ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

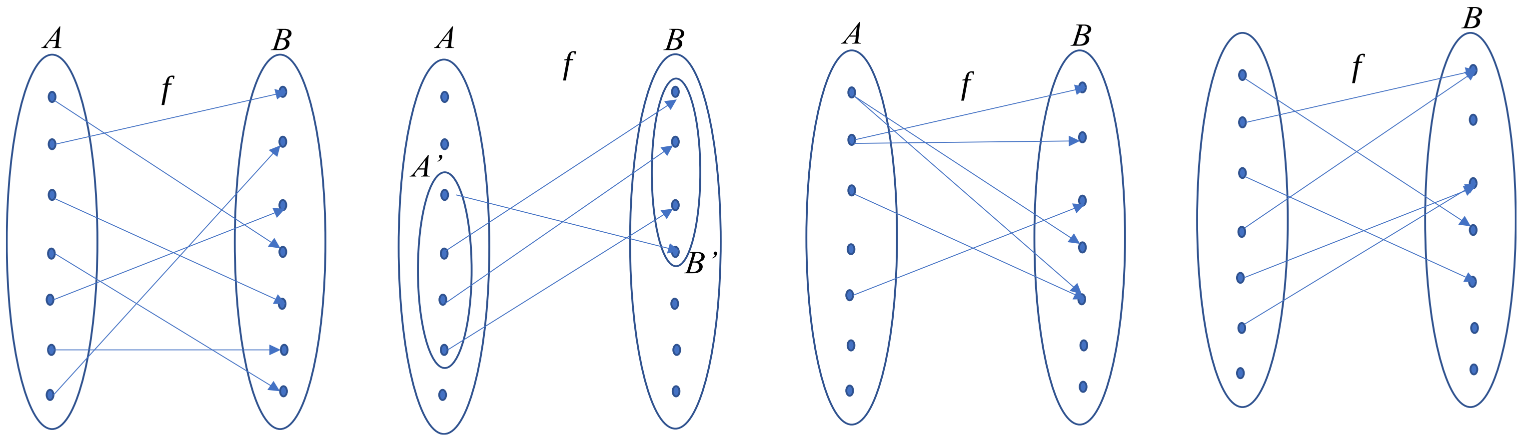
Γεώργιος Τσεκούρας

Καθηγητής
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Συνάρτηση

Ως συνάρτηση ορίζουμε μία αντιστοίχιση στοιχείων ενός συνόλου σε στοιχεία ενός άλλου συνόλου ή αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων του ιδίου συνόλου.
Η εν λόγω αντιστοίχιση εκφράζει, στην ουσία, μία σχέση μεταξύ των στοιχείων. Έτσι, αν έχουμε το σύνολο A και το σύνολο B και αντιστοιχίσουμε στοιχεία από το A σε στοιχεία του B, τότε έχουμε μία συνάρτηση που την συμβολίζουμε ως

$$f : A \rightarrow B$$



(α) (β) (γ) (δ)

Σχήμα 1. (α) Συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A και πεδίο τιμών το σύνολο B, (β) Συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A' και πεδίο τιμών το σύνολο B', (γ) η f <u>δεν είναι</u> συνάρτηση, (δ) η f είναι συνάρτηση.

Το A ονομάζεται πεδίο ορισμού ενώ το B πεδίο τιμών της συνάρτησης. Το Σχήμα 1(α) δείχνει μία συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B. Το B είναι η εικόνα του A. Σε μαθηματική μορφή: $B = f(A)$. Επίσης, αν το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$ τότε γράφουμε $y = f(x)$.

Μία συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ΔΕΝ είναι απαραίτητο να έχει πεδίο ορισμού όλο το A και πεδίο τιμών όλο το B. Αν για παράδειγμα, η συνάρτηση αντιστοιχίζει μόνο κάποια από τα στοιχεία του A, τα οποία αποτελούν το υποσύνολο A' του A, σε κάποια από τα στοιχεία του B, τα οποία αποτελούν το υποσύνολο B' του B, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το υποσύνολο A' και το πεδίο τιμών είναι το υποσύνολο B' (βλέπε Σχ. 1(β))

$$f : A' \rightarrow B'$$

Περιορισμός 1: Σε μία συνάρτηση ένα στοιχείο από το πεδίο ορισμού <u>πρέπει να</u> αντιστοιχίζεται μόνο σε ένα στοιχείο του πεδίου τιμών.
Ο παραπάνω περιορισμός δεν ισχύει για τα στοιχεία του πεδίου τιμών, καθένα τα οποία μπορεί να αντιστοιχίζεται σε περισσότερα από ένα στοιχεία του πεδίου ορισμού (βλέπε Σχ. 1 (γ) και (δ)).

Αμφιμονοσήμαντη Συνάρτηση (ή αλλιώς Συνάρτηση 1-1)

Μία συνάρτηση $f: A \to B$ ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη όταν για κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται μόνο ένα σημείο του B και αντιστρόφως. Αυτό σημαίνει ότι δύο διαφορετικά στοιχεία του A θα αντιστοιχίζονται σε δύο διαφορετικά στοιχεία του B,

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{όπου} \quad f(x_1), f(x_2) \in B$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό οι συναρτήσεις στο Σχ. 1(α) και 1(β) είναι αμφιμονοσήμαντες, ενώ η συνάρτηση στο Σχ. 1(δ) δεν είναι.

Τμηματικές Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση ονομάζεται τμηματική όταν αλλάζει μορφή σε διαφορετικά διαστήματα. Οι δύο παρακάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$. Η αντίστροφή της, <u>αν υπάρχει</u>, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B και πεδίο τιμών το A και συμβολίζεται ως, $f^{-1}: B \to A$.

Η άμεση ερώτηση είναι η εξής: <u>Πότε υπάρχει η αντίστροφη μιας συνάρτησης</u>;

Για να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό πρέπει να αναλογιστούμε ότι η f^{-1} θα πρέπει να είναι συνάρτηση. Άρα θα πρέπει να ισχύει ο Περιορισμός 1. Ο περιορισμός αυτός ισχύει για την f^{-1} μόνο στην περίπτωση που η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Με βάση τα παραπάνω, οι συναρτήσεις του Σχ. 1 (α) και 1(β) έχουν αντίστροφες, ενώ η συνάρτηση του Σχ. 1(δ) δεν έχει.

Άρτια και Περιττή Συνάρτηση

Μία συνάρτηση ονομάζεται άρτια όταν: $f(-x) = f(x) \quad \forall x$

Μία συνάρτηση ονομάζεται περιττή όταν: $f(-x) = -f(x) \ \ \forall x$

Παράδειγμα

Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$, όπου το A είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν (δηλαδή αν $x \in A$ τότε $-x \in A$). Δείξτε ότι η συνάρτηση f γράφεται ως άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης.

