Μαθηματικά
Α΄ εξάμηνο

Πραγματικοι Αριθμοί
Συναρτήσεις

Μ. Μαύρη
m.mavri@ba.aegean.gr

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Αιγαίο

Περιεχόμενα

Σύνολο Πραγματικών Αριθμών
- **Αλγεβρική Δομή του R**
- **Πληρότητα του R**

Συναρτήσεις
- **Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις**
- **Φραγμένες Συναρτήσεις**
- **Αντίστροφη Συνάρτηση**

Περιεχόμενα

Σύνολο Πραγματικών Αριθμών
- **Αλγεβρική Δομή του R**
- **Πληρότητα του R**

Συναρτήσεις
- **Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις**
- **Φραγμένες Συναρτήσεις**
- **Αντίστροφη Συνάρτηση**

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathfrak{R}$ αποτελείται από τα εξής υποσύνολα:
Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\aleph$={1,2,…}
Το σύνολο των ακέραιων αριθμών **Z**={x-y: x,y $\in \aleph$}= {…-2, -1, 0, 1, 2,…}
Το σύνολο των ρητών αριθμών **Q**={p/q: p.q $\in$ Z, q≠0}
Το σύνολο των άρρητων αριθμών **$\mathfrak{R}$- Q**

Επειδή κάθε ακέραιος αριθμός α μπορεί να εκφραστεί ως ρητός της μορφής α/1 το σύνολο των *πραγματικών αριθμών* αποτελείται από *ρητούς και άρρητους* αριθμούς.

Αλγεβρική δομή του $\mathfrak{R}$

Στο σύνολο $\mathfrak{R}$ εισάγονται
- οι εσωτερικές πράξεις
  - της πρόσθεσης και
  - του πολλαπλασιασμού &
- οι σχέσεις ολικής διάταξης

Οι εσωτερικές πράξεις

Σε κάθε δύο αριθμούς $\alpha,\beta \in \Re$ οι πράξεις της *πρόσθεσης* και του **πολλαπλασιασμού** αντιστοιχούν τους αριθμούς $\alpha+\beta$ και $\alpha\beta$ και χαρακτηρίζονται από τις εξής ιδιότητες

Π1: Αντιμεταθετική ιδιότητα

$\alpha+\beta=\beta+\alpha \ \forall\ \alpha, \beta \in \Re$

$\alpha\beta=\beta\alpha \ \forall\ \alpha, \beta \in \Re$

Π2: Προσεταιριστική ιδιότητα

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \ \forall\ \alpha, \beta,\gamma \in \Re$

$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma) \ \forall\ \alpha, \beta,\gamma \in \Re$

Π3: Επιμεριστική ιδιότητα

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma) \ \forall\ \alpha, \beta,\gamma \in \Re$

Π4: Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης $\alpha+0=0+\alpha$

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού $\alpha 1=1\alpha=1$

Οι εσωτερικές πράξεις

Π5: Ύπαρξη αντίθετου αριθμού

Για κάθε $\alpha \in \Re-\{0\}$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με $-\alpha$ τέτοιος ώστε $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$

Π6: Ύπαρξη αντίστροφου αριθμού

Για κάθε $\alpha \in \Re-\{0\}$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με α^{-1} τέτοιος ώστε $\alpha\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1} =1$

Η διαίρεση με μηδέν είναι αδύνατη πράξη

Σχέσεις ολικής διάταξης

Με τη σχέση διάταξης που ορίζεται στο σύνολο χαρακτηρίζεται ένας αριθμός α ως μεγαλύτερος από έναν άλλο αριθμό β και γράφουμε $\alpha>\beta$ ή $\beta<\alpha$. Η σχέση αυτή ονομάζεται ανισότητα.

