Μαθηματικά
Α' εξάμηνο

Όρια Συναρτήσεων

Μ. Μαύρη
m.mavri@ba.aegean.gr

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περιεχόμενα

- **Όρια**

  (έννοια- ορισμός- πλευρικά όρια- παραδείγματα)
- **Βασικά Θεωρήματα**

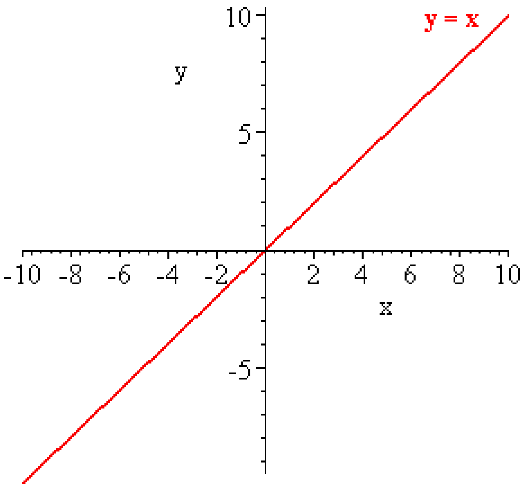
  (Θ. Ύπαρξης Ορίου- παραδείγματα)
- **Όρια στο Άπειρο**

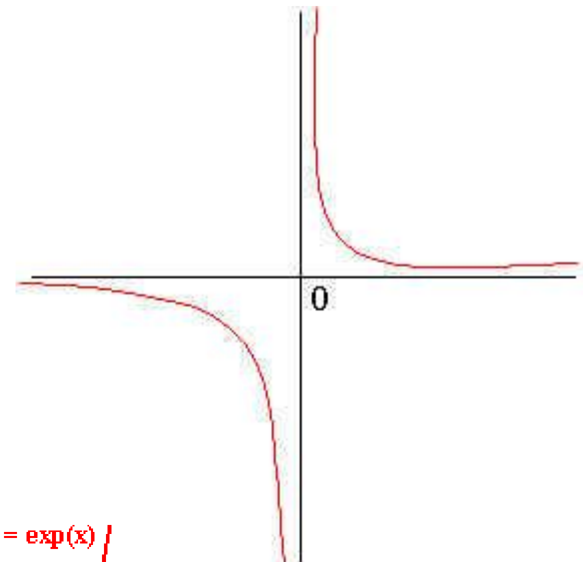
  (Ορισμοί-Παραδείγματα)

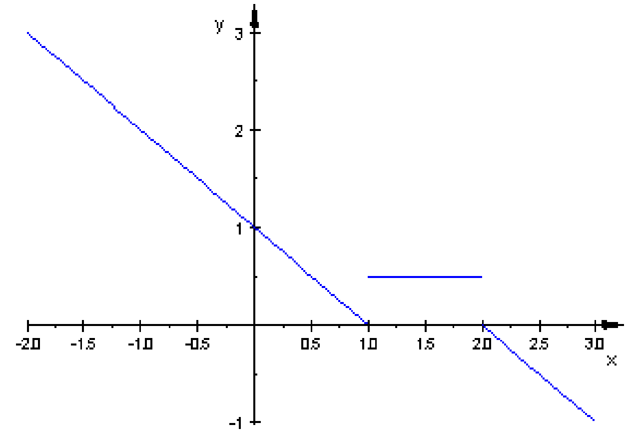
Έννοια του ορίου συνάρτησης

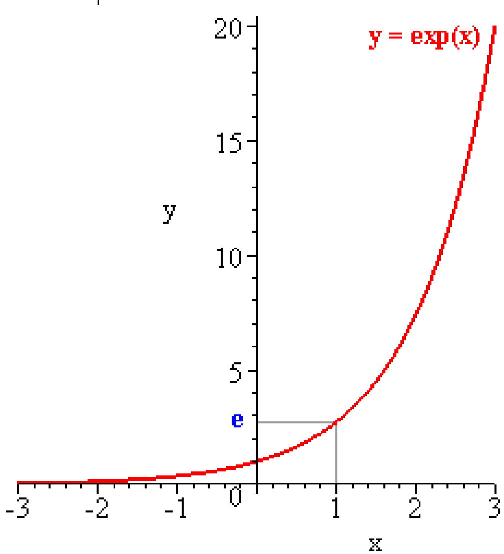
<u>Ορισμός στα γρήγορα</u> για να καταλάβουμε τι γίνεται:

