ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
Μ.Β.Α.

Εργαστήριο
Ποσοτικών Μεθόδων

Ασκήσεις Επιχειρησιακής Έρευνας

Άσκηση 1
Ένας τραπεζικός οργανισμός σχεδιάζει να επενδύσει έως 100 εκατ. ευρώ σε χορηγήσεις δανείων και σε αγορές ομολόγων. Η τρέχουσα απόδοση των χορηγούμενων δανείων και των υπό αγορά ομολόγων είναι 10% και 5% αντίστοιχα επί του ποσού της επένδυσης. Αντίθετα, ο πιστωτικός κίνδυνος των χορηγούμενων δανείων είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της αγοράς ομολόγων. Τέλος, με βάση ιστορικά στοιχεία που τηρούνται, η διοίκηση της τράπεζας θεωρεί ότι για να επιτευχθεί υψηλή απόδοση της επένδυσης και παράλληλα να περιοριστεί ο πιστωτικός κίνδυνος θα πρέπει το ποσό που θα επενδυθεί στην αγορά των ομολόγων να μην είναι μικρότερο του 1/3 του ποσού που θα επενδυθεί στη χορήγηση των δανείων και το σύνολο της επένδυσης σε ομόλογα να μην υπερβαίνει τα 20 εκατ. ευρώ. Με βάση τα στοιχεία αυτά, να διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο επενδυτικό σχέδιο που μεγιστοποιεί την απόδοση του τραπεζικού οργανισμού.
Λύση

Μεταβλητές: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, οι μεταβλητές απόφασης είναι το ύψος της επένδυσης για τη χορήγηση δανείων (x_1) και για την αγορά ομολόγων (x_2) που θα επιλεγεί από τον τραπεζικό οργανισμό.

Αντικειμενική συνάρτηση: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, η απόδοση από τη χορήγηση δανείων και την αγορά ομολόγων είναι 10% και 5% αντίστοιχα επί του ποσού της επένδυσης. Κατά συνέπεια, η συνολική απόδοση Z για τον τραπεζικό οργανισμό από την χορήγηση δανείων συνολικού ποσού x_1 και την αγορά ομολόγων συνολικού ποσού x_2 θα είναι

$$Z = 0.10x_1 + 0.05x_2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση και ο στόχος του τραπεζικού οργανισμού είναι η επιλογή εκείνων των τιμών x_1 και x_2 που μεγιστοποιούν τη συνολική απόδοση Z.

Περιορισμοί: Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 100 && (\text{συνολικό ποσό διαθέσιμο προς επένδυση}) \\
x_1 - 3x_2 &\le 0 && (\text{σχέση ποσών επένδυσης σε δάνεια και ομόλογα}) \\
x_2 &\le 20 && (\text{ανώτατο όριο επένδυσης σε ομόλογα}) \\
x_1, x_2 &\ge 0 && (\text{μη αρνητικότητα των μεταβλητών})
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το μαθηματικό μοντέλο διατυπώνεται ως εξής

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

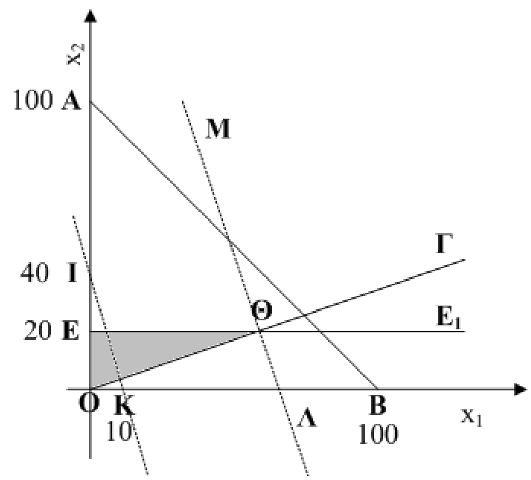
$$Z = 0.10x_1 + 0.05x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 100 \\
x_1 - 3x_2 &\le 0 \\
x_2 &\le 20
\end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Η ευθεία ΑΒ, που διέρχεται από τα σημεία Α (0,100) και Β (100,0), αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό. Η ευθεία ΟΓ, που διέρχεται από τα σημεία Ο (0,0) και Θ (60,20), αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό. Η ευθεία EE_1, που διέρχεται από το σημείο Ε (0,20) και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox_1, αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό. Τέλος, η ευθεία ΙΚ είναι ευθεία ίσου κέρδους για $Z = 3$. Όλοι οι παραπάνω περιορισμοί ισχύουν στο ημιεπίπεδο που περιέχει την αρχή των αξόνων και η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι το τρίγωνο ΟΕΘ. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για όλες τις κορυφές της εφικτής περιοχής, οι οποίες υπολογίζονται κατά τα γνωστά, δίνονται στον παρακάτω Πίνακα:

Κορυφή	**Συντεταγμένες**	**Τιμή του Ζ**
Ο	(0,0)	0
Ε	(0,20)	1
Θ	(60,20)	7

Συνεπώς, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η κορυφή Θ (60,20), για την οποία μεγιστοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ($Z = 7$).

Εναλλακτικά, η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί με παράλληλη μετατόπιση της ευθείας ΙΚ, αντίθετα από την αρχή των αξόνων, εφόσον πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης, οπότε θα εντόπιζε την κορυφή Θ (60, 20) ως την τελευταία που συναντά η ευθεία ίσου κέρδους όταν φτάσει στη θέση ΛΜ και προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή. Η κορυφή αυτή είναι η βέλτιστη και μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ($Z = 7$).

<u>Άσκηση 2</u>

Μια εταιρεία παράγει δύο προϊόντα, Π_1 και Π_2. Η συνολική παραγωγή μιας συγκεκριμένης ημέρας αποθηκεύεται για μία εβδομάδα προτού προωθηθεί στους πελάτες της. Σύμφωνα με το πρόγραμμα παραγωγής της εταιρείας, η συνολική παραγωγή των δύο προϊόντων δεν μπορεί να ξεπερνάει τις 4 μονάδες, ενώ το τετραπλάσιο της παραγωγής του προϊόντος Π_1 υπερβαίνει την παραγωγή του προϊόντος Π_2 κατά 3 μονάδες τουλάχιστον. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας για καθένα από τα προϊόντα Π_1 και Π_2 είναι 2 και 3 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Με βάση τα στοιχεία αυτά, να διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το κόστος της εταιρείας.

