ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

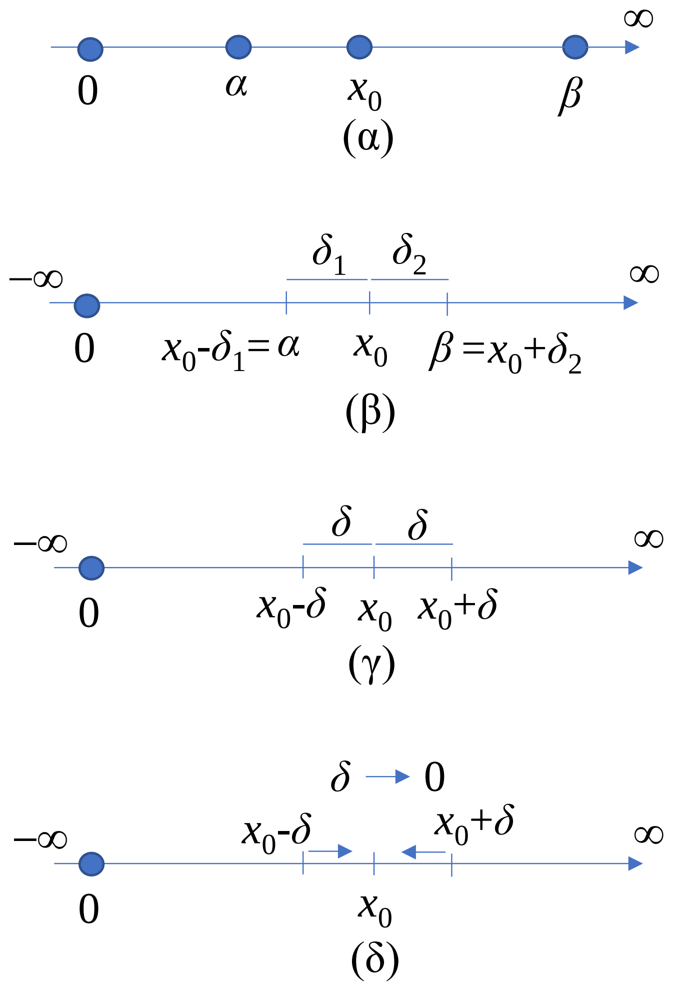
Γεώργιος Τσεκούρας

Καθηγητής
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Όρια Συνάρτησης

Η έννοια του ορίου χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε την συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε μία πολύ **<u>μικρή περιοχή</u>** ενός συγκεκριμένου σημείου του άξονα των πραγματικών αριθμών, το οποίο μπορεί να ανήκει αλλά μπορεί και να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Η έννοια της **<u>περιοχής</u>** ενός σημείου του άξονα των πραγματικών αριθμών (δηλ. ενός αριθμού) $x_0 \in R$ είναι συνυφασμένη με την ιδιότητα Ι2 της απόλυτης τιμής, που αναφέρθηκε στην σελίδα 9 στο κεφάλαιο «Αριθμοί και Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων», και αναλύεται στην συνέχεια.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 1(α) φαίνεται ένα μεγάλο διάστημα (δηλ. περιοχή) γύρω από το x_0 που δηλώνεται ως το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το διάστημα αυτό είναι αρκετά μεγάλο και άρα δεν θεωρείται μικρή περιοχή του σημείου (δηλ. αριθμού) x_0. Στο σχήμα 1(β), μετακινήσαμε τα σημεία α και β προς το μέρος του x_0 έτσι ώστε το α να απέχει απόσταση δ_1 και το β να απέχει απόσταση δ_2 από το x_0. Παρόλο που, για λόγους καλής οπτικοποίησης, οι αποστάσεις δ_1 και δ_2 φαίνονται μεγάλες, στην ουσία είναι πολύ μικρές (για την ακρίβεια πολύ-πολύ μικρότερες του 1). Επειδή η χρήση των δύο αυτών αποστάσεων δεν είναι βολική, χρησιμοποιούμε την ίδια απόσταση δ και για τα δύο άκρα της περιοχής (δηλ. διαστήματος) που περικλείει το σημείο x_0, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1(γ).
Τέλος, στο Σχήμα 1(δ) φαίνεται πως όταν μικραίνουμε την απόσταση δ και την κάνουμε να "πηγαίνει" προς το μηδέν τα δύο άκρα "πηγαίνουν" και αυτά προς το σημείο x_0. Από δω και στο εξής η λέξη "πηγαίνει" θα αντικατασταθεί με την λέξη "τείνει". Οπότε αυτό που μας λέει το Σχήμα 1(δ) είναι ότι όταν το δ τείνει προς το μηδέν τα άκρα $x_0 - \delta$ και $x_0 + \delta$ τείνουν προς το x_0.