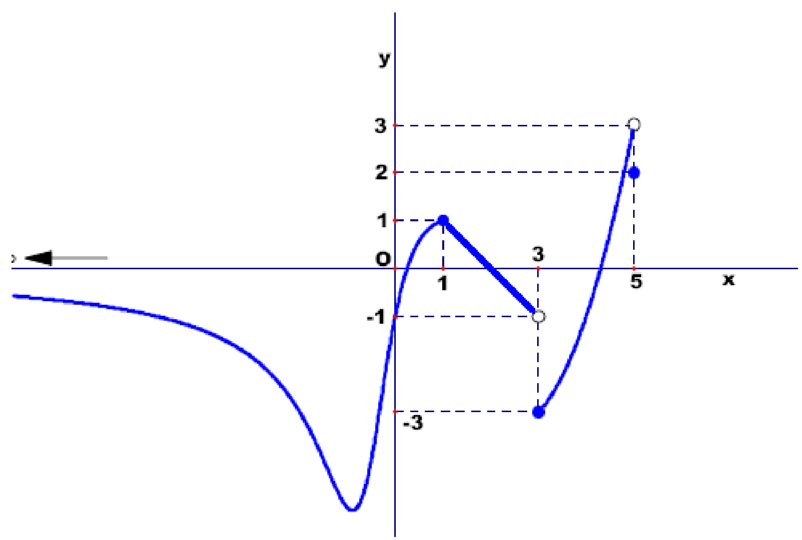
«Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο α, αν μπορούμε να φέρουμε το f(x) όσο κοντά θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο, αλλά όχι ίσο με το α.»











Οδεύοντας προς τον ορισμό του ορίου

Η συνάρτηση f συγκλίνει στο όριο l κοντά στο α, αν μπορούμε να φέρουμε το f(x) όσο κοντά θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο, αλλά όχι ίσο με το α.»

Α αλλαγή: να φέρουμε το f(x) όσο κοντά θέλουμε στο l ΣΗΜΑΙΝΕΙ να κάνουμε το $|f(x)-l|$ μικρό και όμοια για το x και α

Άρα ορισμός γίνεται

Η συνάρτηση f συγκλίνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να κάνουμε το $|f(x)-l|$ *όσο μικρό θέλουμε απαιτώντας το* $|x-a|$ *να είναι αρκετά μικρό ,* $x \neq a$

Β αλλαγή: το να κάνουμε το $|f(x)-l|$ όσο μικρό θέλουμε σημαίνει να κάνουμε το $|f(x)-l| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$

Άρα ορισμός γίνεται

Η συνάρτηση f συγκλίνει στο όριο l κοντά στο a, αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ *μπορούμε να κάνουμε το* $|f(x)-l| < \varepsilon$ *απαιτώντας το* $|x-a|$ *να είναι αρκετά μικρό ,* $x \neq a$

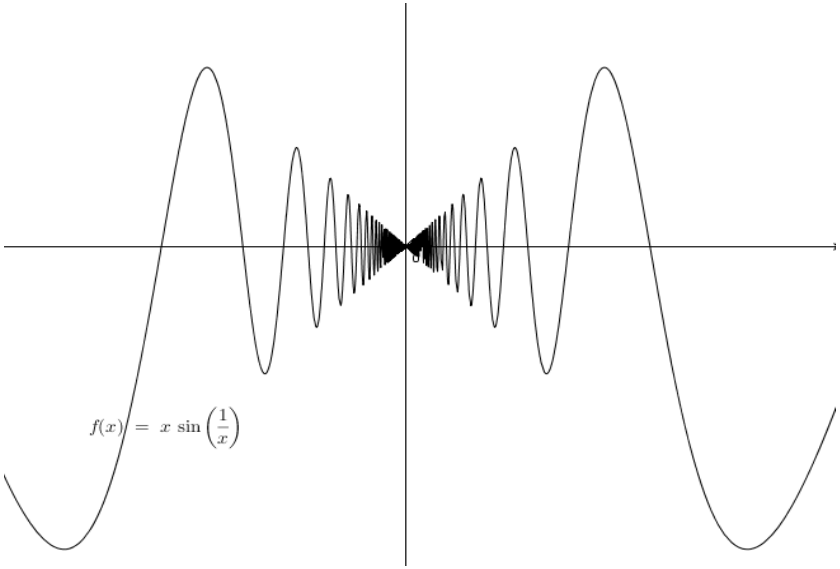
Γ αλλαγή: Για κάθε ε βρίσκουμε διαφορετικό δ με την ιδιότητα $|x-a| < \delta$

Άρα ορισμός γίνεται

Η συνάρτηση f συγκλίνει στο όριο l κοντά στο a, αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ *υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε, για κάθε x αν* $|x-a| < \delta$ *και* $x \neq a$*, τότε* $|f(x)-l| < \varepsilon$

Ορισμός Ορίου Συνάρτησης

Ορισμός: Έστω συνάρτηση f η οποία ορίζεται σ' ένα ανοιχτό διάστημα γύρω από το x_0 , δηλαδή $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\Re$. Θα λέμε ότι η f τείνει στο όριο l καθώς το x τείνει στο x_0 και θα γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, αν για κάθε αριθμό $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in D(f)$ με $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$



Παραδείγματα

(i) $\lim_{x\to 1}(4x-1)=3$

Με βάση τον ορισμό του ορίου συνάρτησης $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0$ τέτοιο ώστε $\forall x\in D(f(x))$ με

$0<|x-1|<\delta\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon$.