Λύση

Μεταβλητές: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, οι μεταβλητές απόφασης είναι οι μονάδες από το προϊόν Π1 (x_1) και από το προϊόν Π2 (x_2) που θα πρέπει να παραχθούν.
Αντικειμενική συνάρτηση: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το κόστος παραγωγής μια μονάδας από τα προϊόντα Π1 και Π2 είναι 2 και 3 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, το συνολικό κόστος Z της εταιρείας από την παραγωγή x_1 μονάδων προϊόντος Π1 και x_2 μονάδων προϊόντος Π2 δίνεται από τη σχέση:

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση και στόχος της εταιρείας είναι η επιλογή εκείνων των τιμών x_1 και x_2 που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος Z.
Περιορισμοί: Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι οι ακόλουθοι:

$$x_1 + x_2 \le 4 \quad (\text{συνολική παραγωγή των προϊόντων } \Pi_1 \text{ και } \Pi_2)$$

$$4x_1 - x_2 \ge 3 \quad (\text{σχέση ποσοτήτων παραγωγής των προϊόντων } \Pi_1 \text{ και } \Pi_2)$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0 \quad (\text{μη αρνητικότητα των μεταβλητών})$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το μαθηματικό μοντέλο διατυπώνεται ως εξής

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

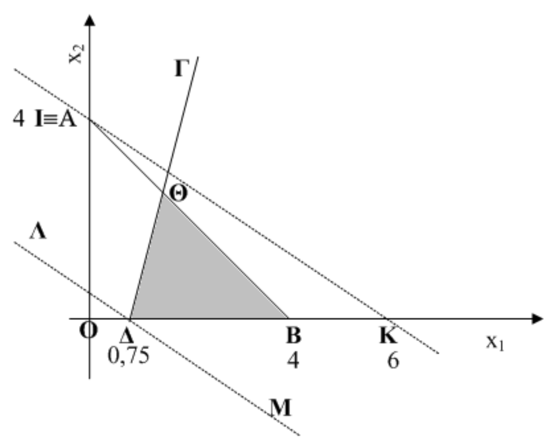
με περιορισμούς δομής:

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$4x_1 - x_2 \ge 3$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Η ευθεία ΑΒ, που διέρχεται από τα σημεία Α (0,4) και Β (4,0), αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό. Η ημιευθεία ΔΘ, που διέρχεται από τα σημεία Δ (3/4,0) και Θ (7/5,13/5), αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό. Τέλος, η ευθεία ΙΚ είναι ευθεία ίσου κόστους για $Z = 12$.

Όλοι οι παραπάνω περιορισμοί ισχύουν στο ημιεπίπεδο που περιέχει την αρχή των αξόνων, και η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι το πολύγωνο ΒΘΔ. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για όλες τις κορυφές της εφικτής περιοχής, οι οποίες υπολογίζονται κατά τα γνωστά, δίνονται στον παρακάτω Πίνακα:

Κορυφή	Συντεταγμένες	Τιμή του Z
Θ	(7/5,13/5)	53/5
Β	(4, 0)	8
Δ	(3/4, 0)	3/2

Συνεπώς, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η κορυφή Δ (3/4, 0), για την οποία ελαχιστοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και παράγεται μόνο το προϊόν Π_1.

Εναλλακτικά, η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί με παράλληλη μετατόπιση της ευθείας ΙΚ προς την αρχή των αξόνων, εφόσον πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης, οπότε θα εντόπιζε την κορυφή Δ (3/4, 0) ως την τελευταία που συναντά η ευθεία ίσου κόστους όταν φτάσει στη θέση ΛΜ και προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή. Η κορυφή αυτή είναι η βέλτιστη και ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ($Z = 3/2 = 1,5$).

<u>Άσκηση 3</u>

Μια εταιρεία συναρμολογεί οθόνες δύο τύπων, Α και Β, για υπολογιστές. Η εταιρεία προγραμματίζει την εβδομαδιαία παραγωγή της με βάση τις διαθέσιμες ώρες εργασίας των υπαλλήλων της, το πλήθος των φίλτρων και το πλήθος των πλαισίων κατάλληλων διαστάσεων για τις οθόνες τύπου Α και τύπου Β, τα οποία φυλάσσει στην αποθήκη της. Για την επόμενη εβδομάδα, η εταιρεία έχει στη διάθεσή της 150 ώρες εργασίας, 300 φίλτρα, 20 πλαίσια κατάλληλα για τις οθόνες τύπου Β και απεριόριστο αριθμό πλαισίων κατάλληλων για οθόνες τύπου Α. Η κατασκευή μιας οθόνης τύπου Α απαιτεί 1 κατάλληλο πλαίσιο, 3 ώρες συναρμολόγησης και 8 φίλτρα, ενώ η κατασκευή μιας οθόνης τύπου Β απαιτεί επίσης 1 κατάλληλο πλαίσιο, 5 ώρες συναρμολόγησης και 5 φίλτρα. Το κέρδος από την πώληση κάθε οθόνης τύπου Α και Β είναι 50 και 40 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Σύμφωνα με το πρόγραμμα παραγωγής της, η εταιρεία για την επόμενη εβδομάδα πρέπει να συναρμολογήσει συνολικά τουλάχιστον 50 οθόνες ανεξάρτητα από τον τύπο τους. Με βάση τα στοιχεία αυτά, να διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος της εταιρείας.

Λύση

Μεταβλητές: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, οι μεταβλητές απόφασης είναι οι οθόνες τύπου Α (x_1) και τύπου Β (x_2) που θα πρέπει να κατασκευαστούν.

Αντικειμενική συνάρτηση: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το κέρδος από την παραγωγή μιας οθόνης τύπου Α ή Β είναι 50 και 40 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, το συνολικό κέρδος Z της εταιρείας από την παραγωγή x_1 οθονών τύπου Α και x_2 οθονών τύπου Β δίνεται από τη σχέση:

$$Z = 50x_1 + 40x_2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση και στόχος της εταιρείας είναι η επιλογή εκείνων των τιμών x_1 και x_2 που μεγιστοποιούν το συνολικό κέρδος Z.

Περιορισμοί: Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &\le 150 && (\text{διαθεσιμότητα ωρών εργασίας}) \\
x_2 &\le 20 && (\text{διαθεσιμότητα πλαισίων για οθόνες τύπου Β}) \\
8x_1 + 5x_2 &\le 300 && (\text{διαθεσιμότητα φίλτρων}) \\
x_1 + x_2 &\ge 50 && (\text{κατώτατο όριο συνολικής παραγωγής}) \\
x_1, x_2 &\ge 0 && (\text{μη αρνητικότητα των μεταβλητών})
\end{aligned}$$

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 50x_1 + 40x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 150$$

$$x_2 \leq 20$$

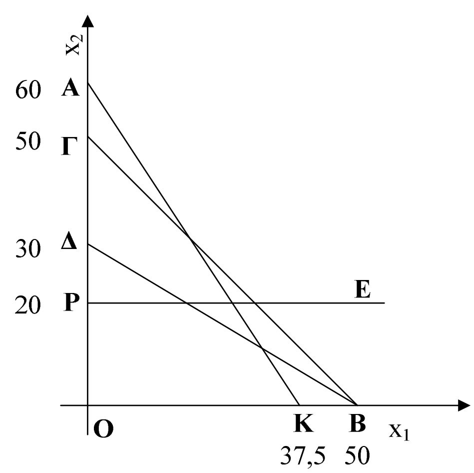
$$8x_1 + 5x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \geq 50$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

απεικονίζει όλα τα παραπάνω.