Σχήμα 1: (α) Ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που περιέχει το σημείο x_0 Θεωρείται μεν *<u>περιοχή</u>* του x_0 αλλά *<u>όχι πολύ μικρή περιοχή</u>*, (β) επιλέγοντας δύο πολύ μικρούς <u>ΘΕΤΙΚΟΥΣ</u> αριθμούς δ_1 και δ_2, με δ_1, δ_2<<1, ορίζουμε μία πολύ μικρή περιοχή γύρω από το x_0, (γ) είναι πιο βολικό να πάρουμε έναν πολύ μικρό ΘΕΤΙΚΟ αριθμό δ, με δ<<1, και να σχηματίσουμε την *<u>πολύ μικρή περιοχή</u>* $[x_0-\delta, x_0+\delta]$,
(δ) όσο η απόσταση δ <u>μικραίνει</u> και πηγαίνει (τείνει) προς το μηδέν, τόσο τα άκρα $x_0-\delta$ και $x_0+\delta$ <u>τείνουν</u> προς το x_0.

Όρια Συνάρτησης

Όταν ένας αριθμός x τείνει σε έναν αριθμό α, αυτό συμβολίζεται ως $x \to a$.

Με βάση αυτόν τον συμβολισμό η πρόταση "όταν το δ τείνει προς το μηδέν τα άκρα $x_0 - \delta$ και $x_0 + \delta$ τείνουν προς το x_0" γράφεται ως εξής: $\delta \to 0 \Rightarrow x_0 - \delta \to x_0 \;\; \textit{και} \;\; x_0 + \delta \to x_0$

Ξαναγυρνώντας στο Σχήμα 1(γ) και 1(δ), βλέπουμε ότι η μικρή περιοχή που περικλείει το x_0 είναι το διάστημα $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να απαντήσουμε στο εξής ερώτημα: Ποια ακριβώς είναι η πολύ μικρή περιοχή $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$;

Η απάντηση του ερωτήματος αυτού δίνεται από τα σημεία, τα οποία περικλείει η περιοχή αυτή και <u>είναι ίδια</u> με την απάντηση στο παρακάτω ερώτημα:

Ποια (κοινή) ιδιότητα έχουν τα σημεία που περιέχονται στο διάστημα $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$;

Η ερώτηση αυτή ουσιαστικά ζητάει να βρούμε τι ιδιότητα έχει ένα οποιοδήποτε σημείο x που ανήκει στο διάστημα αυτό.

Άρα μας ζητάει να βρούμε την μαθηματική ιδιότητα που έχει ένα οποιοδήποτε σημείο $x \in [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$.

Αυτό που μας λέει η παράσταση $x \in [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ είναι ότι, στην ουσία, $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$, το οποίο με την χρήση της ιδιότητας Ι2 της απόλυτης τιμής μας δίνει την ζητούμενη ιδιότητα, $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta \Rightarrow -\delta \le x - x_0 \le \delta \Rightarrow |x - x_0| \le \delta$.