Έχουμε $|f(x)-3|<\varepsilon\Leftrightarrow|(4x-1)-3|<\varepsilon\Leftrightarrow|4x-4|<\varepsilon\Leftrightarrow 4|x-1|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

Άρα $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$

(ii) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

Με βάση τον ορισμό του ορίου συνάρτησης $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0$ τέτοιο ώστε $\forall x\in D(f(x))$ με

$0<|x-3|<\delta\Rightarrow|f(x)-6|<\varepsilon$.

Άρα $\delta=\varepsilon$

Πλευρικά Όρια Συνάρτησης

Ορισμός 1

$$f:(x_0, x_0+h)\to \Re, h>0. \lim_{x\to x_0+} f(x)=l \Leftrightarrow$$

$$(\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \delta>0)\forall x\in (x_0, x_0+h)$$

$$\text{με } 0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

Ορισμός 2

$$f:(x_0-h, x_0)\to \Re, h>0. \lim_{x\to x_0-} f(x)=l$$

$$\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \delta>0)\forall x\in (x_0-h, x_0)$$

$$\text{με } 0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

Ορισμός 3 ΠΡΟΣΟΧΗ

$f:(x_0-h, x_0)\cup(x_0, x_0+h)\to \Re, h>0.$

Τοτε $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπαρχει αν και μονο αν τα $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ υπαρχουν και ειναι ισα

Βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα 1: Το όριο ορίζεται αμφιμονοσήμαντα

$$\text{Αν } \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ και } \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$$

Θεώρημα 2

$$\text{Αν } \lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ τοτε η f ειναι φραγμενη στην περιοχη } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ του } x_0$$

Θεώρημα 3

$$\text{Αν } \lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x) = m \text{ τοτε :}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = l + m$$

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x) * g(x)\right] = l * m$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}, m \neq 0$$

Θεώρημα 4 (Ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων)

$$\text{Αν } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ για } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ και } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

$$\text{τοτε και το οριο της } g(x) \text{ υπαρχει και } \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^3+8x^2-3\right)=\lim_{x\to 1}2x^3+\lim_{x\to 1}8x^2-\lim_{x\to 1}3=2+8-3=7$$

Παράδειγμα 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4+8x^2-3}{2x^3+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^4+8x^2-3\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^3+7\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^4+8x^2-3\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^3+7\right)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1}2x^3+\lim\limits_{x\to 1}8x^2-\lim\limits_{x\to 1}3}{\lim\limits_{x\to 1}2x^3+\lim\limits_{x\to 1}7}=\frac{2+8-3}{2+7}=\frac{7}{9}$$

Παράδειγμα 3

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x^2+9}=\sqrt{\lim_{x\to 1}\left(2x^2+9\right)}=\sqrt{\lim_{x\to 1}2x^2+\lim_{x\to 1}9}=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$$

Άπειρα Όρια-Όρια στο Άπειρο

Ορισμός 1

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall\, \varepsilon > 0\right)\left(\exists\, \delta > 0\right) \forall x \in \Delta(f(x)) \text{ με } 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ορισμός 2

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\forall\, \varepsilon > 0\right)\left(\exists\, \delta > 0\right) \forall x \in \Delta(f(x)) \text{ με } 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Leftrightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Ορισμός 3 [το x τείνει στο +∞]

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall\, \varepsilon > 0\right)\left(\exists\, r > 0\right) \forall x \in \Delta(f(x)) \text{ με } x > r \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$

Ορισμός 4 [το x τείνει στο -∞]

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall\, \varepsilon > 0\right)\left(\exists\, r > 0\right) \forall x \in \Delta(f(x)) \text{ με } x < -r \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$

Όρια Πολυωνύμων

<u>Βαθμός Αριθμητή> Βαθμού Παρανομαστή</u>

(διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο του παρανομαστή

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{7x+4}=\frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}}=-\infty$$

<u>Βαθμός Αριθμητή< Βαθμού Παρανομαστή</u>

(διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο του παρανομαστή

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{11\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

<u>Βαθμός Αριθμητή= Βαθμού Παρανομαστή</u>

(διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$