Λύση

Έστω ότι $f(x) = g(x) + h(x)$ όπου $g(x)$ μία άρτια και $h(x)$ μία περιττή συνάρτηση.

Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Παρατηρήστε ότι $g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$. Άρα η $g(x)$ που επιλέξαμε είναι άρτια. Αν επιλύσω την αρχική έκφραση της $f(x)$ ως προς $h(x)$ παίρνω ότι

$h(x) = f(x) - g(x)$ και αν αντικαταστήσω την $g(x)$ βρίσκω ότι η $h(x)$ γράφεται ως,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Τέλος, η $h(x)$ είναι όντως περιττή,

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

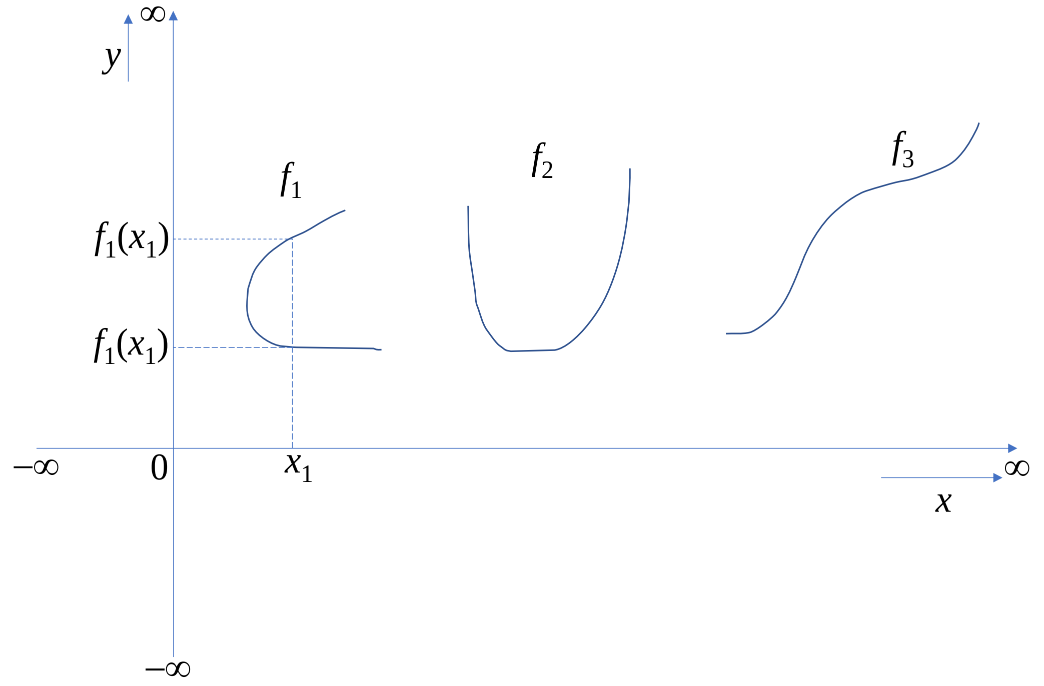
Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής

Μία οποιαδήποτε συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής ορίζεται πάνω στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Το πεδίο ορισμού της περιέχεται στον οριζόντιο άξονα των x και μπορεί να είναι όλος ο άξονας (δηλ. όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών R) ή ένα υποσύνολο αυτού (δηλ. ένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων). Αντίστοιχα, το πεδίο τιμών της περιέχεται στον κάθετο άξονα των y και μπορεί να είναι όλος ο άξονας (δηλ. όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών R) ή ένα υποσύνολο αυτού (δηλ. ένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων).

Από εδώ και πέρα, όταν λέμε συνάρτηση εννοούμε συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Στο Σχ. 2 φαίνονται τρεις περιπτώσεις αντιστοιχίσεων, εκ των οποίων η f_1 δεν είναι συνάρτηση ενώ οι f_2 και f_3 είναι συναρτήσεις.



Σχήμα 2. Η f_1 δεν είναι συνάρτηση ενώ οι f_2 και f_3 είναι συναρτήσεις.

Εύρεση Πεδίου Ορισμού μιας Συνάρτησης

Το πεδίο ορισμού (ΠΟ) καθορίζεται από τον τύπο της συνάρτησης και πρέπει να περιέχει όλα τα x για τα οποία ορίζεται (δηλ. υπάρχει) η συνάρτηση, και άρα έχει υπόσταση.