Για τους αριθμούς α, β η σχέση « ο α είναι μικρότερος ή ίσος του β συμβολίζεται με $\alpha\leq\beta$

Οι ανισότητες χαρακτηρίζονται από τις εξής ιδιότητες:

Δ1: Ιδιότητα της τριχοτομίας

$\forall\ \alpha, \beta \in \Re$ ισχύει μόνο μια και μόνο μια από τις σχέσεςι $\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$

Δ2: Μεταβατική Ιδιότητα

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ με $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$, τότε $\alpha>\gamma$. Ακόμη

$\alpha\geq\beta$ και $\beta\geq\gamma$, τότε $\alpha\geq\gamma$

Δ3: Αν $\alpha<\beta$ ή $\alpha\leq\beta$ τότε $\forall\ \gamma \in \Re$ ισχύει $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$ ή $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$

Δ4: Αν $\alpha<\beta$ τότε $\forall\ \gamma \in \Re$ με $\gamma>0$ ισχύει $\alpha\gamma<\beta\gamma$ και για

$\gamma<0$ ισχύει $\alpha\gamma>\beta\gamma$

Σχέσεις ολικής διάταξης

Δ5: Αν $0<\alpha<\beta$ τότε $1/\beta<1/\alpha$

Δ6: Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$ τότε $\alpha+\gamma<\beta+\delta$

$\alpha\leq\beta$ και $\gamma\leq\delta$ ή $\alpha+\gamma\leq\beta+\delta$

Αυτό σημαίνει ότι

ΜΠΟΡΟΥΜΕ να **προσθέσουμε** τις αντίστοιχες πλευρές των ανισοτήτων

ΔΕΝ ΜΠΡΟΥΜΕ **να αφαιρέσουμε** τις αντίστοιχες πλευρές

π.χ. $11<12$ και $3<6$ $14<18$ όμως είναι ΛΑΘΟΣ $11-3<12-6$

Διαστήματα στο R

Αν α, β ∈ ℜ τότε καθένα από τα παρακάτω σύνολα ονομάζεται διάστημα στο R με άκρα α, β

[α, β] ≡ {x ∈ ℜ: $\alpha \le x \le \beta$} ≡ κλειστό διάστημα
(α, β] ≡ {x ∈ ℜ: $\alpha < x \le \beta$} ≡ κλειστό δεξιά διάστημα
[α, β) ≡ {x ∈ ℜ: $\alpha \le x < \beta$} ≡ κλειστό αριστερά διάστημα
(α, β) ≡ {x ∈ ℜ: $\alpha < x < \beta$} ≡ ανοιχτό διάστημα

Μήκος διαστήματος με άκρα α και β ονομάζουμε το μη αρνητικό αριθμό β-α

Διαστήματα των οποίων το ένα άκρο ισούται με -∞ ή + ∞, ονομάζονται μη φραγμένα διαστήματα ή **απειροδιαστήματα** του R. Για α ∈ ℜ διακρίνουμε τα εξής μη φραγμένα διαστήματα
Κλειστό άνω φραγμένο ≡ {x ∈ ℜ: x ≤ α } ≡ (-∞ , α]
Κλειστό κάτω φραγμένο ≡ {x ∈ ℜ: x ≥ α } ≡ [α, +∞)
Ανοιχτό άνω φραγμένο ≡ {x ∈ ℜ: x< α } ≡ (-∞ , α)
Ανοιχτό κάτω φραγμένο ≡ {x ∈ ℜ: x > α } ≡ (α, +∞)

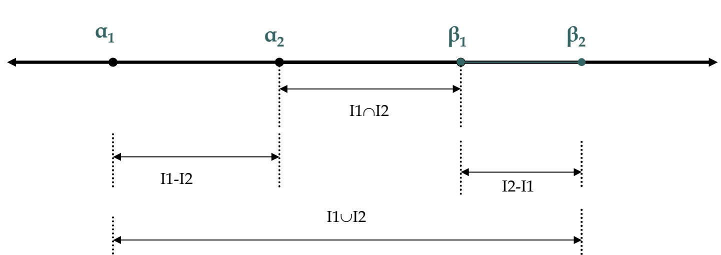
R ≡ (-∞ ,+ ∞)

Διαστήματα στο R

Ορισμός: Ένα διάστημα με άκρα α και β ονομάζεται εκφυλισμένο όταν α=β και είναι τα σύνολο (α,β)=∅ και [α,β]={β}
Τα διαστήματα (α, β] ή [α, β} δεν έχουν νόημα όταν α=β

