ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ (Μ.Β.Α.)

Μάθημα: Επιχειρησιακή Έρευνα — **Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου**

Διδάσκοντες: Β. Α. Αγγελής, Μ. Μαύρη — Πέμπτη, 25.09.2008

(Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες)
Να απαντηθούν όλα τα θέματα

1α. Μια βιομηχανία παράγει δύο είδη χρωμάτων X_1 και X_2, για εξωτερικούς και εσωτερικούς χώρους αντίστοιχα. Για τη βελτίωση της υφής του χρώματος και της επιμήκυνσης του χρόνου ζωής του προστίθενται στο χρώμα δύο νέα υλικά Μ1 και Μ2. Οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών Μ1 και Μ2 (σε κιλά) ανά τόνο χρώματος Χ1 και Χ2, η μέγιστη ημερήσια διαθέσιμη ποσότητά τους (σε κιλά) και το κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός τόνου χρώματος φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Απαιτήσεις πρώτων υλών		Διαθεσιμότητα πρώτων υλών
	Χ1	Χ2	
Πρώτη Ύλη Μ1 (σε κιλά)	6	4	24
Πρώτη Ύλη Μ2 (σε κιλά)	1	2	6
Κέρδος ανά τόνο χρώματος (σε χιλιάδες ευρώ)	**5**	**4**	

Ιστορικά στατιστικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία δείχνουν ότι η ημερήσια ζήτηση για χρώμα εσωτερικού χώρου (X_2) δεν μπορεί να υπερβαίνει τους δύο τόνου. Επιπλέον η ημερήσια ζήτηση για το χρώμα εσωτερικού χώρου (X_2) δεν μπορεί να υπερβαίνει την αντίστοιχη ζήτηση για το χρώμα εξωτερικού χώρου (X_1) περισσότερο από ένα τόνο.

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό τόνων που πρέπει να παραχθούν και να πωληθούν από τον κάθε τύπο χρώματος Χ1 και Χ2 προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το ημερήσιο κέρδος της εταιρείας .... **(0,7 μον.)**

ii. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος .... **(0,7 μον.)**

iii. αν η διαθέσιμη ποσότητα (σε τόνους) της πρώτης ύλης Μ2 μειωθεί κατά 25%, το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής του προβλήματος θα αλλάξει; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας **(0,4 μον.)**

1β. Ο πίνακας Simplex που ακολουθεί είναι ένας ενδιάμεσος πίνακας που προκύπτει κατά την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με την βοήθεια του αλγόριθμου Simplex. Όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Δεν γνωρίζουμε αν ο πίνακας αφορά πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης και συνεπώς όταν μια μη βασική μεταβλητή εισέλθει στην βάση μπορεί να αυξήσει, να μειώσει ή να αφήσει αμετάβλητη την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**
	3	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12	
	2	0	1	1	3	1	0	3	0	6	
	5	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0	
	zj									Z=620	

	cj-zj	0	-15	0	4	-1	-10	0	0	

i. Να προσδιορίσετε την ταυτότητα κάθε μεταβλητής, βασική ή μη βασική και να αναφέρετε την τρέχουσα τιμή της, όπως προσδιορίζεται από τον πίνακα .... **(0,4 μον.)**

ii. Θεωρείστε ότι ο παραπάνω πίνακας Simplex αφορά πρόβλημα

α. μεγιστοποίησης και

β. ελαχιστοποίησης

Να εξετάσετε, ξεχωριστά σε κάθε μια από τις περιπτώσεις α και β, αν υπάρχει μη βασική μεταβλητή που εισερχόμενη στη βάση θα βελτιώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και να προσδιορίσετε ποια θα είναι η εξερχόμενη μεταβλητή. **(0,8 μον.)**

iii. Να προσδιορίσετε με την βοήθεια του Πίνακα Simplex τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση του προβλήματος της μεγιστοποίησης. .... **(0,4 μον.)**

2α. Μια εταιρεία κατασκευάζει τρεις τύπους παιγνιδιών τρένα, τρακτέρ και αυτοκίνητα, χρησιμοποιώντας τρείς μηχανές. Η ημερήσια διαθεσιμότητα σε λεπτά λειτουργίας των τριών μηχανών είναι 430, 460 και 420 αντίστοιχα. Για την κατασκευή ενός τρένου απαιτούνται 1 λεπτό χρήσης της πρώτης μηχανής, 3 λεπτά χρήσης της δεύτερης μηχανής και 1 λεπτό χρήσης της τρίτης μηχανής. Ο αντίστοιχος χρόνος χρήσης για την κατασκευή τρακτέρ και αυτοκινήτων είναι (2,0,4) και (1,2,0) λεπτά της πρώτης, δεύτερης και τρίτης μηχανής αντίστοιχα. Τέλος, το μοναδιαίο κέρδος από την πώληση ενός παιγνιδιού είναι 3 ευρώ για τα τρένα, 2 ευρώ για τα τρακτέρ και 5 ευρώ για τα αυτοκίνητα.
Το μοντέλο του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, από την επίλυση του οποίου θα προκύψει ο αριθμός των παιγνιδιών κάθε τύπου που θα πρέπει να κατασκευαστούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της εταιρείας, είναι το ακόλουθο:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

