ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Γεώργιος Τσεκούρας

Καθηγητής
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα

Η έννοια της **Ορίζουσας** ορίζεται μόνο για Τετραγωνικούς Πίνακες. Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε την έννοια της ορίζουσας θα πρέπει να αρχίσουμε την ανάλυσή της για πίνακες μικρής διάστασης και προοδευτικά να την δούμε για πίνακες μεγαλύτερης διάστασης και τέλος να δώσουμε τον γενικό της τύπο για έναν πίνακα διάστασης *n*x*n*.

Ορίζουσα ενός πίνακα διάστασης 2x2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Η ορίζουσά του είναι: $D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Άρα η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Παραδείγματα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow D_A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 18$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow D_A = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 - 4 \cdot (-2) = -10$$

Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα

Ορίζουσα ενός πίνακα διάστασης 3x3

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας με διάσταση 3x3: $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$. Η ορίζουσα είναι η $D_A=\begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$. Για να υπολογίσουμε την D_A κάνουμε τα εξής:

Βήμα 1). Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη. Εδώ επιλέγουμε την πρώτη στήλη $D_A=\begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

Βήμα 2). Επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο της στήλης αυτής (δηλ. το 3) και δεν λαμβάνουμε υπόψη τόσο την γραμμή όσο και την στήλη στις οποίες ανήκει το στοιχείο αυτό. Εδώ η γραμμή που δεν λαμβάνεται υπόψη είναι η πρώτη και η στήλη επίσης η πρώτη,

$$D_A=\begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Τα στοιχεία της D_A που απομένουν δίνουν μία ορίζουσα 2x2: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$. Αυτή την ορίζουσα την πολλαπλασιάζουμε με το πρώτο στοιχείο της στήλης που επιλέξαμε και υπολογίζουμε την πρώτη ποσότητα: $3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα

Βήμα 3). Επιλέγουμε το δεύτερο στοιχείο της στήλης που επιλέξαμε (δηλ. το 8) και δεν λαμβάνουμε υπόψη τόσο την γραμμή όσο και την στήλη στις οποίες ανήκει το στοιχείο αυτό. Εδώ η γραμμή που δεν λαμβάνεται υπόψη είναι η δεύτερη και η στήλη η πρώτη.

$$D_A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Τα στοιχεία της D_A που απομένουν δίνουν μία ορίζουσα 2x2: $\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$. Αυτή την ορίζουσα την πολλαπλασιάζουμε με το δεύτερο στοιχείο της στήλης που επιλέξαμε και υπολογίζουμε την δεύτερη ποσότητα: $8\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Βήμα 4). Επιλέγουμε το τρίτο στοιχείο της στήλης που επιλέξαμε (δηλ. το 1) και δεν λαμβάνουμε υπόψη τόσο την γραμμή όσο και την στήλη στις οποίες ανήκει το στοιχείο αυτό. Εδώ η γραμμή που δεν λαμβάνεται υπόψη είναι η τρίτη και η στήλη η πρώτη.

$$D_A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Τα στοιχεία της D_A που απομένουν δίνουν μία ορίζουσα 2x2: $\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. Αυτή την ορίζουσα την πολλαπλασιάζουμε με το τρίτο στοιχείο της στήλης που επιλέξαμε και υπολογίζουμε την τρίτη ποσότητα: $1\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα

Βήμα 5).

Η ορίζουσα του πίνακα υπολογίζεται ως το άθροισμα των παραπάνω τριών ποσοτήτων, με την ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ότι για την πρώτη, την τρίτη, κ.λ.π ποσότητα χρησιμοποιούμε θετικό πρόσημο (δηλαδή τις προσθέτουμε), ενώ για την δεύτερη, την τέταρτη, κ.λ.π, χρησιμοποιούμε αρνητικό πρόσημο (δηλαδή τις αφαιρούμε).