Πράξεις με διαστήματα

Αν I1 και I2 είναι δύο μη κενά διαστήματα με I1∩I2 είναι ένα διάστημα που μπορεί να είναι και εκφυλισμένο
Αν I1 και I2 είναι δύο μη κενά διαστήματα με I1∩I2 ≠∅ τότε η ένωσή τους I1∪I2 είναι ένα διάστημα
Αν I1 και I2 είναι δύο διαστήματα τότε η διαφορά τους I_1-I_2 ή I_2-I_1 είναι ένα διάστημα



Πληρότητα του R

Ορισμός: Ένα σύνολο $X \subset R$ ονομάζεται:

1. άνω φραγμένο ή φραγμένο από πάνω στο R όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας αριθμός α τέτοιος ώστε $x \leq \alpha$, $\forall x \in X$. Ο α είναι ένα άνω φράγμα του X
2. κάτω φραγμένο ή φραγμένο κάτω στο R όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας αριθμός β τέτοιος ώστε $\beta \leq x$, $\forall x \in X$. Ο β είναι ένα κάτω φράγμα.
3. φραγμένο στο R αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω φραγμένο. Ισοδύναμα ένα σύνολο $X \subset R$ είναι φραγμένο στο R αν και μόνο αν υπάρχει άνω αριθμός $\gamma \geq 0$ τέτοιος ώστε $|x| \leq \gamma \ \forall x \in X$

Έννοια της συνάρτησης

«Συνάρτηση είναι ένας κανόνας που απεικονίζει κάποιον από τους πραγματικούς αριθμούς, σε κάποιον άλλο πραγματικό αριθμό.»

Π.χ. ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό στο τετράγωνο του.

Έστω f μια συνάρτηση, ο αριθμός που η φ απεικονίζει τον αριθμό χ συμβολίζεται με f(x) και λέγεται η τιμή της f στο χ.

$f(x)=x^2$ για κάθε x

$$g(c) = \frac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}, c \neq 1, -1$$

$$s(x) = \begin{cases} 0, \text{αν x αρρητος} \\ 1, \text{αν x ρητος} \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 5, x = 2 \\ \frac{36}{\pi}, x = 17 \\ 28, x = \frac{\pi^2}{17} \\ 28, x = \frac{36}{\pi} \\ 16, x \neq 2, 17, \frac{\pi^2}{17}, \frac{36}{\pi} \text{και } x = a + b\sqrt{2} \text{ με } \alpha, b \in Q \end{cases}$$

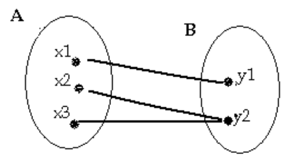
$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}, x \neq 0, 1$$

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

Αν δεν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού, θεωρούμε ότι αποτελείται από όλους τους αριθμούς για τους οποίους ο ορισμός έχει έννοια

Ορισμοί της συνάρτησης

Έννοια: Μια συνάρτηση ή μια απεικόνιση από το σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι μια αντιστοιχία που στέλνει το κάθε x ∈Α ακριβώς σε ένα y ∈Β. Το Α λέγεται πεδίο ορισμού και το Β πεδίο τιμών.



Ορισμός: Μια συνάρτηση f ή μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού το Α και πεδίο τιμών το Β είναι μια αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων Α και Β, που σε κάθε x ∈Α αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα y ∈Β. Το μοναδικό αυτό y λέγεται εικόνα του x μέσω της f και γράφεται ως y=f(x)

Γράφουμε με Δ(f) το πεδίο ορισμού της f. Δ(f) =Α.

Το σύνολο όλων των εικόνων των x από το Α λέγεται πεδίο τιμών της f και συμβολίζεται με *R*(f)

$R(f)=\{y \in B : y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in \Delta(f)\}= \{f(x): x \in \Delta(f)\}$

Προφανώς ισχύει $R(f) \subseteq B$.

