

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(x-2)$.

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να ορίσετε την συνάρτηση $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
3. Να ορίσετε την συνάρτηση $r(x) = (g \circ f)(x)$.
4. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.
5. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f .
6. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x-3$.

Λύση

1. Για την συνάρτηση f πρέπει:
 $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$.

Για την συνάρτηση g πρέπει:
 $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$.

2. Για την συνάρτηση h πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ x \in D_g \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει διότι:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln 1 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

Ο τύπος της h είναι:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(x-2)}, x \in (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

3. Για την συνάρτηση r πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (5, +\infty).$$

Ο τύπος της r είναι:

$$r(x) = (g \circ f)(x) = \ln(\sqrt{x-1}-2), x \in (5, +\infty).$$

4. Έστω $a, b \in D_f$ με $f(a) = f(b) \Leftrightarrow$
 $\sqrt{a-1} = \sqrt{b-1} \Leftrightarrow$
 $a-1 = b-1 \Leftrightarrow$
 $a = b.$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

5. Για $x > 1$ λύνω την εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow$
 $\sqrt{x-1} = y \Leftrightarrow$ Για να έχει λύση πρέπει $y \geq 0.$
 $x-1 = y^2 \Leftrightarrow$
 $x = y^2 + 1$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι:

$$f^{-1}(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0.$$

6. Για $x \geq 1$ έχουμε $f(x) = x-3 \Leftrightarrow$
 $\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x \geq 3$
 $x-1 = (x-3)^2 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 2(\text{απορρίπτεται}) \text{ ή } x = 5(\text{δεκτή}).$