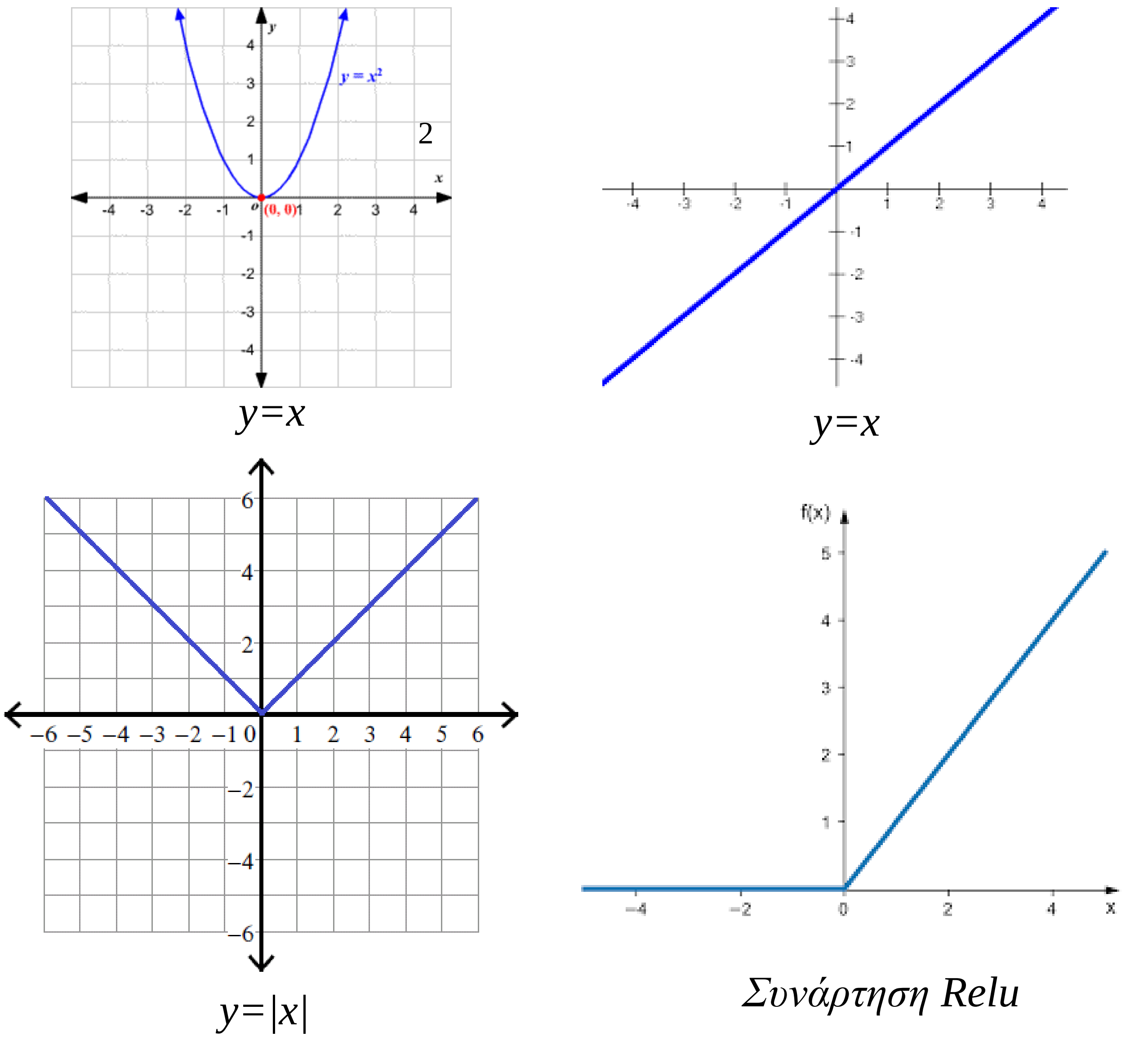
Παραδείγματα

1) Το ΠΟ της $f(x) = x$ είναι προφανώς όλο το R (δηλ. όλος ο οριζόντιος άξονας των x).
2) Το ΠΟ της $f(x) = 1/x$ είναι όλο το R εκτός του μηδενός, $A = (-\infty,\ 0) \cup (0, +\infty)$.
3) Το ΠΟ της $f(x) = \sqrt{x}$ είναι το $A = [0, \infty)$ γιατί η ρίζα υφίσταται μόνο για $x \geq 0$.
4) Το ΠΟ της $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ είναι το $A = [-1, 1]$ γιατί θα πρέπει $1 - x^2 \geq 0$ που σημαίνει ότι $x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης οπτικοποιεί την σχέση που υποδηλώνει η συνάρτηση.

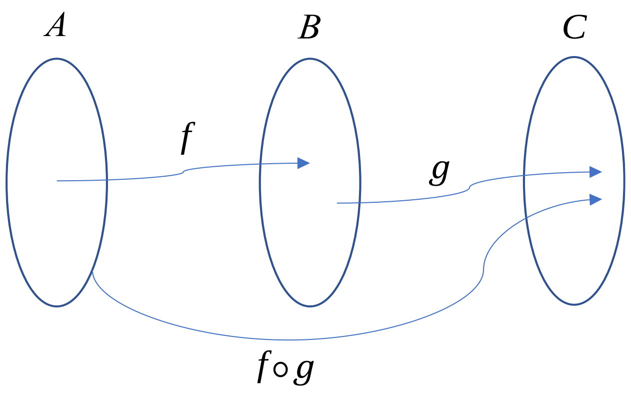
Στο Σχ. 3 φαίνονται τέσσερα παραδείγματα γραφικών παραστάσεων.



Σχήμα 3. Γραφικές παραστάσεις διαφόρων συναρτήσεων, όπου η απόλυτη τιμή δίνεται από την συνάρτηση $y = \begin{cases} x, & αν \quad x \geq 0 \\ -x, & αν \quad x < 0 \end{cases}$ και η Relu ως $y = \begin{cases} x, & αν \quad x \geq 0 \\ 0, & αν \quad x < 0 \end{cases}$

Σύνθετες Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to C$ ονομάζονται σύνθετες όταν το πεδίο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού της g. Τότε, η σύνθεσή τους είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το C, και γράφεται ως $f \circ g: A \to C$. Η σχέση αυτή φαίνεται στο Σχ. 4.



Σχήμα 4. Σύνθεση συναρτήσεων.

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τα εξής:

$\forall x \in A \Rightarrow y = f(x) \in B \;\; και \;\; \forall y \in B \Rightarrow z = g(y) \in C$

Προσέξτε ότι στις παραπάνω εξισώσεις $y = f(x)$ και άρα $g(y) = g(f(x))$. Οπότε όλα τα παραπάνω σημειώνονται ως εξής: $\forall x \in A \Rightarrow z = g(f(x)) \in C$

Αυτό σημαίνει ότι: $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

Παρατήρηση: Προσέξτε ότι όταν υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} μιας συνάρτησης f τότε $f^{-1}(f(x))$ είναι η σύνθεση των δύο και δίνει πάντα: $f^{-1}(f(x)) = x$

Παραδείγματα:

1). Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ $με\ x \geq 0$, $g(x) = x/4$ και $h(x) = 4x - 8$.

Μπορούμε δημιουργήσουμε τις παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις:

(α) $(g \circ h)(x) = h\big(g(x)\big) = 4g(x) - 8 = 4\,\frac{x}{4} - 8 = x - 8$

(β) $(f \circ g \circ h)(x) = h\left(g\big(f(x)\big)\right) = 4g\big(f(x)\big) - 8 = 4\frac{f(x)}{4} - 8 = \sqrt{x} - 8$

(γ) $(h \circ f \circ g)(x) = g\left(f\big(h(x)\big)\right) = \frac{1}{4} f\big(h(x)\big) = \frac{1}{4}\sqrt{h(x)} = \frac{1}{4}\sqrt{4x - 8}$

όπου θα πρέπει να ισχύει ότι $4x - 8 \geq 0$

2). Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x \neq 0$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ με $x + 2 > 0$. Τότε

(α) $(g \circ f)(-1) = f\big(g(-1)\big) = \frac{1}{g(-1)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(-1)+2}}} = 1$

(β) $(f \circ g)(2) = g(f(2)) = \frac{1}{\sqrt{f(2)+2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

Άσκηση

1). Να βρεθούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων: (α) $f(x) = x^2$ με $x > 0$, (β) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, (γ) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

Λύση:

Τα βήματα για τον υπολογισμό της αντίστροφης f^{-1} μιας συνάρτησης $f: A \to B$ είναι τα εξής:

Βήμα 1). Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της f.