Άρα: $\forall x \in [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta] \Rightarrow |x - x_0| \le \delta$

Άρα, οποιοδήποτε σημείο x της πολύ μικρής περιοχής γύρω από το x_0 έχει την παραπάνω ιδιότητα. Προσέξτε ότι η ποσότητα $|x - x_0|$ είναι η απόσταση του σημείου x από το x_0.

Συνεπώς όσο το δ μικραίνει και τείνει στο μηδέν τόσο τα σημεία του διαστήματος $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ τείνουν προς το (δηλ. μαζεύονται κοντά στο) x_0. Αυτό γράφεται ως εξής:

$$\delta \to 0 \Rightarrow |x - x_0| \le \delta \to 0 \Rightarrow |x - x_0| \to 0 \Rightarrow x \to x_0$$

Η έννοια της πρότασης "το δ τείνει στο 0" (που συμβολίζεται ως $\delta \to 0$) δηλώνει μία <u>οριακή συμπεριφορά</u> της μεταβλητής δ, με βάση την οποία η τιμή της μικραίνει συνέχεια χωρίς ποτέ να φτάνει την τιμή 0.

Όρια Συνάρτησης

Ας δούμε τώρα πως η οριακή συμπεριφορά του δ και της περιοχής που αυτό ορίζει γύρω από το σημείο x_0 επηρεάζει την τιμή της συνάρτησης. Στο Σχήμα 2 φαίνεται η όλη προσέγγιση.

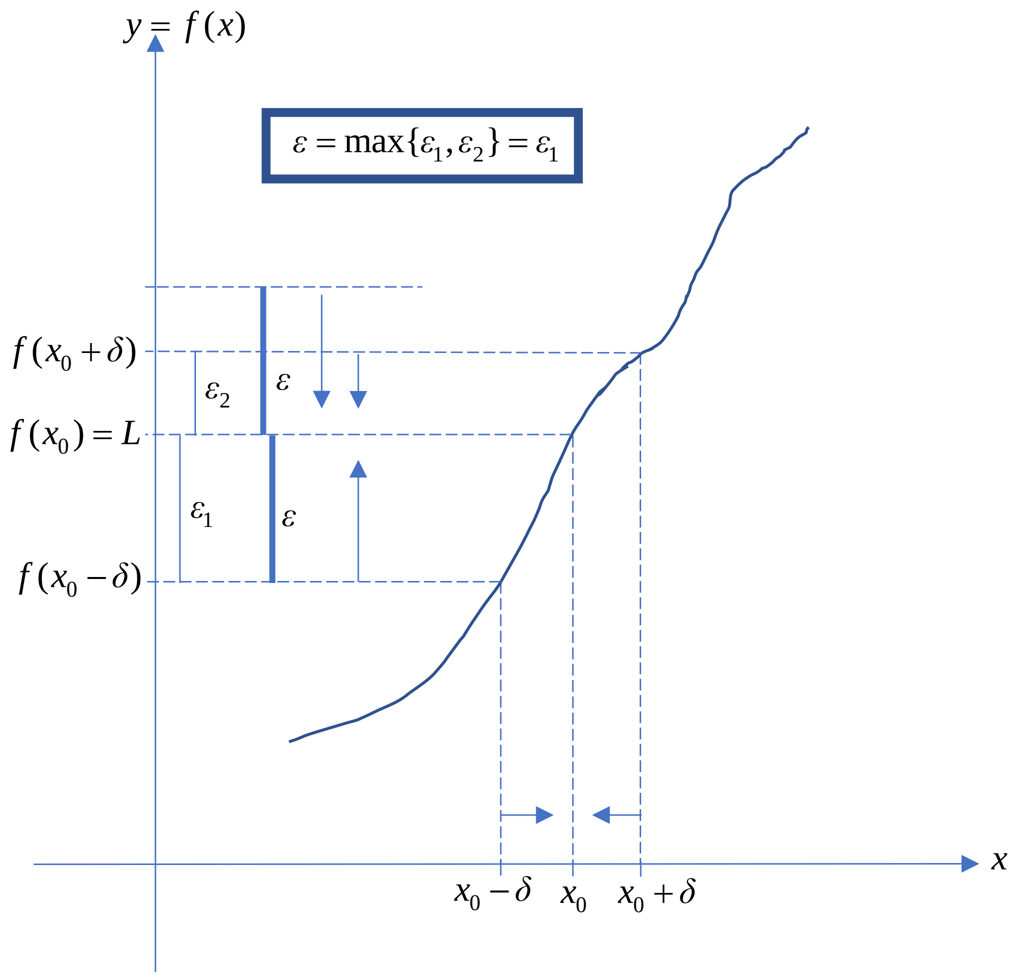
Συγκεκριμένα, στον άξονα των y φαίνονται οι τιμές της συνάρτησης για τα σημεία $x_0-\delta$, x_0, και $x_0+\delta$, οι οποίες είναι αντίστοιχα οι $f(x_0-\delta)$, $f(x_0)$, και $f(x_0+\delta)$.