με περιορισμούς δομής

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \text{ (διαθέσιμος χρόνος χρήσης της μηχανής 1 σε λεπτά)}$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460 \text{ (διαθέσιμος χρόνος χρήσης της μηχανής 2 σε λεπτά)}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 \text{ (διαθέσιμος χρόνος χρήσης της μηχανής 3 σε λεπτά)}$$

και με περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

όπου

χ_1 : ο αριθμός των τρένων που κατασκευάζονται ημερησίως

χ_2 : ο αριθμός των τρακτέρ που κατασκευάζονται ημερησίως

χ_3 : ο αριθμός των αυτοκινήτων που κατασκευάζονται ημερησίως

Μετά τη λύση του προβλήματος με τον αλγόριθμο Simplex προέκυψε ο παρακάτω τελικός πίνακας

Βάση		3	2	5	0	0	0		
Μεταβλητές	**Αντικειμενικοί Συντελεστές**	**x_1**	**x_2**	**χ_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**Δεξιό μέλος**	**Πηλίκο**
χ_2	2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	
χ_3	5	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	
s_3	0	2	0	0	-2	1	1	20	
	zj	7	2	5	1	2	0	Z=1350	
	cj-zj	-4	0	0	-1	-2	0		

i. Να διατυπώσετε το δυικό πρόβλημα και να το ερμηνεύσετε. Να προσδιορίσετε την άριστη λύση του. .... **(0,6 μον.)**

ii. Το εύρος εφικτότητας για τους αντικειμενικούς συντελεστές του δυικού προβλήματος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

	Αντικειμενικός Συντελεστής	Κάτω Όριο	Πάνω Όριο
Μηχανή 1	430	230	440
Μηχανή 2	440	440	860
Μηχανή 3	420	400	∞

Αν ο διαθέσιμος χρόνος χρήσης των μηχανών 1 και 2 αυξηθεί κατά 8 και 60 λεπτά αντίστοιχα να εξετάσετε αν θα αλλάξει η βέλτιστη λύση του προβλήματος στην περίπτωση που

α. οι αλλαγές γίνουν ταυτόχρονα... **(0,2 μον.)**

β. πραγματοποιηθεί μια αλλαγή κάθε φορά .... **(0,2 μον.)**

iii. Χρησιμοποιώντας τον τελευταίο πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος να προσδιορίσετε το εύρος εφικτότητας του αντικειμενικού συντελεστή για τα τρακτέρ .... **(0,6 μον.)**

2β. Μια εταιρεία παράγει τρεις τύπους ενδυμάτων πουκάμισα (Π1), παντελόνια (Π2) και σακάκια (Π3) χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές μηχανές ραψίματος Ρ1, Ρ2 και Ρ3. Το κόστος ραφής για κάθε είδος ενδύματος ανάλογα με τη μηχανή ραψίματος που χρησιμοποιεί η εταιρεία, ο μέγιστος αριθμός ενδυμάτων που μπορεί να ράψει κάθε μηχανή ημερησίως και η ποσότητα που ζητείται από κάθε τύπο ενδύματος, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Σημειώνεται ότι η παραγωγή/ζήτηση εκφράζεται σε δωδεκάδες και το κόστος ραφής τους σε ευρώ ανά δωδεκάδα.

	Κόστος ραφής ενδυμάτων			
	Μηχανή Ραψίματος 1	Μηχανή Ραψίματος 2	Μηχανή Ραψίματος 3	**Ζήτηση ενδυμάτων**
Πουκάμισα Π1	24	16	28	12
Παντελόνια Π2	18	10	20	9
Σακάκια Π 3	5	1	8	15
Δυνατότητα παραγωγής ενδυμάτων	**8**	**17**	**11**	

i. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της βορειοδυτικής γωνίας προσδιορίστε την πρώτη (αρχική) λύση. Ελέγξτε αν η λύση αυτή είναι η βέλτιστη. .... **(0,8 μον.)**

ii. Αν η λύση που βρήκατε παραπάνω δεν είναι η βέλτιστη προσδιορίστε την επόμενη λύση και υπολογίστε το κόστος ραφής των ενδυμάτων i (i=1,2,3) από την μηχανή ραψίματος j (j=1,2,3) **(0,7 μον.)**