Αν $R(f) = B$ τότε η f λέγεται **επί**

Συνάρτηση & Πεδία

Μια συνάρτηση με

$R(f)= \Re$ λέγεται πραγματική συνάρτηση

$\Delta(f)= \Re$ λέγεται πραγματικής μεταβλητής

$\Delta(f) \subset \Re$ & $R(f) \subset \Re$ λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

Πεδίο ορισμού: $\Delta(f)=\Re$, αφού $1+|x|\neq 0\ \forall\ x \in \Re$.

Σύνολο τιμών:

Αν $x\geq 0 \Rightarrow |x|=x$ και $y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \geq 0 \Leftrightarrow y(1-y)\geq 0$ και $y \neq 1 \Leftrightarrow y \in (-1,0]$

Αν $x<0 \Rightarrow |x|=-x$ και $y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} \leq 0 \Leftrightarrow y(1+y) \leq$ και $y \neq -1 \Leftrightarrow y \in [0,1)$

Άρα $R(f)=(-1,1)$

Παράδειγμα 2:

Έστω f και g με $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ και $g(x) = \frac{1}{1-|x|}$

(α) να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών τους

(β) Να βρεθεί για ποια $x\in\Re$ ορίζεται η $g\circ f$ και να βρεθεί ο τύπος της

$\Delta(f)=\Re$

$\Delta(g)=\Re-\{-1,1\}$

$R(f)=\{x \in\Re : |x|+1\geq 1 \Leftrightarrow 0<1/(|x|+1)\leq 1\}=(0,1\}$

$$y = \frac{1}{1-|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = y(1-|x|) \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|y = y-1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Αν y=0 τοτε αδυνατη

Αν $y \neq 0$ $|x|y = y-1 \Leftrightarrow |x| = \frac{y-1}{y} \Leftrightarrow (y-1)y \geq 0$, φτιαχνετε πινακα

$R(g) = (-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

Παράδειγμα 2: συνέχεια

$$\{x \in \Re : f(x) \in \Re - \{-1,1\}\} = \{x \in \Re : f(x) \neq -1 \text{ και } f(x) \neq 1\{,1\}\} =$$

$$\left\{x \in \Re : \frac{1}{|x|+1} \neq -1 \text{ και } \frac{1}{|x|+1} \neq 1\right\} = \left\{x \in \Re : \frac{1}{|x|+1} \neq 1\right\} =$$

$$\{x \in \Re : 1 \neq |x|+1\} = \{x \in \Re : 0 \neq |x|\} = \Re - \{0\} \neq \varnothing$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{|x|+1}\right) = \frac{1}{1-\dfrac{1}{|x|+1}} = \frac{|x|+1}{|x|}$$

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν f και g συναρτήσεις, μπορούμε να ορίσουμε

(1) μια νέα συνάρτηση f+g που λέγεται **άθροισμα** συναρτήσεων και ισχύει

(**f+g**)(x)=f(x)+g(x)

με Δ(**f+g**)=Δ(f)∩Δ(g)

(2) **γινόμενο** συναρτήσεων f.g και ισχύει

(**f.g**)(x)=f(x).g(x)

με Δ(**f.g**)=Δ(f)∩Δ(g)

(3) **πηλίκ**ο συναρτήσεων f/g και ισχύει

(**f/g**)(x)=f(x)/g(x)

με Δ(**f/g**)=Δ(f)∩Δ(g) ∩{x: g(x)≠0}

Ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες του αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου

Πράξεις με Συναρτήσεις [Σύνθεση Συναρτήσεων]

Αν f και g συναρτήσεις, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση f∘g που λέγεται **σύνθεση** των συναρτήσεων f και g και ισχύει

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(x)=f(g(x))$$

με $\Delta(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$={x: x στο Δ(g) και g(x) στο Δ(f)}

Έστω $f:A\to B$ και $g: B\to \Gamma$. Τότε η σύνθεση g∘f είναι η συνάρτηση από το Α στο Γ που ορίζεται ως:

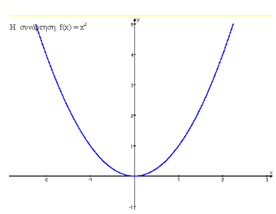
$g\circ f=\{(\alpha,\gamma) \in A\times\Gamma$: υπάρχει ένα στοιχείο $\beta\in B$ τέτοιο ώστε $(\alpha,\beta)\in f$ και $(\beta,\gamma)\in g\}$

