Επιχειρησιακή Έρευνα

Δυϊκό Πρόβλημα

Εργαστήριο Ποσοτικών Μεθόδων
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Δυικό Πρόβλημα

Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να δημιουργηθεί από οποιοδήποτε πρωτεύον, ακολουθώντας κάποιους συγκεκριμένους κανόνες μετατροπής.

Η απλούστερη περίπτωση μετατροπής είναι όταν το μοντέλο του πρωτεύοντος προβλήματος (μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης) βρίσκεται στην **κανονική του μορφή**, δηλαδή όταν όλοι οι περιορισμοί του είναι της μορφής ή αντίστοιχα και όλες οι μεταβλητές απόφασης ικανοποιούν τη συνθήκη της μη αρνητικότητας.

Βασικοί Κανόνες

1. Όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης), τότε το δυϊκό του είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης (μεγιστοποίησης).
2. Οι περιορισμοί του πρωτεύοντος προβλήματος αλλάζουν φορά στο δυϊκό.
3. Το δυϊκό πρόβλημα έχει τόσες μεταβλητές απόφασης όσοι και οι περιορισμοί του πρωτεύοντος . Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται **δυϊκές μεταβλητές** (*dual variables*) και συμβολίζονται με .
4. Το δυϊκό πρόβλημα έχει τόσους περιορισμούς όσες και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος .
5. Οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυϊκού προβλήματος είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος .
6. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού είναι οι αντικειμενικοί συντελεστές του πρωτεύοντος

Πρωτεύον στην κανονική του μορφή

Μεγιστοποίηση (Ελαχιστοποίηση) της συνάρτησης

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \le b_1 \ (\ge b_1)$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \le b_2 \ (\ge b_2)$$
$$...$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \le b_m (\ge b_m)$$

και περιριςμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ....,\ x_n \ge 0$$

…Το Δυικό του

Ελαχιστοποίηση (Μεγιστοποίηση) της συνάρτησης

$$W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1 (\leq c_1)$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2 (\leq c_2)$$

$$...$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n (\leq c_n)$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_m \geq 0$$

Μετατροπές

Πρωτεύον	**Δυϊκό**
Max Z	Min W
Περιορισμός i τύπου ≥	Μεταβλητή $w_i \leq 0$
Περιορισμός i τύπου ≤	Μεταβλητή $w_i \geq 0$
Περιορισμός i τύπου =	$w_i \in \Re$
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός j τύπου ≥
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός j τύπου ≤
$x j \in \Re$	Περιορισμός j τύπου =
Συντελεστές αντικ. συναρτ.	β΄ μέλη περιορισμών
β΄ μέλη περιορισμών	Συντελεστές αντικ. συναρτ.

Θεώρημα: Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον

Παράδειγμα 1

Το αρχικό π.γ.π. ειναι

$$\max Z\ (60x_1+30x_2+20x_3)$$

Subject to:

$$8x_1+6x_2+x_3 \le 48$$

$$4x_1+2x_2+1.5x_3 \le 20$$

$$2x_1+1.5x_2+0.5x_3 \le 8$$

$$x_1,x_2,x_3 \ge 0$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το δυϊκό του π.γ.π

$$\min W\ (48y_1+20y_2+8y_3)$$

Subject to:

$$8y_1+4y_2+2y_3 >= 60$$

$$6y_1+2y_2+1.5y_3 >= 30$$

$$y_1+1.5y_2+0.5y_3 >= 20$$

$$y_1,y_2y_3 \ge 0$$

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

Παράδειγμα: Ένα ξυλουργείο παράγει θρανία, τραπέζια και καρέκλες. Οι απαιτήσεις του κάθε προϊόντος σε πρώτες ύλες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

	Θρανίο	Τραπέζι	Καρέκλα	Διαθέσιμες ποσότητες
Ξυλεία	8	6	1	48 (μέτρα)
Κατασκευή	2	1.5	0.5	8 (ώρες)
Φινίρισμα	4	2	1.5	20 (ώρες)
Κέρδος	60000	30000	20000	

Η αγορά μπορεί να απορροφήσει οποιονδήποτε αριθμό σε θρανία και καρέκλες και τραπέζια μπορούν να πωληθούν.

Ο ξυλουργός θέλει να μεγιστοποιήσει τις εισπράξεις του.

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

Η άριστη λύση είναι (2,0,8,24,0,0) και η τιμή της αντικειμενικής είναι 280.000 χρηματικές μονάδες

Το σχέδιο παραγωγής είναι
x_1=2 θρανία
x_2= 0 τραπέζια
x_3= 8 καρέκλες
s_1= 24μέτρα ξυλείας μένουν αχρησιμοποίητα
s_2= 0
s_3= 0

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

Το δυϊκό πρόβλημα του π.γ.π. είναι

$$\min \ (48w_1+8w_2+20w_3)$$

Subject to:

$$\begin{aligned} 8w_1 &+ 2\,w_2 &+ 4\,w_3 &\geq 60000 \\ 6w_1 &+ 1.5w_2 &+ 2\,w_3 &\geq 30000 \\ w_1 &+ 0.5w_2 &+ 1.5w_3 &\geq 20000 \\ w_i &\geq 0,\ i=1,2,3 \end{aligned}$$