Έτσι η ορίζουσα είναι,

$$D_A = 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\big(2\cdot 6 - 0\cdot(-5)\big) - 8\big((-4)\cdot 6 - (-5)\cdot(-7)\big) + ((-4)\cdot 0 - 2\cdot(-7)) =$$

$$= 3\cdot 12 - 8\cdot(-59) + 14 = 36 + 472 + 14 = 522$$

Παρατήρηση:

Οι ορίζουσες $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ και $\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ που υπολογίστηκαν στα παραπάνω βήματα ονομάζονται υποορίζουσες της D_A.

Τέλος για ορίζουσες μεγαλύτερης διάστασης εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο

Ιδιότητες Οριζουσών

Ιδιότητα 1

Αν όλα τα στοιχεία μιας στήλης ή μιας γραμμής της ορίζουσας είναι μηδέν τότε η ορίζουσα είναι μηδέν. Αυτό είναι προφανές γιατί όλες οι υποορίζουσες που αντιστοιχούν σε αυτή την στήλη ή γραμμή θα πολλαπλασιαστούν με το μηδέν και άρα θα προκύψει μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -9 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 20 \\ 0 & 6 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 0 \text{ γιατί όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι μηδέν}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ γιατί η δεύτερη γραμμή έχει όλα τα στοιχεία της μηδέν}$$

Ιδιότητα 2

Αν μία ορίζουσα είναι άνω ή κάτω τριγωνική τότε ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

$$(1).\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & -9 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot 10\cdot(-8) = 640 \quad (2).\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 77 & 45 & 0.1 & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 68 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 0.1\cdot 68 = -20.4$$

Ιδιότητες Οριζουσών

Ιδιότητα 3

Για να πολλαπλασιάσουμε μία ορίζουσα με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης με τον αριθμό αυτό.

1). $3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$

2). $2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 12 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \end{vmatrix} = ...$

Ιδιότητα 4

Η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται αν οι στήλες γίνουν γραμμές και οι γραμμές στήλες: 1). $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ 2). $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

Η ιδιότητα αυτή απευθείας δηλώνει ότι ένας πίνακας A και ο ανάστροφός του A^T έχουν την ίδια ορίζουσα $D_A = D_{A^T}$.

Ιδιότητες Οριζουσών

Ιδιότητα 5

Αν αλλάξουμε τις θέσεις δύο γραμμών ή δύο στηλών τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο:

1). $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 8 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ 2). $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Ιδιότητα 6

Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες έχουν ακριβώς τα ίδια ή ανάλογα στοιχεία τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.

1). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$ 2). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$ 3). $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Ιδιότητα 7

Αν κάθε στοιχείο μιας ορισμένης γραμμής (ή στήλης) ορίζουσας είναι άθροισμα δύο προσθετέων, τότε και η ορίζουσα είναι άθροισμα δύο οριζουσών με στοιχεία των αντίστοιχων γραμμών (ή στηλών) ανά ένα των προσθετέων.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1+1 & 2+5 & 3+6 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 2). $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4+3 & 0 \\ 2 & 2+5 & 9 \\ 0 & 2+1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Ιδιότητες Οριζουσών

Ιδιότητα 8

Αν στα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) προστεθούν ή αφαιρεθούν τα αντίστοιχα στοιχεία άλλης γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασμένα επί έναν αριθμό, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

1). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0+10\cdot 3 & 6+10\cdot 2 & 2+10\cdot 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 30 & 26 & 12 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 2). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2-3\cdot 5 & 1 \\ 0 & 6-0\cdot 5 & 2 \\ 4 & 5-4\cdot 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -13 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & -15 & 7 \end{vmatrix}$

Ιδιότητα 9

Έστω δύο πίνακες A και B διάστασης nxn και το γινόμενό τους AB. Τότε $D_{AB}=D_A D_B$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ και άρα $A \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $D_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ και $D_B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$. Συνεπώς $D_A D_B = 40$.

Επίσης, $D_{AB} = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 9\cdot 6 - 2\cdot 7 = 40$. Άρα $D_{AB}=D_A D_B$

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ (Ορίζουσα Vandermonde)