$\mathbf{g\circ f \neq f \circ g}$

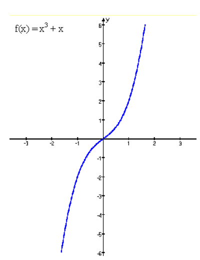
Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Έστω $f:A\to B$ Η f θα λέγεται:

- *Σταθερή*, αν $f(x)=c$, $\forall\ x\in A$
- *Ταυτοτική* αν $f(x)=x$, $\forall\ x\in A$
- *Άρτια*, αν $f(-x)=f(x)$, $\forall\ x,-x \in A$
  Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy'



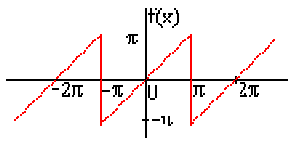
- *Περιττή*, αν $f(-x)=-f(x)$, $\forall\ x,-x \in A$
  Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων



Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Έστω f:A→ B H f θα λέγεται:

- *Περιοδική* αν $f(x+T)=f(x)\ \forall\ x, x+T \in A$



$$f(x) = x,\ \ (-\pi < x < \pi) =$$

$$= 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

- *Γνήσια αύξουσα* αν $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *Γνήσια Φθίνουσα* αν $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Φραγμένες Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f:A \to \Re$ θα λέγεται:

- *Άνω φραγμένη*, αν $f(x) \leq M,\ \forall\ x \in A$
- *Κάτω φραγμένη* αν $m \leq f(x),\ \forall\ x \in A$
- *Φραγμένη*, αν $|f(x)| \leq M\ \ \forall\ x \in A$, όπου m, M είναι σταθερές.

Μια συνάρτηση θα λέγεται φραγμένη αν το πεδίο τιμών είναι φραγμένο σύνολο.

Αν υπάρχει,$x_o \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_o),\ \forall\ x \in A$ τότε το $f(x_o)$ λέγεται <u>μέγιστο</u> της συνάρτησης και λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o μέγιστο

Αν υπάρχει,$x_o \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_o),\ \forall\ x \in A$ τότε το $f(x_o)$ λέγεται <u>ελάχιστο</u> της συνάρτησης και λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o ελάχιστο

Παραδείγματα

Παράδειγμα 5: Έστω f: $\Re$-{0}→ $\Re$ με $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + |x|}}$ και g: $\Re$-{0}→ $\Re$ με

$g(x) = \dfrac{2x+3}{x}$. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές

$\forall$ x,-x $\in$ $\Re$-{0} εξετάζω f(-x) και g(-x)

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + |-x|}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + |x|}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + |x|}} = -f(x)$$ περιττή

$$g(-x) = \frac{2(-x)+3}{-x} = -\frac{2(-x)+3}{x} = \frac{2x-3}{x}$$ Δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή

Αντίστροφη Συνάρτηση

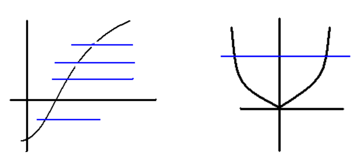
Συνάρτηση 1-1: Μια συνάρτηση f λέγεται 1-1 αν f(α)≠f(β) οπότε α≠β.
π.χ.Η ταυτοτική συνάρτηση είναι 1-1

Ορισμός: Μια συνάρτηση f:A→ B θα λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή 1-1αν και μόνο αν, για κάθε x,y $\in$ Δ(f) με f(x)=f(y) ⇒x=y.