Σχετίζεται με τα θρανία

Σχετίζεται με την ξυλεία

Σχετίζεται με τραπέζια

Σχετίζεται με την κατασκευή

Σχετίζεται με καρέκλες

Σχετίζεται με το φινίρισμα

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

- Ας υποθέσουμε ότι ένας εργολάβος θέλει να αγοράσει όλους τους πόρους που έχει στη διάθεσή του το ξυλουργείο.
- Πρέπει να οριστεί μια τιμή ανά μονάδα κάθε πόρου που είναι διατεθειμένος ο εργολάβος να πληρώσει
  - w1=τιμή ανά μέτρο ξυλείας
  - w2=τιμή που πληρώνει για μια ώρα κατασκευής
  - w3= τιμή που πληρώνει για μια ώρα φινιρίσματος
- Οι τιμές αυτές θα προσδιοριστούν από την λύση του δυϊκού, ενώ το συνολικό κόστος θα προσδιοριστεί από την τιμή της αντικειμενικής $(48w_1+8w_2+20w_3)$ (ΣΤΟΧΟΣ του κόστους είναι η ελαχιστοποίηση)

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

- Τι περιορισμούς έχει ο εργολάβος στην προσπάθειά του να ορίσει τις τιμές στην κάθε μονάδα πόρου του ξυλουργείου???
- Ο εργολάβος πρέπει να προσφέρει στον ξυλουργό τουλάχιστον 60.000 χρηματικές μονάδες για να αγοράσει ένα συνδυασμό πόρων ο οποίος περιλαμβάνει 8 μέτρα ξύλου, 2 ώρες κατασκευής και 4 ώρες φινιρίσματος, ΜΙΑ ΚΑΙ Ο ΞΥΛΟΥΡΓΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΕΙ ΑΥΤΟΥΣ τους ΠΟΡΟΥΣ ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΕΙ ΕΝΑ ΘΡΑΝΙΟ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΘΑ ΠΟΥΛΗΣΕΙ ΠΡΟΣ 60.000 χρημ. μονάδες.
- Αφού ο εργολάβος προσφέρει **($8w_1+2w_2+4w_3$)** χρ. μονάδες για τους πόρους που παράγουν ένα θρανίο θα πρέπει να ορίσει τα w1,w2,w3 έτσι ώστε

  $$8w_1+2w_2+4w_3 \geq 60000$$

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

Το αριστερο μερος του i-οστου περιορισμου $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ παριστα τη συνολικη ποσοτητα πορου i που θα χρησιμοποιηθει, ποσοτητα που δεν μπορει να υπερβαινει τη διαθεσιμη b_i

Η αντικειμενικη συναρτηση $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ δινει το συνολικο κοστος απο την παραγωγη των x_j μοναδων της j δραστηριοτητας

Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού προβλήματος

(Δ)

Η ποσοτητα $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$ παριστανει την αξια της συνθεσης των πορων που θα χρησιμοποιηθουν για την πραγωγη μιας μοναδας του προιοντος j (=κοστος λειτουργιας μια μοναδας της j)

ενω η ανισοτητα $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_j \geq c_i$, $j = 1, 2, .., n$(j περιορισμος δυικου προβληματος) σημαινει οτι η αποδιδομενη αξια στη συνθεση αυτη των πορων πρεπει να ειναι τουλαχιστον τοση, οσο και το κερδος που εχουμε απο μια μοναδα του j προιοντος-δραστηριοτητας

Εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος

Αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

- Max Z = Min W.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις χαλαρές μεταβλητές του και (είναι οι σκιώδεις τιμές των πόρων του πρωτεύοντος), είναι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών του δυϊκού.

Εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος

Αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

- Min Z = Max W.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις πλεονασματικές/τεχνητές μεταβλητές του, και (είναι οι σκιώδεις τιμές των πόρων του πρωτεύοντος), είναι, με αλλαγμένο πρόσημο στην περίπτωση των πλεονασματικών μεταβλητών, οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του, είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών του δυϊκού.

Παράδειγμα 2

Να διατυπωθεί το δυικό πρόβλημα του παρακάτω προβλήματος και από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος να βρεθεί η λύση του

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \le 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 1800$$
$$x_2 \le 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Τελικός πίνακας Simplex πρωτεύοντος προβλήματος

Βάση		Μεταβλητές						
		3	8	0	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
0	x_1	1	0	1/2	0	-2	100	
0	s_2	0	0	-3	1	10	500	
8	x_2	0	1	0	0	-1	350	
z_j		3	8	3/2	0	2	$Z = 3100$	
$c_j - z_j$		0	0	-3/2	0	-2		

Παράδειγμα 2

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$W = 1600y_1 + 1800y_2 + 350y_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$2y_1 + 6y_2 \geq 3$$
$$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 8$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0$$

- $\text{Max } Z = 3100 = \text{Min } W$. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι 3100, δηλαδή ισούται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος, που αντιστοιχούν στις χαλαρές μεταβλητές του s_1, s_2, s_3, δηλαδή οι τιμές $3/2, 0$ και 2, είναι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού. Άρα: $y_1 = 3/2,\ y_2 = 0,\ y_3 = 2$.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του x_1 και x_2, δηλαδή οι τιμές $0, 0$, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών του δυϊκού. Άρα: $e_1 = 0$ και $e_2 = 0$.