Η ευθεία ΑΚ, που διέρχεται από τα σημεία Α (0,60) και Κ (37,5 , 0), αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό. Η ευθεία ΡΕ, που διέρχεται από το σημείο Ρ (0,20) και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox_1, αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό. Η ευθεία ΔΒ, που διέρχεται από τα σημεία Δ (0,30) και Β (50,0), αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό. Τέλος, η ευθεία ΓΒ, που διέρχεται από τα σημεία Γ (0,50) και Β (50,0), αντιστοιχεί στον τέταρτο περιορισμό. Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα, οι παραπάνω περιορισμοί δεν συναληθεύουν πουθενά και, κατά συνέπεια, το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

Άσκηση 4

Μια μικρή εμπορική εταιρεία προωθεί στην αγορά τρία νέα προϊόντα, Π1, Π2 και Π3, μέσω δύο πωλητών, Α και Β, μερικής απασχόλησης. Οι δυνατότητες ημερήσιων πωλήσεων ανά προϊόν για κάθε πωλητή (σε τεμάχια) καθώς και το ημερήσιο κόστος τους για την εταιρεία (σε χρηματικές μονάδες) συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πωλήσεις ανά προϊόν	**Πωλητές**	
	Α	**Β**
Προϊόν Π1 (σε τεμάχια)	6	2
Προϊόν Π2 (σε τεμάχια)	2	2
Προϊόν Π3 (σε τεμάχια)	4	10
Ημερήσιο κόστος (σε χ.μ.)	300	200

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, να προσδιοριστεί ο αριθμός των ημερών που πρέπει να εργαστούν οι δύο πωλητές σε μία εβδομάδα προκειμένου να εξασφαλιστεί η πώληση

12 τεμαχίων του προϊόντος Π1, 8 τεμαχίων του προϊόντος Π2 και 5 τεμαχίων του προϊόντος Π3 τουλάχιστον, με το μικρότερο συνολικό κόστος για την εταιρεία.

Λύση

Μεταβλητές: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, οι μεταβλητές απόφασης είναι ο αριθμός των ημερών που θα πρέπει να εργαστεί ο πωλητής Α (x_1) και ο πωλητής Β (x_2) σε μία εβδομάδα.

Αντικειμενική συνάρτηση: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το ημερήσιο κόστος της εταιρείας για τους πωλητές Α και Β είναι 300 και 200 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος της εταιρείας δίνεται από τη σχέση:

$$Z = 300x_1 + 200x_2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση και ο στόχος της εταιρείας είναι η επιλογή εκείνων των τιμών x_1 και x_2 που ελαχιστοποιούν το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος Ζ.

Περιορισμοί: Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι οι ακόλουθοι:

$$6x_1 + 2x_2 \geq 12 \quad (\text{απαιτήσεις πωλήσεων για το προϊόν Π1})$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8 \quad (\text{απαιτήσεις πωλήσεων για το προϊόν Π2})$$

$$4x_1 + 10x_2 \geq 5 \quad (\text{απαιτήσεις πωλήσεων για το προϊόν Π3})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{μη αρνητικότητα των μεταβλητών})$$

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 300x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς δομής:

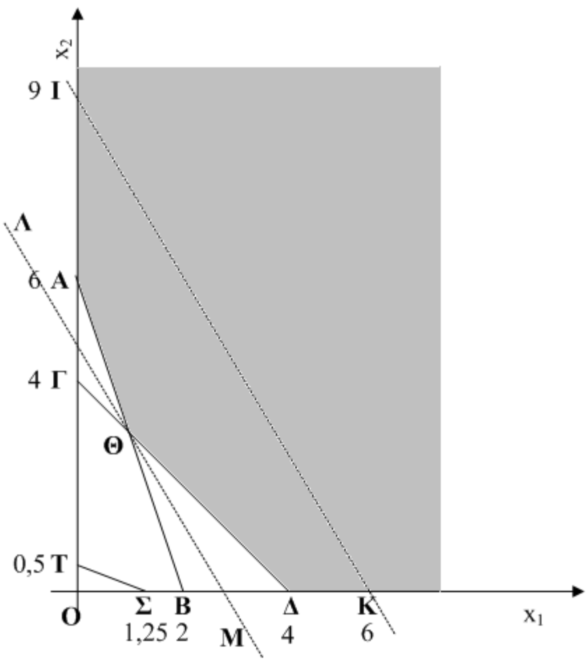
$$6x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$4x_1 + 10x_2 \geq 5$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Η ευθεία ΑΒ, που διέρχεται από τα σημεία Α (0,6) και Β (2,0), αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό. Η ευθεία ΓΔ, που διέρχεται από τα σημεία Γ (0,4) και Δ (4,0), αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό, ενώ η ευθεία ΤΣ, που διέρχεται από τα σημεία Τ (0, $1/2$) και Σ ($5/4$,0), αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό. Τέλος, η ευθεία ΙΚ είναι ευθεία ίσου κόστους για Z = 1800.

Όλοι οι παραπάνω περιορισμοί ισχύουν στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων. Η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι το μη φραγμένο πολύεδρο x_2ΑΘΔx_1. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για όλες τις κορυφές της εφικτής περιοχής, οι οποίες υπολογίζονται κατά τα γνωστά, δίνονται στον παρακάτω Πίνακα:

Κορυφή	**Συντεταγμένες**	**Τιμή του Ζ**
Α	(0, 6)	1200
Θ	(1, 3)	900
Δ	(4, 0)	1200

Συνεπώς, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η κορυφή Θ (1,3) για την οποία ελαχιστοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Εναλλακτικά, η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί με παράλληλη μετατόπιση της ευθείας ΙΚ προς την αρχή των αξόνων, εφόσον πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης, οπότε θα εντόπιζε την κορυφή Θ (1,3) ως την τελευταία που συναντά η ευθεία ίσου κόστους όταν φτάσει στη θέση ΛΜ και προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή. Η κορυφή αυτή είναι η βέλτιστη και ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ($Z = 900$).