3α. Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος συμμετέχουν δύο παίκτες, έστω Α, Β. Ο κάθε παίκτης έχει στη διάθεση του 2 ευρώ και από αυτά μπορεί να ποντάρει 0, 1 ή και τα 2 ευρώ. Το κέρδος του κάθε παίκτη προκύπτει από το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος και από το ποσό που πόνταρε αυτός καθώς και ο αντίπαλος του. Συγκεκριμένα, αν το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος είναι «ΚΕΦΑΛΗ» τότε τα κέρδη/ζημιές του παίκτη Α προσδιορίζονται από τον Πίνακα 1, ενώ αν είναι «ΓΡΑΜΜΑΤΑ» από τον Πίνακα 2. Και στους δύο πίνακες οι στρατηγικές των παικτών Α και Β, όταν ποντάρουν 0, 1 ή 2 ευρώ συμβολίζονται με Α0, Α1, Α2, και Β0, Β1, Β2 αντίστοιχα.

Πίνακας 1:Κέρδος/ζημία του Α για «ΚΕΦΑΛΗ» (σε ευρώ)

	Β0	Β1	Β2
Α0	1	-1	2
Α1	1	0	-1
Α2	1	1	2

Πίνακας 2: Κέρδος/ζημία του Α για «ΓΡΑΜΜΑΤΑ» (σε ευρώ)

	Β0	Β1	Β2
Α0	2	-1	0
Α1	-1	1	-1
Α2	0	-1	-1

i. Να κατασκευάσετε τον πίνακα πληρωμών για τον παίκτη Α, θεωρώντας ότι τα αποτελέσματα της ρίψης του νομίσματος είναι ισοπίθανα. **(0,8 μον.)**

ii. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα αντίστοιχο παιχνίδι μεταξύ των παικτών Γ και Δ ο πίνακας πληρωμών για τον παίκτη Γ είναι ο ακόλουθος:

	Δ0	Δ1	Δ2
Γ0	1	-1	1
Γ1	0	0,5	-1
Γ2	1	0	0,5

Με βάση τον πίνακα αυτό, να εφαρμόσετε αρχικά το κριτήριο minimax (χωρίς διαγραφή υποδεέστερων στρατηγικών) για να ελέγξετε αν υπάρχει ισορροπία. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την κατάλληλη μεθοδολογία να προσδιορίσετε την άριστη στρατηγική κάθε παίκτη, καθώς και την τιμή του παιγνίου. **(0,7 μον.)**

3β. Πελάτες φτάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με βάση τη διαδικασία Poisson και με μέσο ρυθμό 40 πελάτες ανά ώρα. Στο σύστημα εξυπηρέτησης είναι εγκατεστημένα δύο αυτόματα υποσυστήματα εξυπηρέτησης (έστω Υ1 και Υ2) στα οποία οι πελάτες κατανέμονται ισοπίθανα. Κάθε υποσύστημα Υ1 ή Υ2 έχει τη δική του ξεχωριστή ουρά αναμονής και ακολουθεί πειθαρχία FIFO. Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε υποσύστημα για να διεκπεραιώσει την εξυπηρέτηση ενός πελάτη είναι κατά μέσο όρο 2,5 λεπτά (εκθετική κατανομή). Το κόστος λειτουργίας κάθε αυτόματου υποσυστήματος εξυπηρέτησης ανέρχεται στα €3 ανά ώρα και το κόστος παραμονής ενός πελάτη στο υποσύστημα ανέρχεται στα €0,5.

Με βάση τα παραπάνω να προσδιορίσετε

i. το μέσο πλήθος πελατών που περιμένει σε κάθε ουρά αναμονής και το ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη; **(0,5 μον.)**

ii. το συνολικό λειτουργικό κόστος ανά ώρα με βάση το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα (δύο ουρές μαζί) **(0,5 μον.)**

iii. Το ποσοστό επί τοις εκατό κατά το οποίο θα πρέπει να μεταβληθεί ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη, έτσι ώστε ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά να είναι 6 λεπτά **(0,5 μον.)**

iv. Ας υποθέσουμε ότι οι πελάτες δεν διασπώνται σε δύο ξεχωριστές ουρές αναμονής αλλά σχηματίζουν μία κοινή ουρά αναμονής FIFO μπροστά από τα δύο υποσυστήματα εξυπηρέτησης, τα οποία τώρα λειτουργούν παράλληλα. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του προβλήματος παραμένουν ίδια. Πόσο είναι τώρα το μέσο πλήθος πελατών που περιμένουν στην ουρά αναμονής και πόσος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη; **(0,5 μον.)**

.........*Σημείωση*: Να χρησιμοποιήσετε ως στοιχειώδη μονάδα μέτρησης του χρόνου την ώρα

Καλή επιτυχία