Βήμα 2). Επιλύουμε την εξίσωση της συνάρτησης ως προς x. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού B της καινούργιας συνάρτησης.

Βήμα 3). Αν τα σύνολα A και B υπάρχουν τότε η αντίστροφη συνάρτηση υπάρχει και είναι η $f^{-1}: B \to A$, και η εξίσωση που την περιγράφει είναι αυτή που υπολογίστηκε στο Βήμα 2.

α) $y = f(x) = x^2$. Το πεδίο ορισμού της f δίνεται από την εκφώνηση της άσκησης και είναι το διάστημα $A = (0, \infty)$ (δηλ. x>0). Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς x, παίρνουμε,

$$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{y}} \overset{x>0}{\Longrightarrow} x = \sqrt{\frac{1}{y}}$$

Άρα, η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y}}$. Παρατηρήστε ότι θα πρέπει να ισχύει $y > 0$ για να ορίζεται η παραπάνω συνάρτηση. Οπότε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το διάστημα $B = (0, \infty)$ και γράφουμε: $f^{-1}: B \to A$ με $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

Άσκηση (συνέχεια)

β) $y = f(x) = \frac{1}{x^3}$. Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το R εκτός από το 0, $x \neq 0$, και άρα $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Λύνοντας την εξίσωση της συνάρτησης ως προς x παίρνουμε,

$$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{y}}$$

Άρα, η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{1}{y}}$. Για να ορίζεται η εν λόγω συνάρτηση θα πρέπει $y \neq 0$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το διάστημα $B = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ και γράφουμε

$$f^{-1}: B \to A \ \text{ με } \ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

(γ) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση θα πρέπει $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι όλο το R εκτός από το -3, $A = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$. Λύνοντας την εξίσωση της συνάρτησης ως προς χ παίρνουμε,

$$y = f(x) = \frac{2x+1}{x+3} \Rightarrow y(x+3) = 2x+1 \Rightarrow yx + 3y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x - yx = 3y - 1 \Rightarrow (2-y)x = 3y - 1 \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2-y}$$

Για να έχει υπόσταση η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει $2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 2$. Εν κατακλείδι, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το διάστημα $B = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ και γράφουμε,

$$f^{-1}: B \to A \ \text{ με } \ f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2-x}$$

Ασκήσεις προς λύση

1). Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ (β) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ (γ) $\sqrt{|x-1|}$

2). Αν η $f(x)$ είναι περιττή τότε τι είναι η $g(x) = f(x) - 2$; Αν η $f(x)$ είναι άρτια τότε τι είναι η $g(x)$

3). Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;

(α) $f(x) = x$ (β) $f(x) = x^2$ (γ) $f(x) = x^2 + a$ (δ) $f(x) = x^3$

(e) $f(x) = x^{2k+1}$ όπου k ακέραιος (ζ) $f(x) = x^{2k}$ όπου k ακέραιος

4). Έστω η συνάρτηση $f: A \to B$ με $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, , όπου $c \neq 0$ και $ad - bc \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη (δηλ., 1-1).

(β) Βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(γ) Βρείτε την αντίστροφή της και το πεδίο ορισμού της.

5). Έστω *X*=*Y*=*R*, όπου *R* είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και η συνάρτηση $f: X \to Y$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Να δείξετε τα παρακάτω:

(α) Η f είναι αμφιμονοσήμαντη

(β) Το πεδίο ορισμού της είναι το $f(X) = (-1, 1)$

(γ) Η αντίστροφη συνάρτηση της δίνεται από την παρακάτω εξίσωση,

$$f^{-1}(x) = \frac{y}{1-|y|}$$

Μονοτονία Συνάρτησης

Υπάρχουν τέσσερα είδη μονοτονίας μιας συνάρτησης $f\colon A \rightarrow B$

(α) Αύξουσα συνάρτηση: $\forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \leq x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$

(β) Γνησίως αύξουσα συνάρτηση: $\forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$

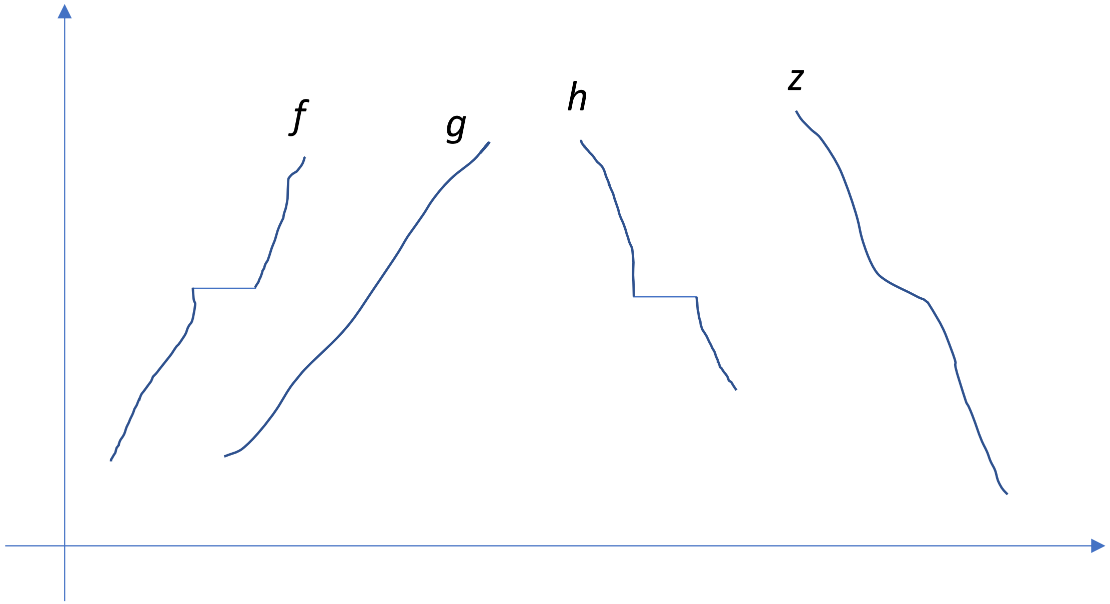
(γ) Φθίνουσα συνάρτηση: $\forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \geq x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$

(δ) Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση: $\forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Μία συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζεται μονότονη.

Μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ονομάζεται γνησίως μονότονη.

Στο Σχ. 5 φαίνονται οι παραπάνω τέσσερις περιπτώσεις μονοτονίας.