Άσκηση 5

Μια βιομηχανία παράγει δύο είδη χρωμάτων X_1 και X_2, για εξωτερικούς και εσωτερικούς χώρους. Για τη βελτίωση της υφής του χρώματος και της επιμήκυνσης του χρόνου ζωής του προστίθενται στο χρώμα δύο νέα υλικά Μ1 και Μ2. Οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών Μ1 και Μ2 (σε κιλά) ανά τόνο χρώματος Χ1 και Χ2, η μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητά τους (σε κιλά) και το κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός τόνου χρώματος φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Είδη Χρωμάτων		Μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητα σε τόνους
	Χ1	Χ2	
Πρώτες Ύλες (σε κιλά)			
Μ1	6	4	24
Μ2	1	2	6
Κέρδος ανά τόνο	5	4	

Ιστορικά στατιστικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία δείχνουν ότι η ημερήσια ζήτηση για το χρώμα εσωτερικού χώρου (X_2) δεν μπορεί να υπερβαίνει την αντίστοιχη ζήτηση για το χρώμα εξωτερικού χώρου (X_1) περισσότερο από ένα τόνο, ενώ η ημερήσια ζήτηση για χρώμα εσωτερικού χώρου (X_2) δεν μπορεί να υπερβαίνει τους δύο τόνους.

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό τόνων που πρέπει να πωληθούν από τον κάθε τύπο χρώματος Χ1 και Χ2 προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το ημερήσιο κέρδος της εταιρείας.
ii. να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος
iii. αν η διαθέσιμη ποσότητα (σε τόνους) της πρώτης ύλης Μ2 μειωθεί κατά 25%, το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής του προβλήματος θα αλλάξει; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας

Λύση

Μεταβλητές

x_1, αριθμός τόνων που παράγονται καθημερινά από χρώμα εξωτερικού τύπου
x_2 , αριθμός τόνων που παράγονται καθημερινά από χρώμα εσωτερικού

Αντικειμενική συνάρτηση

maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$

Περιορισμοί. Οι περιορισμοί αφορούν τις πρώτες ύλες και την ζήτηση της αγοράς

$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (διαθεσιμότητα σε τόνους από πρώτη ύλη Μ1.)
$x_1+2x_2 \leq 6$ (διαθεσιμότητα σε τόνους από πρώτη ύλη Μ1)
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (περιορισμός ζήτησης από ιστορικά στοιχεία)
$x_2 \leq 2$ (περιορισμός ζήτησης από την αγορά για το χρώμα Χ2)

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, ισχύει φανερά και ο περιορισμός της μη αρνητικότητας των μεταβλητών:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

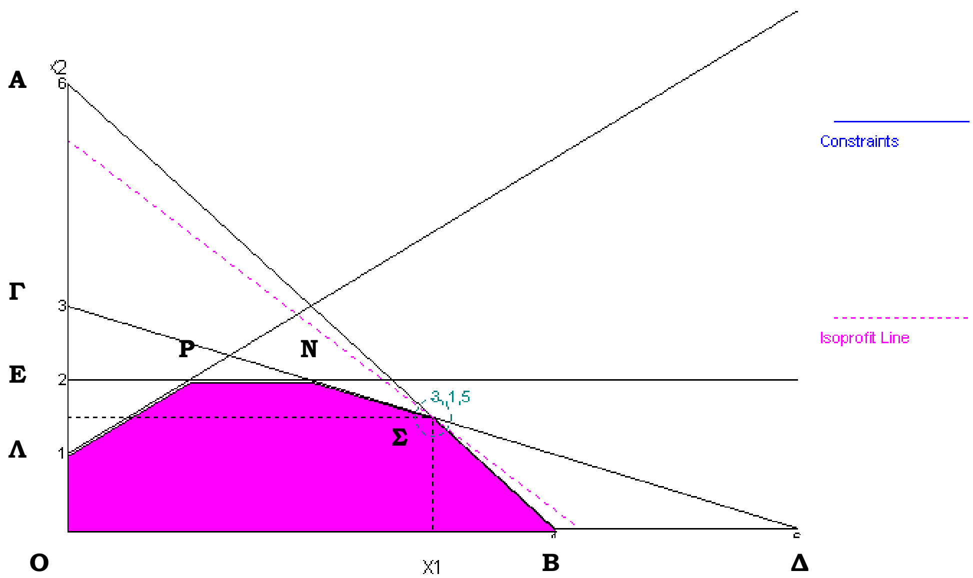
Το μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\text{maximize } Z = 5x_1 + 4x_2$$

Subject to

$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(ii)



$6x_1 + 4x_2 \le 24$	x1=0 x2=6	A(0,6)
	x2=0 x1=4	B(4,0)
$x_1+2x_2 \le 6$	x1=0 x2=3	Γ(0,3)
	x2=0 x1=6	Δ(6,0)
$-x_1 + x_2 \le 1$	x1=0 x2=1	Λ(0, 1)
	x2=0 x1=-1	K(-1,0)

Αφού χαράξουμε τις περιοριστικές ευθείες που αντιστοιχούν στους τέσσερις περιορισμούς του προβλήματος, παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις περιορισμοί συμμετέχουν στο σχηματισμό της εφικτής περιοχής του προβλήματος.

Οι κορυφές της εφικτής περιοχής είναι ΟΛΡΝΣΒ

Συντεταγμένες Ρ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \end{cases} \quad \text{άρα } P(1,2)$$

Συντεταγμένες Ν είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_2 \le 2 \end{cases} \quad \text{άρα N (2,2)}$$

Συντεταγμένες Σ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases} \quad \text{άρα } Σ\ (3, \tfrac{3}{2})$$

Σημείο	X1	X2	Z
0	0	0	0
Λ	0	1	4
Ρ	1	2	13
Ν	2	2	18
Σ	**3**	**1,5**	**21**
Β	4	0	20

(iii)

Η μεταβολή αφορά το δεξιό μέλος του 2ο περιορισμού ($x_1+2x_2 \le 6$) που θα γίνει από 6 τεσσεράμισι (0,75*6=4.5)

Ό συντελεστής διεύθυνσης της περιοριστικής ευθείας είναι $λ=-\frac{1}{2}$

Η περιοριστική ευθεία μετακινείται παράλληλα είτε προς τα δεξιά, είτε προς τα αριστερά

Επειδή έχουμε μείωση του δεξιού μέλους ουσιαστικά μας ενδιαφέρει το αριστερό μέλος του εύρους εφικτότητας.

