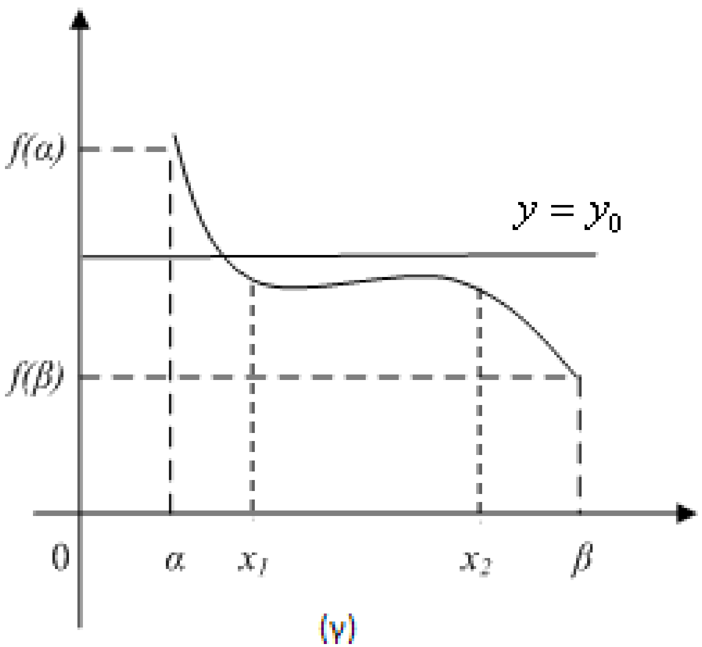
Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης βρίσκεται κάτω από κάπο ευθεία παράλληλη στον οριζόντιο άξον

Σημείωση: Ισχύει κάτω φραγμένη και

$f(x)\geq M$

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

Αν η *f(x)* είναι συνεχής στο *[α,β]* και ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ ή $f(\alpha)>\eta>f(\beta)$ τότε υπάρχει κάποιο ξ στο *[α.β]* τέτοιο ώστε $f(\xi)=\eta$



(γ)

Γεωμετρική Σημασία

Κάθε οριζόντια ευθεία μεταξύ των ευθειών $y=f(\alpha)$, $y=f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της *f* σ' ένα τουλάχιστον σημείο

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Θεώρημα Μεταφοράς

Θεώρημα Μεταφοράς

Ειναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ αν και μονο αν, για καθε ακολουθια (x_ν) απο το πεδιο ορισμου της

με $x_\nu \to x_0$ και $x_\nu \neq x_0, \forall n \in \aleph$ να εχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_\nu) = l$

Παρατήρηση

(1) Το θεώρημα εφαρμόζεται αρνητικά , δηλαδή για να αποδείξουμε ότι ένα όριο δεν υπάρχει.

Αν για ακολουθίες $(x_\nu), (y_\nu) \in \Delta(f) - \{x_0\}$ και $x_\nu \to x_0$, $y_\nu \to x_0$ ειναι

$$\lim_{x \to x_0} f(x_\nu) \neq \lim_{x \to x_0} f(y_\nu) \text{ τοτε το } \lim_{x \to x_0} f(x) \text{δεν υπαρχει}$$

(2) Αν για δυο ακολουθίες $(x_\nu), (y_\nu)$ και $x_\nu \to x_0$, $y_\nu \to x_0$ με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_\nu) = \lim\limits_{x \to x_0} f(y_\nu) = l$

$$\text{δεν συνεπαγεται οτι το } \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Πρέπει να ισχύει για κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο x_0, η αντίστοιχη ακολουθία Τιμών να συγκλίνει στο l

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 1 :</u> $f:\Re \to \Re \; f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Θα αποδείξουμε ότι το όριο δεν υπάρχει

Θεωρουμε ακολουθιες $x_\nu = \frac{1}{\nu\pi}, \nu \in \aleph$ και $y_\nu = \frac{2}{(1+4\nu\pi)}, \nu \in \aleph$

τοτε $x_\nu \to 0$ και $y_\nu \to 0$ ενω

$$\lim f(x_\nu) = \lim \sin\frac{1}{x_\nu} = \lim \sin\nu\pi = 0$$

$$\lim f(y_\nu) = \lim \sin\frac{1}{y_\nu} = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\nu\pi\right) = 1$$

$\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu)$ αρα δεν υπαρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Παράδειγμα 2: $f(x) = \begin{cases} x, & x \ \text{ρητος} \\ 0, & x \ \text{αρρητος} \end{cases}$

Θα αποδείξουμε ότι το όριο δεν υπάρχει για κανένα x_o

Θεωρουμε ακολουθιες

ρητων (x_v) με $x_v \to x_0$. Τοτε $f(x_v) = 1 \Rightarrow \lim f(x_v) = 1$

αρρητων (y_v) με $y_v \to x_0$. Τοτε $f(y_v) = 0 \Rightarrow \lim f(y_v) = 0$

Αρα το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ δεν υπαρχει

<u>Παράδειγμα 3</u> $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι το όριο δεν υπάρχει για κανένα x_o

Με το θ. μεταφοράς

Θεωρουμε ακολουθιες

(x_ν) αν $x \geq 0$ με $x_\nu \to x_0$

(y_ν) αν $x < 0$ με $y_\nu \to x_0$

Τοτε $f(x_\nu) = 1 \Rightarrow \lim f(x_\nu) = 1$ και $f(y_\nu) = 0 \Rightarrow \lim f(y_\nu) = 0$

Αρα το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ δεν υπαρχει