Προσέξτε ότι ενώ το διάστημα $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ είναι συμμετρικό ως προς το x_0, σε γενικές γραμμές, το αντίστοιχο διάστημα $[f(x_0-\delta),\ f(x_0+\delta)]$ στο πεδίο τιμών δεν είναι συμμετρικό ως προς το $f(x_0)=L$. Συγκεκριμένα: $L-f(x_0-\delta)=\varepsilon_1 \neq f(x_0+\delta)-L=\varepsilon_2$.

Μπορούμε όμως να το κάνουμε συμμετρικό επιλέγοντας το μεγαλύτερο των ε_1 και ε_2, το οποίο γράφεται ως $\varepsilon=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Στην προκειμένη περίπτωση του Σχήματος 2 ισχύει ότι: $\varepsilon=\varepsilon_1$.

Η ανάλυση αυτή φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Όσο το δ τείνει προς το μηδέν τόσο το ε τείνει και αυτό προς το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι όσο πλησιάζουμε το σημείο x_0 τόσο η τιμή της συνάρτησης πλησιάζει το σημείο $f(x_0)=L$.

Όρια Συνάρτησης

Εκείνο που είναι προφανές είναι ότι όταν $\delta \to 0$ τότε όλα τα σημεία του διαστήματος $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ μαζεύονται πολύ κοντά στο x_0, γιατί όπως είπαμε παραπάνω ισχύει ότι $|x - x_0| \le \delta,\ \forall x \in [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$.

Αυτό έχει ως συνέπεια, στο πεδίο τιμών το ε να τείνει και αυτό στο 0 ($\varepsilon \to 0$) και άρα το διάστημα $[f(x_0 - \delta),\ f(x_0 + \delta)]$ να συρρικνώνεται γύρω από το σημείο $f(x_0) = L$.

Αυτό συμβαίνει, και εδώ, γιατί η απόσταση του κάθε σημείου $f(x)$ από το σημείο L είναι μικρότερη του ε:

$$\forall x \in [f(x_0 - \delta),\ f(x_0 + \delta)] \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon$$

Αυτό συμβαίνει, και εδώ, γιατί η απόσταση του κάθε σημείου $f(x)$ από το σημείο L είναι μικρότερη του ε:

$$\forall x \in [f(x_0 - \delta),\ f(x_0 + \delta)] \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon$$

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν μόνο όταν για οποιοδήποτε ε, οσοδήποτε μικρό, στο πεδίο τιμών του άξονα των y, μπορώ να βρω ένα δ στο πεδίο ορισμού του άξονα των x που να συμβαίνει το παραπάνω φαινόμενο. Τότε λέμε ότι όσο το x τείνει στο x_0 η συνάρτηση έχει όριο το σημείο $f(x_0) = L$ και γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon}$$

Ο πιο βολικός συμβολισμός είναι ο παρακάτω:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

Όρια Συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

(α) $f(x)=x^2+2$, $\lim_{x\to 2} f(x)=?$

(β) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} f(x)=?$

και $\lim_{x\to 2} f(x)=?$

(γ) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$, $\lim_{x\to 3} f(x)=?$

(δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, $\lim_{x\to 3} f(x)=?$

και $\lim_{x\to 0} f(x)=?$

(ε) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2(x-1)+4}-2}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} f(x)=?$

Λύση

(α) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+2)=2^2+2=6$

(β) Αν θέσω $x=1$, τότε η συνάρτηση δεν ορίζεται γιατί ο παρονομαστής μηδενίζεται. Σε αυτή την περίπτωση εργάζομαι ως εξής:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

Στην δεύτερη περίπτωση η συνάρτηση ορίζεται πλήρως και το όριο είναι,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{2^2-1}{2-1}=3$$

(γ). Αν θέσω $x=3$ ο παρονομαστής μηδενίζεται και η συνάρτηση δεν ορίζεται. Για αυτό εργάζομαι ως εξής. Παρατηρώ ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής είναι διώνυμα.

Γνωρίζουμε ότι το διώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται ως εξής,

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$ όπου x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Οι λύσεις της εξίσωσης για τον αριθμητή είναι $x_1=3$ και $x_2=-1$, οπότε ο αριθμητής γράφεται ως εξής: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

Αντίστοιχα ο παρονομαστής ως εξής:

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο ως εξής:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)}{(x-1)}=\frac{3+1}{3-1}=2$$

(δ) Για το πρώτο όριο, αν θέσουμε $x=3$η συνάρτηση Ορίζεται πλήρως. Οπότε κάνουμε απλή αντικατάσταση,

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{3+2}-\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

Για το δεύτερο όριο, αν θέσουμε $x=0$ ο παρονομαστής μηδενίζεται. Οπότε εργαζόμαστε ως εξής:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(ε). Αντιστοίχως με την τελευταία περίπτωση, εργαζόμαστε ως εξής:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2(x-1)+4}-2}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2(x-1)+4}-2\right)\left(\sqrt{2(x-1)+4}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2(x-1)+4}+2\right)}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2(x-1)+4}\right)^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{2(x-1)+4}+2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)+4-4}{(x-1)\left(\sqrt{2(x-1)+4}+2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2(x-1)+4}+2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2(x-1)+4}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

Όρια Συνάρτησης

Πράξεις μεταξύ Ορίων

Έστω:

(α) Δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$

(β) Πέντε πραγματικοί αριθμοί: $L, M, c, k, a \in R$ με $M \neq 0$

(γ) Δύο ακέραιοι αριθμοί: $\nu, \mu \in Z$, με $m \neq 0$

(δ) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ και $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$

Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

I1. $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

I2. $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x) = LM$

I3. $\lim\limits_{x\to c}\left(k\, f(x)\right) = k \lim\limits_{x\to c} f(x) = kL$

I4. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

I5. $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\right)^{\frac{n}{m}} = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^{\frac{n}{m}} = L^{\frac{n}{m}}$

I6. $\forall x,\ f(x) = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) = a$

Άσκηση

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -5$. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2f(x)-g(x)}{\left(f(x)+7\right)^{2/3}}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5f(x)}}{g(x)(1-f(x))}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2f(x)-g(x)}{\left(f(x)+7\right)^{2/3}} = \dfrac{2\lim\limits_{x\to 0} f(x) - \lim\limits_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x)+7\right)^{2/3}} = \dfrac{2\cdot 1-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \dfrac{7}{8^{2/3}}$

Συνέχεια Συνάρτησης

Συνέχεια Συνάρτησης

Ορισμός: Συνέχεια συνάρτησης σε ένα σημείο του Πεδίου Ορισμού

Μια συνάρτηση $f(x): A \to B$ είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν πληρούνται ταυτόχρονα τα παρακάτω

(i) Υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$

(ii) Ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Συνεπώς για να είναι συνεχής στο $x = x_0$ θα πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται στο σημείο x_0, δηλαδή $x_0 \in A$.