Άρα η ευθεία όταν κινείται προς τα αριστερά θα συναντήσει το σημείο Ρ (1,2) και συνεπώς

1+2*2=5

Επειδή το δεξιό μέλος γίνεται 4,5 καταλαβαίνουμε ότι θα αλλάξει η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Άσκηση 6

Μια εταιρεία εισάγει στην αγορά δύο νέους τύπους προϊόντων $Π_1$ και $Π_2$. Ιστορικά στατιστικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία δείχνουν ότι για την πώληση ενός προϊόντος $Π_1$ απαιτούνται 3 ώρες ενώ για την πώληση ενός προϊόντος $Π_2$ 6 ώρες. Για τον επόμενο μήνα η εταιρεία διαθέτει συνολικό χρόνο 630 ωρών για την πώληση των δύο αυτών προϊόντων και έχει θέσει ως ελάχιστο στόχο την πώληση 25 προϊόντων από τον κάθε τύπο. Επιπλέον είναι γνωστό ότι από την πώληση κάθε προϊόντος $Π_1$ ή $Π_2$ η εταιρεία κερδίζει 40 ή 50 Ευρώ αντίστοιχα. Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό προϊόντων που πρέπει να πωληθούν από τον κάθε τύπο κατά τον επόμενο μήνα.
ii. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η βέλτιστη του προβλήματος.
iii. Υποθέτουμε ότι η διοίκηση της εταιρείας θέτει ως επιπλέον στόχο για τον επόμενο μήνα, ότι ο αριθμός των προϊόντων τύπου $Π_2$ που θα πουληθούν να είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των προϊόντων τύπου $Π_1$. Να διατυπωθεί μαθηματικά ο νέος περιορισμός, να επαναπροσδιορισθεί η εφικτή περιοχή και να βρεθεί η νέα άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος.

Λύση

i. Έστω x_1 = Ο αριθμός προϊόντων Π_1 ,
x_2 = Ο αριθμός προϊόντων Π_2.

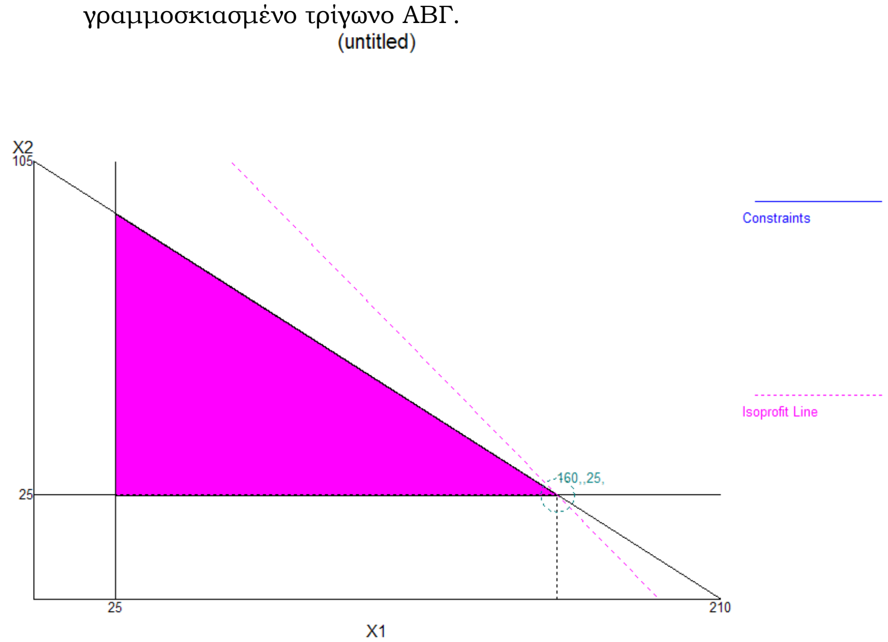
Τότε με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά ως εξής:

max $40x_1 + 50x_2$

δοθέντος ότι:

$3x_1 + 6x_2 \leq 630$ (χρόνος πώλησης)
$x_1 \geq 25$ (προϊόν Π_1)
$x_2 \geq 25$ (προϊόν Π_2)
$x_1, x_2 \geq 0$ (Περιορισμοί μη αρνητικότητας)

ii. Γραφικά οι παραπάνω περιορισμοί μπορούν να παρασταθούν όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα, δίνοντας την εφικτή περιοχή της λύσης ως το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο ΑΒΓ.



Ο υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης $Z = 40x_1 + 50x_2$ σε κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής, οδηγεί στην εύρεση της βέλτιστης λύσης στον πίνακα που ακολουθεί:

Κορυφή	**Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης**
Α(25,25)	2250
Β(25, 92.5)	5625

Γ(160, 25)	7650

Επομένως, **η βέλτιστη λύση** είναι στην κορυφή Γ με τετμημένη και τεταγμένη, αντίστοιχα: $x_1 = 160$, $x_2 = 25$. Η δε τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 7650 που αντιστοιχεί στο μέγιστο αναμενόμενο κέρδος.

iii. Ο νέος περιορισμός διατυπώνεται ως εξής, $x_2 \geq x_1$. Όταν προστίθεται ο επί πλέον περιορισμός τότε η εφικτή περιοχή των λύσεων περιορίζεται στο νέο μικρότερο γραμμο-σκιασμένο τρίγωνο ΑΒΔ που δίνεται στο παρακάτω Σχήμα.

Άσκηση 7

Μια εταιρεία ζυμαρικών σχεδιάζει την προώθηση ενός νέου τύπου ρυζιού ολικής αλέσεως στην αγορά. Για την παραγωγή αυτού του τύπου ρυζιού χρειάζονται δημητριακά δύο ειδών, Α και Β, τα οποία είναι πλούσια σε φυτικές ίνες, πρωτεΐνες και υδατάνθρακές. Η σύσταση των δημητριακών φαίνεται αναλυτικά στον πίνακα που ακολουθεί:

	Συστατικά Δημητριακών		
Δημητριακά	Φυτικές ίνες	Πρωτεΐνες	Υδατάνθρακες
Α	2	2	3
Β	4	6	10

Το κόστος ενός κιλού δημητριακών τύπου Α και Β είναι 6 και 7,5 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή ενός κιλού ρυζιού απαιτούνται τουλάχιστον 5,1 γραμμάρια φυτικών ινών, το πολύ 8,4 γραμμάρια πρωτεΐνών και το πολύ 10,8 γραμμάρια υδατανθράκων. Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει τη βέλτιστη ποσότητα δημητριακών τύπου Α και Β (σε κιλά) που πρέπει να προμηθευτεί η εταιρεία ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγωγής του ρυζιού. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του
ii. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η βέλτιστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος
iii. Να χαρακτηριστούν οι περιορισμοί του προβλήματος σε δεσμευτικούς και μη. Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντηση σας
iv. Να υπολογισθεί αν θα αλλάξει η βέλτιστη λύση του προβλήματος, αν για την παραγωγή ενός κιλού ρυζιού απαιτούνται 12 γραμμάρια υδατανθράκων
v. Να υπολογισθεί αν θα αλλάξει η βέλτιστη λύση του προβλήματος αν αυξηθεί το κόστος αγοράς ενός κιλού δημητριακών τύπου Β κατά 6 χρηματικές μονάδες