Σχήμα 5. Μονότονες συναρτήσεις: η f είναι αύξουσα, η g είναι γνησίως αύξουσα, η h είναι φθίνουσα και η z είναι γνησίως φθίνουσα.

Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

Μονώνυμα - Πολυώνυμα

Οι παραστάσεις της μορφής $a\,x^{\nu}$,

όπου $a \epsilon R$ και $\nu \epsilon N$, λέγονται

μονώνυμα του x.

π.χ. $3x^2$, $-4x^5$, $2x$, $1=1x^0$

Οι παραστάσεις της μορφής

$a_\nu\, x^{\nu} + a_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,

όπου α_ν, $\alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1$, $\alpha_0 \epsilon R$ και $\nu \epsilon N$,

λέγονται *πολυώνυμα του x*

π.χ. $2x^3-3x+5$, x^2-3x+2.

Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση της μορφής

$p(x) = a_\nu\, x^{\nu} + a_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

ονομάζεται πολυωνυμική συνάρτηση.

Παρατηρήσεις:

- Το πεδίο ορισμού μια πολυωνυμικής συνάρτησης είναι το *σύνολο των πραγματικών αριθμών*.
- Οι αριθμοί α_ν, $\alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1$, α_0 λέγονται *συντελεστές* του πολυωνύμου
- Οι παραστάσεις $\alpha_\nu x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}, \ldots, \alpha_1 x$, α_0 λέγονται *όροι* του πολυωνύμου. Ειδικότερα ο α_0 λέγεται *σταθερός ορός* του πολυωνύμου
- Προτιμούμε να γράφουμε τους *όρους* σε φθίνουσα σειρά, δηλαδή από τη μεγαλύτερη δύναμη προς την μικρότερη. Δεν είναι όμως απαραίτητο
- *Μηδενικό πολυώνυμο* είναι εκείνο που όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι με μηδέν: $0+0x+0x^2+\ldots=0$.
- *Σταθερό πολυώνυμο* είναι εκείνο που έχει μόνο μία πραγματική τιμή για κάθε x. Για παράδειγμα $p(x)=5$. Προφανώς και το μηδενικό πολυώνυμο είναι σταθερό.

Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

Βαθμός πολυωνύμου

Βαθμός ενός πολυώνυμου *ο μεγαλύτερος εκθέτης* του x.

Συμβολίζεται με $\deg(p(x))$.

Για παράδειγμα:

$$p(x) = 2x^5 - 6x^2 + 3x - 2 \Rightarrow \deg\big(p(x)\big) = 5$$

$$q(x) = -x^3 + 2x + 1 \Rightarrow \deg(q(x)) = 3$$

- Το σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
- Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

Ρίζα Πολυωνυμικής Συνάρτησης

Ο αριθμός ρ λέγεται ***ρίζα*** *του πολυωνύμου $p(x)$*

αν και μόνο αν $p(\rho)=0$.

πχ. το 1 είναι ρίζα του $p(x) = x^3+x-2$ εφόσον $p(1)=0$
το 3 είναι ρίζα του $h(x) = x^2-2x-3$ εφόσον $h(3)=0$
το $g(x)=x^2+1$ δεν έχει ρίζες στο R εφόσον $x^2 + 1 \neq 0$

για κάθε x πραγματικό.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυώνυμο ν βαθμού ***έχει το πολύ ν ρίζες στο R***.

Ρητές Συναρτήσεις

*Η **ρητή συνάρτηση** είναι το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων.*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Πεδίο ορισμού της ρητής συνάρτησης είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών εκτός των ριζών του πολυωνύμου $q(x)$.

Παράδειγμα:

$$Αν\ p(x) = -x^3 + 2x + 1\ \ και\ q(x) = \ x^2 - 1\ \ τότε$$

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1}\ , x\,\epsilon(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty) = R - \{-1, 1\}$$