Ορισμός: Συνέχεια συνάρτησης σε όλο το Πεδίο Ορισμού

Μία συνάρτηση $f(x): A \to B$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού *A* αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του *A*:

$\forall x_0 \in A: \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Έστω *f* και *g* δύο συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x = x_0$.

Τότε οι παρακάτω συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς στο σημείο αυτό:

(α) $f(x) + g(x)$, (β) $f(x)g(x)$, (γ) $\gamma f(x)$ με $\gamma \in R$,

(δ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$

Σύνθεση μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Έστω *f* και *g* δύο συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x = x_0$.

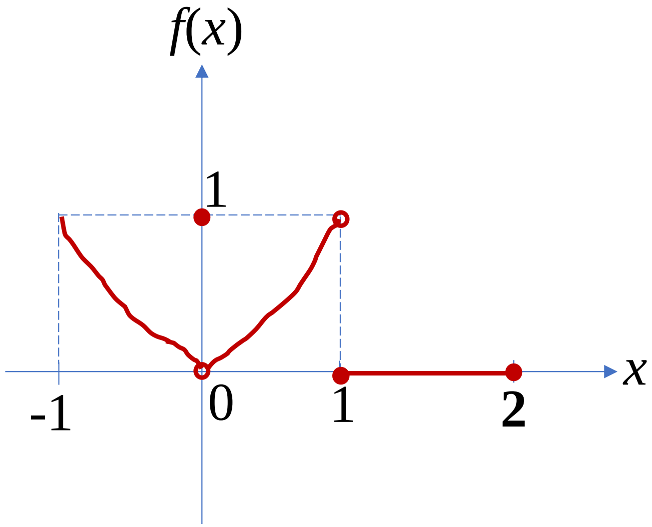
Τότε οι δύο συνθέσεις τους $(g \circ f)(x) = f(g(x))$ και $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ είναι και αυτές συνεχείς στο σημείο $x = x_0$.

Συνέχεια Συνάρτησης

Άσκηση 1

Στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ είναι όλα τα κόκκινα σημεία.

Ποια είναι τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης;



Λύση

Τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης είναι δύο.

Πρώτον είναι το σημείο $x=0$. Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι $f(0)=1$.

Όμως το όριο της συνάρτησης είναι το 0 (γιατί προσεγγίζοντας το σημείο $x=0$ είτε από αριστερά είτε από δεξιά καταλήγουμε στην τιμή 0 για την συνάρτηση).

Άρα: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)=1$.

Το δεύτερο σημείο ασυνέχειας είναι το $x=1$.

Όντως, η συνάρτηση δεν έχει όριο για $x\to 1$ γιατί αν προσεγγίσουμε από αριστερά το σημείο αυτό καταλήγουμε σε όριο 1 ενώ από δεξιά σε όριο 0. Οπότε το όριο δεν υπάρχει και άρα, αναγκαστικά, η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

Άσκηση 2

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\left|\dfrac{x\sin x}{x^2+1}\right|$ είναι συνεχής παντού στο R.

Λύση

Θέτω $h_1(x)=x$ $\kappa\alpha\iota$ $h_2(x)=\sin x$. Αυτές οι δύο είναι συνεχείς. Άρα και ο πολλαπλασιασμός τους $h(x)=h_1(x)h_2(x)=x\sin x$ είναι συνεχής συνάρτηση. Στην συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi(x)=x^2+2$. Η συνάρτηση αυτή είναι και συνεχής και πάντα διάφορη του μηδενός $(\varphi(x)\neq 0)$.

Οπότε και το πηλίκο της $z(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$

είναι συνεχής συνάρτηση. Επίσης η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι και αυτή συνεχής. Τέλος, παρατηρούμε ότι η $g(x)$ είναι η σύνθεση των f και z: $g(x)=f(z(x))=\left|\dfrac{x\sin x}{x^2+1}\right|$

και άρα είναι και αυτή συνεχής.