Λύση

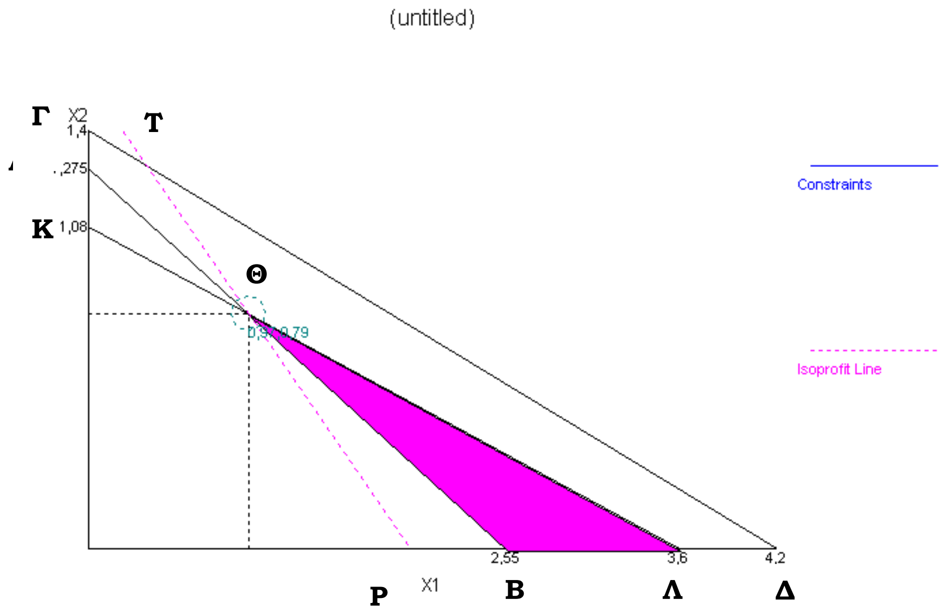
Μεταβλητές Απόφασης

X1 κιλά από δημητριακά τύπου Α
X2 κιλά από δημητριακά τύπου Β

Min (6X1 + 7.5X2)

2X1 + 4X2 >= 5.1 αναγκαιότητα σε φυτικές ίνες

2X1 + 6X2 <= 8.4   αναγκαιότητα σε πρωτεΐνες
3X1 + 10X2 <= 10.8 αναγκαιότητα σε υδατάνθρακες



Από τη γραφική επίλυση προκύπτει X1=0,97 κιλά δημητριακών τύπου Α και X2=0,79 κιλά δημητριακών τύπου Β

Z=6*0,97+7,5*0,79 =11,76 χρηματικές μονάδες

Δεσμευτικοί περιορισμοί είναι ο $1^{ος}$ και ο $3^{ος}$ γιατί:

2*0,97 + 4*0,79= 5.1   Δεσμευτικός
2*0,97 + 6*0,79= 6,68   Μη δεσμευτικός
3*0,97 + 10*0,79= 10.8   Δεσμευτικός
Αν η απαιτούμενη ποσότητα σε υδατάνθρακες γίνει 10 γραμμάρια, η ευθεία του τρίτου περιορισμού θα μετακινηθεί προς τα επάνω και προφανώς θα αλλάξει η εφικτή εριοχή.
Ο περιορισμός είναι δεσμευτικός
Η άριστη λύση είναι η τομή των ευθεών του $1^{ου}$ και του $3^{ου}$ περιορισμού.
Καθώς το β3 μεταβάλλεται η κλίση της περιοριστικής ευθείας παραμένει η ίδια (-3/10) , ενώ η ευθεία μετατοπίζεται είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά
Από το σχήμα φαίνεται ότι η ευθεία όπως μετακινείται έχει αποτέλεσμα το Θ να κινείται στο ΑΒ

A: 3*0+10*1,275=12,75

B: 3*2,55+10*0=7,65

Άρα εύρος εφικτότητας για το β3 είναι [7.65,   12.520]
Αν λοιπόν η ανάγκη σε υδατάνρακες αυξηθεί από 10.8 σε 12 θα είναι μέσα στο εύρος εφικτότητας άρα δεν θα αλλάξει ει η βέλτιστη λύση του πρόβληματος. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προφανώς και θα αλλάξει
Πρέπει να βρούμε το εύρος εφικτότητας του συντελεστή c2.
Αν η Z(ευθεία ΤΡ περιστραφεί γύρω από το Θ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού τότε θα ταυτιστεί με την περιοριστική ευθεία με την ΑΒ και το πρόβλημα θα έχει άπειρες λύσεις που θα βρίσκονται πάνω στο ΘΒ. Τότε θα έχουμε.

Άρα $-\frac{6}{c_2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c2 = 12$

Άσκηση 8

Μια εταιρεία κατασκευάζει γυναικείες τσάντες τριών διαφορετικών τύπων, Α, Β, Γ. Η ημερήσια διαθεσιμότητα της εταιρείας για την κατασκευή των τσαντών εκτιμήθηκε σε 42 κιλά δέρματος, 40 ώρες κατασκευής και 45 ώρες φινιρίσματος. Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού που ανέπτυξε η εταιρεία για την εύρεση της ημερήσιας παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της φαίνεται παρακάτω:.

Μεταβλητές απόφασης

x_1 : η ποσότητα παραγωγής σε τσάντες τύπου Α

x_2 : η ποσότητα παραγωγής σε τσάντες τύπου Β

x_3 : η ποσότητα παραγωγής σε τσάντες τύπου Γ

$$\max Z = 24x_1 + 22x_2 + 45x_3$$

με περιορισμούς

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 42$ (διαθέσιμη ποσότητα δέρματος σε κιλά)

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40$ (διαθέσιμες ώρες κατασκευής)

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq 45$ (διαθέσιμη ποσότητα καλωδίων σε μέτρα)

με περιορισμούς μη αρνητικότητας

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Simplex προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Λύση

i. Έστω x1 ο αριθμός των τσαντών τύπου Α και
x_2 ο αριθμός των τσαντών τύπου Β
x3 ο αριθμός των τσαντών τύπου Γ

max $z=24x_1+22x_2+45x3$

Subject to

$2x_1+1x_2+3x3 \leq 42$ για το δέρμα
$2x_1+1x_2+2x3 \leq 40$ για τις ώρες κατασκευής
$1x_1+0,5x_2+1x3 \leq 45$ για τις ώρες φινιρίσματος
μη αρνητικότητας
$x_1, x_2\, x_3 \geq 0$