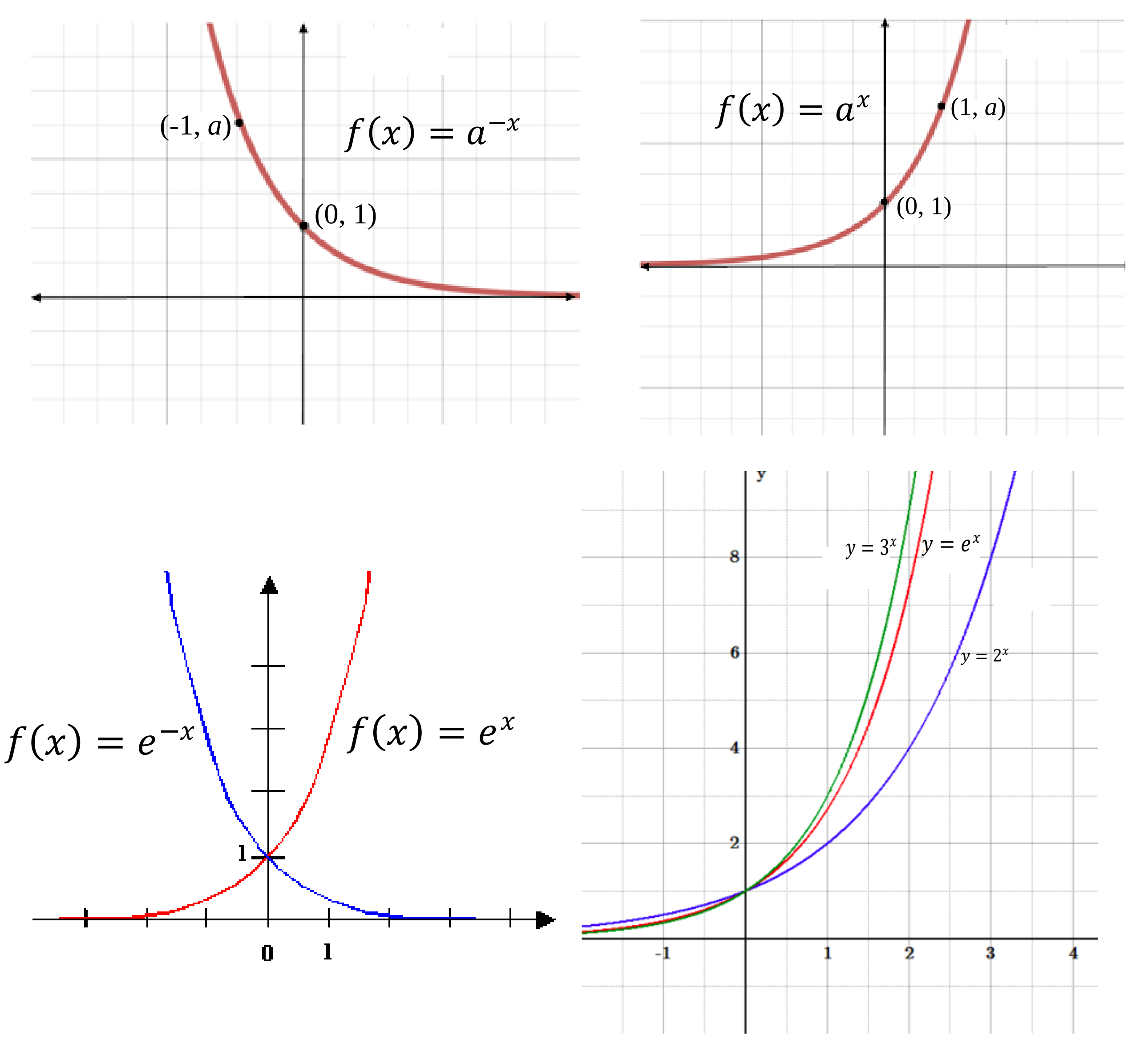
Εκθετικές Συναρτήσεις

Ορισμός:

Έστω α ένας θετικός αριθμός. Ορίζεται μία συνάρτηση f η οποία σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζει τον αριθμό α^x , δηλαδή έχει τύπο

$$f(x) = \alpha^x$$

Όταν $\alpha \neq 1$ η συνάρτηση f λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α.
Για $\alpha = 1$ τότε $f(x) = 1$ για κάθε $x \epsilon R$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή και δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.



Σχήμα 6. Διάφορες Εκθετικές Συναρτήσεις

Το πεδίο ορισμού της εκθετικής συναρτήσεις είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών R.

- Για $\alpha > 1$ η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
- Για $0 < \alpha < 1$ η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e , δηλαδή ησυνάρτηση $f(x) = e^x$ εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές και ονομάζεται απλώς **εκθετική συνάρτηση**.

Ο αριθμός e, η αλλιώς αριθμός του Euler, είναι μια περίφημη μαθηματική σταθερά και ισούται με περίπου 2.71.

Λογάριθμοι

Ορισμός:

Έστω α ένας θετικός αριθμός με $\alpha > 1$ και y ένας επίσης θετικός αριθμός.
Λογάριθμος του αριθμού y με βάση τον α λέγεται η **μοναδική λύση** της εξίσωσης

$$\alpha^x = y$$

Η οποία είναι η εξής: $x = log_\alpha(y)$

Συμβολίζεται και ως $log_\alpha y$. Επομένως ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^x = y \Leftrightarrow x = log_\alpha y$$

Με άλλα λόγια: Λογάριθμος του αριθμού y με βάση τον α λέγεται ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε τον y.

Ιδιότητες

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε $\forall x \in R$ ισχύουν τα παρακάτω:

- $\log_\alpha 1 = 0$
- $\log_\alpha a = 1$
- $\log_\alpha a^x = x$

Φυσικός Λογάριθμος

Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού y με βάση τον αριθμό e ονομάζεται φυσικός λογάριθμος και συμβολίζεται με lny αντί για $log_e y$.

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = ln\, y$$

Ιδιότητες (Φυσικών) Λογαρίθμων:

Για κάθε $a, b > 0\ και\ k \in R$ ισχύει:

- $ln\, ab = ln\, a + ln\, b.$
- $ln \frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b.$
- $ln\, a^k = k\, ln\, a$

Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω α ένας θετικός αριθμός με $\alpha \neq 1$

Ορίζεται μία συνάρτηση f η οποία σε κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζει τον αριθμό $log_\alpha x$, δηλαδή έχει τύπο:

$f(x) = log_\alpha x$

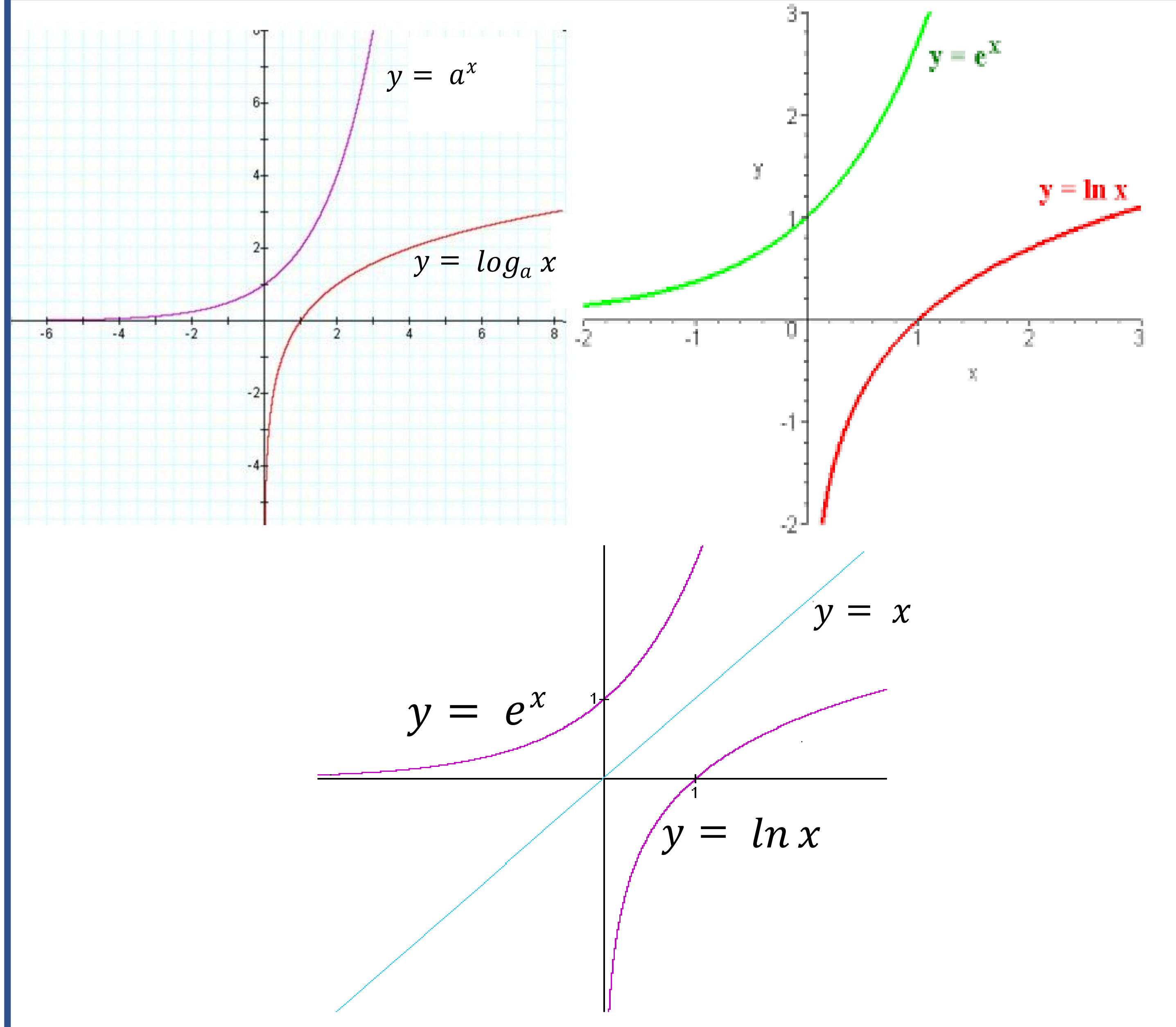
Η συνάρτηση f λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α**

Πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών

$A = (0, +\infty)$

Για τον φυσικό λογάριθμο η αντίστοιχη συνάρτηση είναι

$f(x) = ln\, x$



Σχήμα 7. Διάφορες Λογαριθμικές Συναρτήσεις

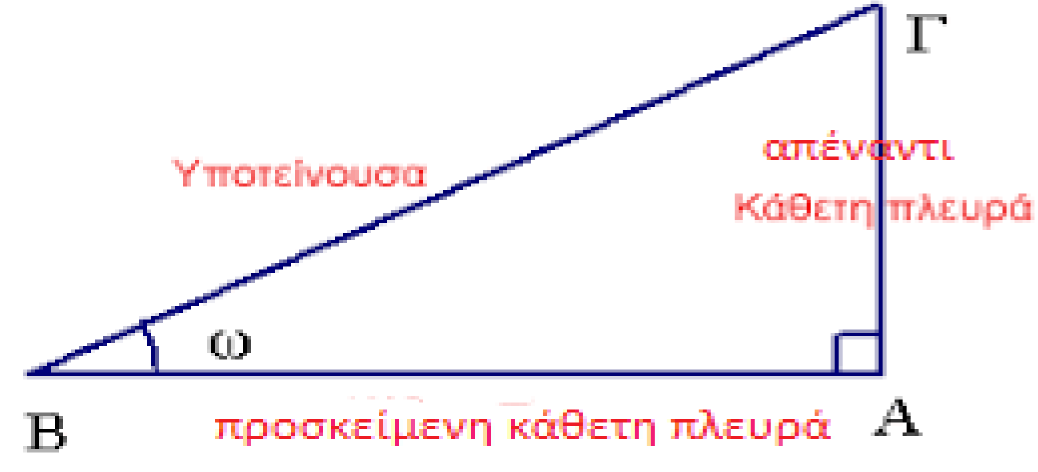
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Έστω $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($A=90^0$) και ω μια οξεία γωνιά του τότε ορίζουμε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς.

- $\sin\omega = \dfrac{\alpha\pi\varepsilon\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}{\upsilon\pi\sigma\tau\varepsilon\iota\nu\sigma\upsilon\sigma\alpha}$
- $\cos\omega = \dfrac{\pi\rho\sigma\sigma\kappa\varepsilon\iota\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}{\upsilon\pi\sigma\tau\varepsilon\iota\nu\sigma\upsilon\sigma\alpha}$
- $\tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega} = \dfrac{\alpha\pi\varepsilon\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}{\pi\rho\sigma\sigma\kappa\varepsilon\iota\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}$
- $\cot\omega = \dfrac{\cos\omega}{\sin\omega} = \dfrac{\pi\rho\sigma\sigma\kappa\varepsilon\iota\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}{\alpha\pi\varepsilon\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}$

- $\sin\omega = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$
- $\cos\omega = \dfrac{AB}{B\Gamma}$
- $\tan\omega = \dfrac{A\Gamma}{AB}$
- $\cot\omega = \dfrac{AB}{A\Gamma}$



Σχήμα 8. Πλευρές και γωνίες Ορθογώνιου Τριγώνου

Περιοδική Συνάρτηση

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.
Η f είναι **περιοδική** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει :

- $x + T \in A$ και $x - T \in A$.
- $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

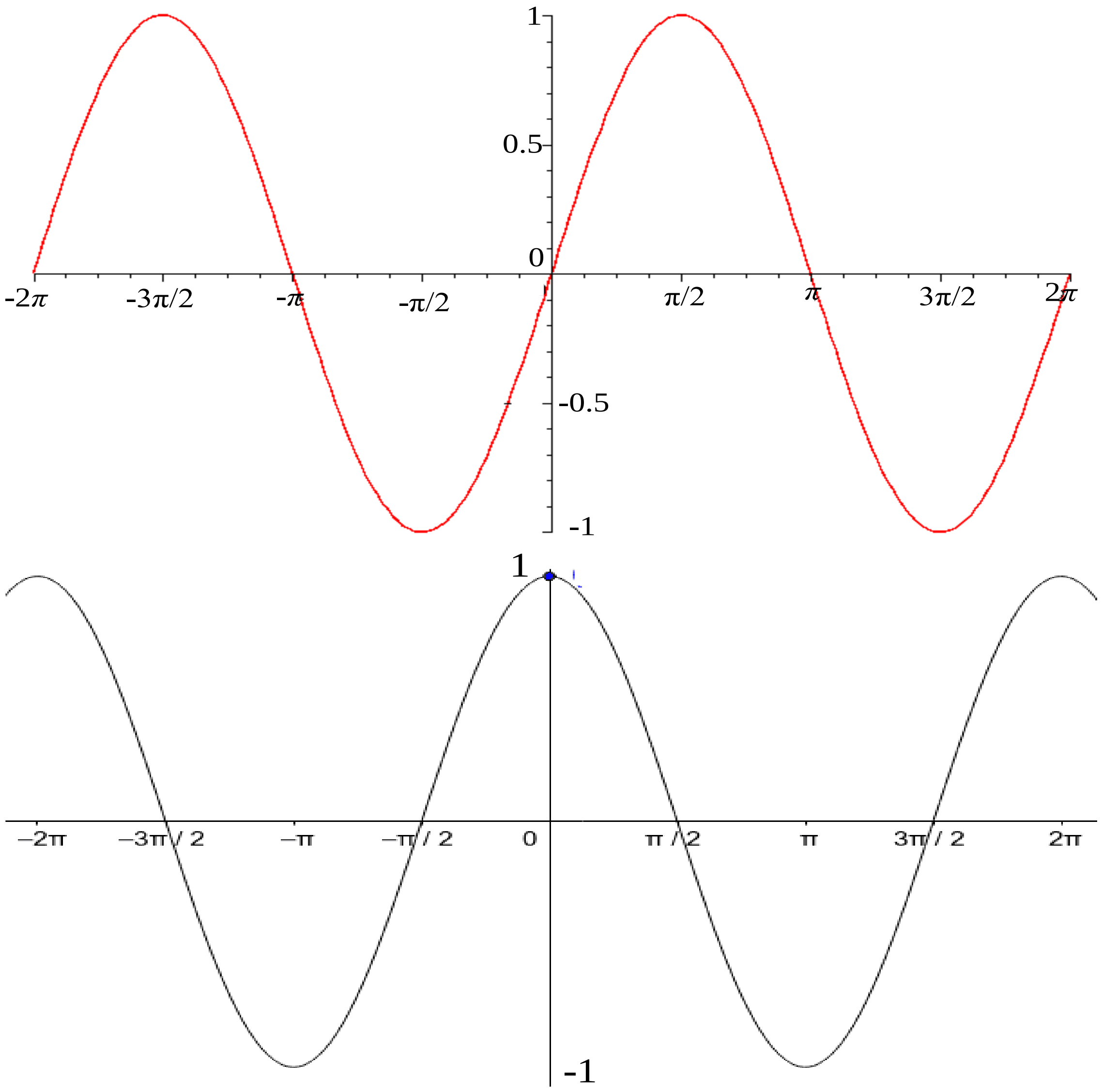
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Συνάρτηση Ημίτονου: $f(x) = sin\ x$