Όπως και η $g(x) = \begin{cases} x & x \neq 3,5 \\ 3 & x = 5 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$

Η $f(x)=x^2$ δεν είναι 1-1, η $g(x)=x^2$, $x\geq 0$ είναι, γιατί η g είναι αύξουσα

Γραφική Παράσταση: Είναι εύκολο από την γραφική παράσταση να καταλάβει κανείς αν είναι 1-1˙ δεν υπάρχει οριζόντια γραμμή που να τέμνει δύο φορές την γραφική παράσταση της f



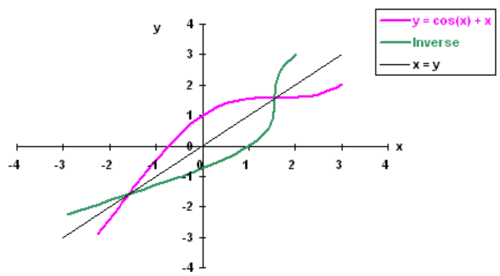
Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός: Έστω $f:A\to B$ μια 1-1. Τότε η συνάρτηση $f^{-1}:B\to A$ λέγεται αντίστροφη της f. Είναι $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$.

Είναι προφανές ότι η f^{-1} είναι επί του A και 1-1.

- Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} συνδέονται άμεσα. Τα σημεία (α,β) και (β,α) είναι συμμετρικά ως προς τη γραφική παράσταση της I(x)=x. Διπλός αντικατοπτρισμός ως προς τη διαγώνιο μας ξαναφέρνει στη f.

$$(f^{-1})^{-1}=f$$



Αντίστροφη Συνάρτηση

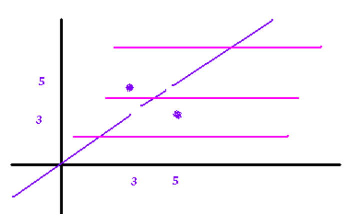
- Αφού το (α,β) ανήκει στην f ακριβώς όταν το (β,α) ανήκει στην f^{-1}, έπεται ότι η β=f(α) σημαίνει ακριβώς το ίδιο με την α= f^{-1}(β)

Άρα $f(f^{-1}(x))=x, \ \forall\ x\in\Delta(f^{-1})$

$f^{-1}(f(x))^{-1}=x \ \ \forall\ x\in\Delta(f)$

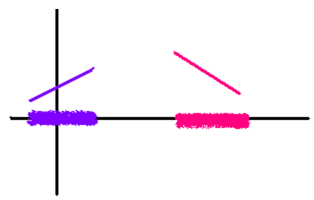
- Οι αύξουσες και οι φθίνουσες συναρτήσεις, δηλαδή οι μονότονες συναρτήσεις είναι 1-1.
- Ακόμη αν f είναι αύξουσα, η f^{-1} είναι αύξουσα και αν η f είναι φθίνουσα, η f^{-1} είναι φθίνουσα.
- Η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν η – f είναι φθίνουσα

Δεν ισχύει: Κάθε συνάρτηση 1-1 είναι μονότονη π.χ. η g(x) του προηγούμενου παραδείγματος



Αντίστροφη Συνάρτηση

Υπάρχουν συνεχείς 1-1 συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες



Κάθε 1-1 συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα είναι μονότονη

Θεώρημα: Αν η f είναι συνεχής και 1-1 σε κάποιο διάστημα τότε είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 1:</u> Να βρείτε την f^{-1} της $f:(-1,1)\rightarrow\left(\frac{1}{3},1\right)$ με $f(x)=\frac{2x+3}{x+4}$

$$f(x)=f(y)\Leftrightarrow\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2y+3}{y+4}\Leftrightarrow(2x+3)(y+4)=(2y+3)(x+4)\Leftrightarrow$$

$$2xy+8x+3y+12=2yx+8y+3x+12\Leftrightarrow$$

$$5x=5y\Leftrightarrow x=y$$

Αρα f 1-1

$$y=\frac{2x+3}{x+4}\Leftrightarrow x=\frac{3-4y}{y-2}$$

Επειδή $x\in(-1,1)$ έχουμε $-1\leq\frac{3-4y}{y-2}\leq 1$

Επιλύοντας τις 2 ανισότητες προκύπτει $\frac{1}{3}<y<1$.

'Αρα $f\left[(-1,1)\right]=\left(\frac{1}{3},1\right)$.'Αρα η f είναι επί

Άρα η f^{-1} ορίζεται και $f^{-1}(x)=\frac{3-4x}{x-2}$, $\Delta(f^{-1})=\left(\frac{1}{3},1\right)$