Η τυπική μορφή του προβλήματος αυτού είναι η
max $(24x_1+22x_2+45x3+0s_1+0s_2+0s_3)$

όταν

$2x_1+1x_2+3x3 +s_1 \quad =42$
$2x_1+1x_2+2x3 + \quad s_2 \quad = 40$
$1x_1+0,5x_2+1x3 \quad +s_3= 45$

Οπότε από την Simplex παίρνουμε

Βάση		24	22	45	0	0	0		
Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**
S_1	0	2	1	3	1	0	0	42	42/3=14
S_2	0	2	1	2	0	1	0	40	40/2=20

S_3	0	1	0,5	1	0	0	1	45	45/1=45
	zj	0	0	0	0	0	0	Z=0	
	Cj-zj	24	33	45	0	0	0		
x_3	45	2/3	1/3	1	1/3	0	0	14	14/1/3=42
S_2	0	2/3	1/3	0	-2/3	1	0	12	12/1/3=36
S_3	0	1/3	1/6	0	-1/3	0	1	31	31/1/6=186
	zj	30	15	45	15	0	0	Z=45*14=630	
	Cj-zj	-6	7	0	-15	0	0		
x_3	45	0	0	1	1	-1	0	2	
x_2	22	2	1	0	-2	3	0	36	
S_3	0	0	0	0	0	-0,5	1	25	
	zj	44	22	45	1	21	0	Z=22*36+45*2=882	
	Cj-zj	-20	0	0	-1	-21	0		

Άσκηση 9

Ο πίνακας Simplex που ακολουθεί είναι ένας ενδιάμεσος πίνακας που προκύπτει κατά την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με την βοήθεια του αλγόριθμου Simplex. Όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Δεν γνωρίζουμε αν ο πίνακας αφορά πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης συνεπώς όταν μια μη βασική μεταβλητή εισέλθει στην βάση μπορεί να αυξήσει, να μειώσει ή να αφήσει αμετάβλητή την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**
	3	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12	
	2	0	1	1	3	1	0	3	0	6	
	5	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0	
	zj										
	cj-zj	0	-15	0	4	-1	-10	0	0	Z=620	

i. Να προσδιορίσετε την ταυτότητα κάθε μεταβλητής, βασική ή μη βασική και να αναφέρετε την τρέχουσα τιμή τους, όπως προσδιορίζεται από τον πίνακα
ii. Θεωρείστε ότι ο παραπάνω πίνακας Simplex αφορά πρόβλημα
   α. μεγιστοποίησης και
   β. ελαχιστοποίησης

   Να εξετάσετε ξεχωριστά σε κάθε μια από τις περιπτώσεις α και β αν υπάρχει μη βασική μεταβλητή που εισερχόμενη στη βάση θα βελτιώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και να προσδιορίσετε ποια θα είναι η εξερχόμενη μεταβλητή.
iii. Να προσδιορίσετε με την βοήθεια του πίνακα Simplex τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση του προβλήματος της μεγιστοποίησης

Λύση

(i) Βασικές μεταβλητές είναι οι x_8 x_3 x_1 γιατί τα διανύσματα αυτών σχηματίζουν τον I3 και μη βασικές οι x_2 x_4 x_5 x_6 x_7

Οι τιμές των βασικών μεταβλητών από τον πίνακα είναι x8 = 12 x3=6 x1 =0

(ii) Α. Θεωρώ το πρόβλημα μεγιστοποίησης

Σύμφωνα με το κριτήριο τερματισμού στο πρόβλημα μεγιστοποίησης, ως εισερχόμενη μεταβλητή χαρακτηρίζεται η x4 αφού cj-zj=4>0 . Από τη στήλη πηλίκο φαίνεται ότι θα φύγει η μεταβλητή x3 (6/3=2)

Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**

x_8	3	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12	-
x_3	2	0	1	1	3	1	0	3	0	6	6/3=2
x_1	5	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0	-
	zj										
	cj-zj	0	-15	0	4	-1	-10	0	0	Z=620	

Άρα η νέα βάση είναι η x8,x4,x1

Β. Θεωρώ το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Σύμφωνα με το κριτήριο τερματισμού στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ως εισερχόμενες μεταβλητές χαρακτηρίζονται οι x2 αφού cj-zj=-15<0, x6 αφού cj-zj=-10<0 και η x5 αφού cj-zj=-1<0

Επειδή $\delta_2 < \delta_6 < \delta_5$ εισερχόμενη είναι η x2

Από τη στήλη πηλίκο φαίνεται ότι θα φύγει η μεταβλητή x8

Άρα η νέα βάση είναι η x2,x3,x1

Βάση					0						
Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**
x_8	3	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12	12/3=4
x_3	2	0	1	1	3	1	0	3	0	6	6/1=6
x_1	5	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0	-
	zj										
	cj-zj	0	-15	0	4	-1	-10	0	0	Z=620	

(iii) Προσδιορίζω την τιμή του αντικειμενικού συντελεστή της x4

3*(-2)+3*2+5*0=0

Cj-zj=4,άρα c4=4

Ο πιλότος είναι το 3

Η νέα αξονική γραμμή είναι

Βάση					0						
Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**
X_8											
X_4	4	0	1/3	1/3	1	1/3	0	1	0	2	

Άρα η νέα τιμή της x4 είναι 2

Άρα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι Znea=Zpalia+2*4=620+8=628

Άσκηση 10 Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 9x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 9$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του πρόβλημα.

Λύση

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή. Κατά συνέπεια, το δυϊκό πρόβλημα, το οποίο προκύπτει άμεσα από το πρωτεύον με την εφαρμογή των σχετικών κανόνων και διατυπώνεται παρακάτω, είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$W = 6y_1 + 9y_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$y_1 + 2y_2 \leq 3$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 9$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Όπως παρατηρούμε, το δυϊκό πρόβλημα έχει δύο μεταβλητές απόφασης όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί δομής του πρωτεύοντος, καθώς και δύο περιορισμούς, όσες δηλαδή είναι και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος. Επιπλέον, οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυϊκού προβλήματος είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών δομής του πρωτεύοντος (6, 9), ενώ τα δεξιά μέλη των περιορισμών του (3, 9) είναι οι αντικειμενικοί συντελεστές του πρωτεύοντος.

Ασκηση 11 Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 2x_1 + x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 = -3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \in R \text{ δηλαδή } x_2 \in (-\infty, +\infty)$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του πρόβλημα.

Στην περίπτωση αυτή, το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στη γενική του μορφή. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, το δυϊκό του πρόβλημα μπορεί να δημιουργηθεί με δύο τρόπους:

α΄. Μέσω της κανονικής μορφής του αρχικού.