- Έχει πεδίο ορισμού το R.
- Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$
- Η μέγιστη τιμή είναι το 1 και η ελάχιστη το -1.
- Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα [-1, 1].

Συνάρτηση Συνημίτονου $f(x) = cos\ x$

- Έχει πεδίο ορισμού το R.
- Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$
- Η μέγιστη τιμή είναι το 1 και η ελάχιστη το -1.
- Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα [-1, 1].



Σχήμα 8. Συναρτήσεις *sinx* (πάνω) και *cosx* (κάτω).

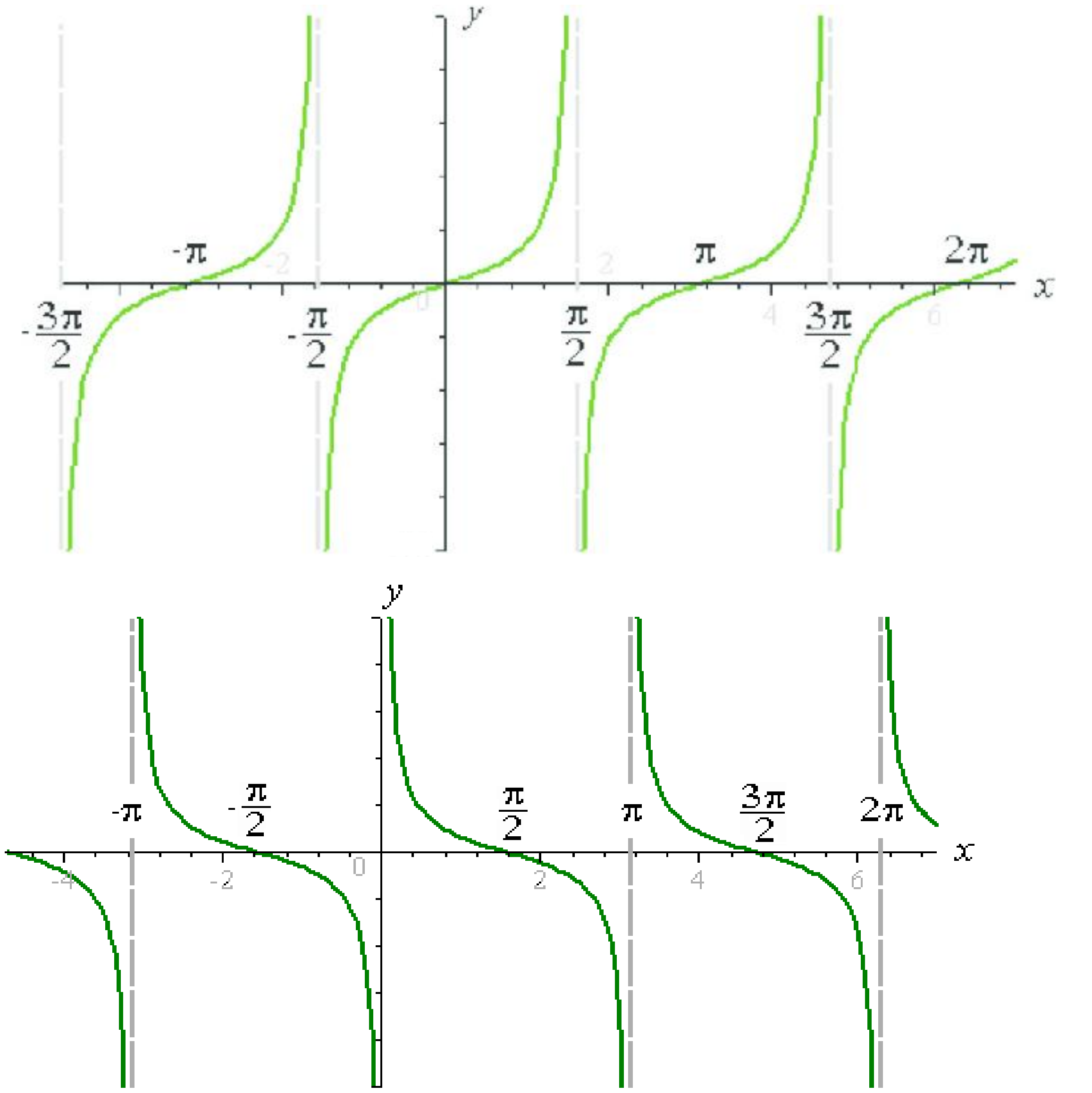
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Συνάρτηση Εφαπτομένης $f(x) = tan\ x$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\{x \epsilon R |\ x \neq \ k\pi + \ \pi/2, \}$
- Είναι περιοδική με περίοδο Τ = π.
- Το σύνολο τιμών είναι το R.

Συνάρτηση Συνεφαπτομένης $f(x) = cot\ x$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\{x \epsilon R |\ x \neq \ k\pi \}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
- Το σύνολο τιμών είναι το R.



Σχήμα 9. Συναρτήσεις *tanx* (πάνω) και *cotx* (κάτω).