β΄. Απευθείας από τη γενική μορφή του αρχικού.

Οι δύο τρόποι αυτοί θα παρουσιαστούν στη συνέχεια:

α΄ τρόπος. Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, όπως το υπό μελέτη, είναι εκφρασμένο στην κανονική του μορφή όταν όλοι οι περιορισμοί δομής του είναι της μορφής $\leq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασής του είναι μη αρνητικές ($x_j \geq 0$). Στην προκειμένη περίπτωση, μόνο ο πρώτος περιορισμός ($x_1 + 2x_2 \leq 3$) είναι της μορφής $\leq$. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να μετατραπούν και οι υπόλοιποι περιορισμοί στη μορφή αυτή.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, έχουμε:

$$\begin{array}{c} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{με περιορισμούς:} \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + x_2 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \in R \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{με περιορισμούς:} \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + x_2 \leq -3 \\ 3x_1 + x_2 \geq -3 \\ -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in R \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{με περιορισμούς:} \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + x_2 \leq -3 \\ -3x_1 - x_2 \leq 3 \\ -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in R \end{array}$$

Παρά τη μετατροπή των περιορισμών δομής στη μορφή $\leq$, το πρόβλημα δεν είναι διατυπωμένο ακόμα στην κανονική του μορφή, επειδή $x_2 \in R$. Για να το μετατρέψουμε στην κανονική του μορφή, η μεταβλητή x_2 θα πρέπει να εκφραστεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών x_2', x_2'', δηλαδή $x_2 = x_2' - x_2'' \geq 0$. Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\begin{array}{c} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2' - x_2'' \\ \text{με περιορισμούς:} \\ x_1 + 2\left(x_2' - x_2''\right) \leq 3 \\ 3x_1 + \left(x_2' - x_2''\right) \leq -3 \\ -3x_1 - \left(x_2' - x_2''\right) \leq 3 \\ -4x_1 - 3\left(x_2' - x_2''\right) \leq -6 \\ x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2' - x_2'' \\ \text{με περιορισμούς:} \\ x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \leq 3 \\ 3x_1 + x_2' - x_2'' \leq -3 \\ -3x_1 - x_2' + x_2'' \leq 3 \\ -4x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \leq -6 \\ x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{array}$$

Έχοντας μετατρέψει το πρωτεύον πρόβλημα στην κανονική του μορφή, μπορούμε να κατασκευάσουμε το δυϊκό του πρόβλημα με βάση τους κανόνες της ενότητας 4.2:

$$\text{Min } W = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 6y_4$$

με περιορισμούς:

$$y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 4y_4 \geq 2$$
$$2y_1 + y_2 - y_3 - 3y_4 \geq 1$$
$$-2y_1 - y_2 + y_3 + 3y_4 \geq -1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Παρατηρώντας ότι οι δύο τελευταίοι περιορισμοί ισοδυναμούν με περιορισμό ισότητας, έχουμε:

$$\text{Min } W = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 6y_4$$

με περιορισμούς:

$$y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 4y_4 \geq 2$$
$$2y_1 + y_2 - y_3 - 3y_4 = 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Όπως παρατηρούμε, το δυϊκό πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

β΄ τρόπος. Εναλλακτικά, το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να κατασκευαστεί απευθείας από το πρωτεύον, εκφρασμένο στη γενική του μορφή, σύμφωνα με τους κανόνες της ενότητας 4.3.

Στην προκειμένη περίπτωση, η πρώτη μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος (x_1) είναι μη αρνητική, ενώ η δεύτερη (x_2) δεν περιορίζεται ως προς το πρόσημό της. Κατά συνέπεια, ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού θα είναι της μορφής $\geq$, ενώ ο δεύτερος ισότητα.

Επιπλέον:

- Ο πρώτος περιορισμός του πρωτεύοντος ($x_1 + 2x_2 \leq 3$) είναι της μορφής $\leq$ και, κατά συνέπεια, η πρώτη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού θα είναι μη αρνητική ($y_1 \geq 0$).
- Ο δεύτερος περιορισμός του πρωτεύοντος ($3x_1 + x_2 = -3$) είναι ισότητα και, επομένως, η δεύτερη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού δεν θα περιορίζεται ως προς το πρόσημό της ($y_2 \in R$).
- Τέλος, ο τελευταίος περιορισμός του πρωτεύοντος ($4x_1 + 2x_2 \geq 6$) είναι της μορφής $\geq$ και, επομένως, η τρίτη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού θα είναι μη θετική ($y_3 \leq 0$).

Κατά συνέπεια, το δυϊκό πρόβλημα, που κατασκευάζεται σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι το ακόλουθο:

$$\text{Min } W = 3y_1 - 3y_2 + 6y_3$$

με περιορισμούς:

$$y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 = 1$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \in R, y_3 \leq 0$$

Το ερώτημα που φυσιολογικά τίθεται μετά την ανάλυση των δύο τρόπων μετατροπής είναι αν τα δύο δυϊκά προβλήματα που κατασκευάστηκαν με τις δύο εναλλακτικές μεθόδους είναι ισοδύναμα. Η απάντηση είναι καταφατική και αποδεικνύεται αν φέρουμε και τα δύο δυϊκά προβλήματα στην κανονική τους μορφή.

Το πρώτο είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή και, κατά συνέπεια, δεν χρειάζεται καμία περαιτέρω παρέμβαση. Αντίθετα, το δεύτερο είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή όσον αφορά τους περιορισμούς, αλλά χρειάζεται κάποιες μετατροπές στις μεταβλητές του ώστε να είναι όλες μη αρνητικές.

Η y_3 είναι μη θετική και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να αντικατασταθεί από τη μεταβλητή $y_3' = -y_3 \geq 0$.

Η $y_2 \in R$ και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να εκφραστεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών y_2' και y_2''. Άρα: $y_2 = y_2' - y_2'' \geq 0$.

Τέλος, η y_1 είναι ήδη μη αρνητική ($\geq$ 0).

Άρα, το δυϊκό πρόβλημα της δεύτερης περίπτωσης στην κανονική του μορφή είναι το ακόλουθο:

$$\text{Min } W = 3y_1 - 3y_2' + 3y_2'' - 6y_3'$$

με περιορισμούς:

$$y_1 + 3y_2' - 3y_2'' - 4y_3' \geq 2$$
$$2y_1 + y_2' - y_2'' - 3y_3' = 1$$
$$y_1, y_2', y_2'', y_3' \geq 0$$

Παρατηρώντας τα δύο δυϊκά προβλήματα στην κανονική τους μορφή, διαπιστώνουμε ότι είναι ισοδύναμα και ότι η μόνη διαφορά τους αφορά τα σύμβολα των μεταβλητών τους.