ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Γεώργιος Τσεκούρας

Καθηγητής
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Η Έννοια του Συνόλου

Σύνολο: μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων, τα οποία έχουν μία ή περισσότερες κοινές ιδιότητες. Τα αντικείμενα ονομάζονται στοιχεία του συνόλου και το κάθε αντικείμενο λαμβάνεται υπόψη μόνο μία φορά ως στοιχείο του συνόλου.

Συμβολισμός: *Χρήση αγκίστρων* $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο A: $\alpha \in A$

Το στοιχείο δ δεν ανήκει στο σύνολο A: $\delta \notin A$

Διάταξη: Τα στοιχεία ενός συνόλου, εκτός αν δηλωθεί διαφορετικά, ΔΕΝ είναι διατεταγμένα, δηλ. $A=\{\alpha, \beta, \gamma\} =\{\gamma, \alpha, \beta\}$

Παραδείγματα διατεταγμένων συνόλων: Είναι τα διαστήματα των πραγματικών αριθμών

Κενό σύνολο

- Είναι το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζεται ως { } ή $\varnothing$
- Το σύνολο $\{\varnothing\}$ ΔΕΝ είναι κενό, γιατί έχει ένα στοιχείο, το οποίο είναι το κενό σύνολο

Σύνολα που περιέχουν άλλα σύνολα

Ένα σύνολο μπορεί να έχει ως στοιχεία του και άλλα σύνολα: $A=\{\delta, \tau, \{\alpha, \beta\}, \{\rho, \sigma, \varphi\}, \zeta, \chi\}$

Η Έννοια του Συνόλου

❑ Πληθάριθμος ή Πληθικός Αριθμός Συνόλου

- Πληθικός Αριθμός ή Πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι ο αριθμός των στοιχείων που περιέχει
- Συμβολίζεται ως $card(A)$

Παράδειγμα 1: $A=\{\alpha,\sigma,\upsilon,\tau\} \Rightarrow card(A)=4$

Παράδειγμα 2: $B=\{\alpha,\rho,\{\rho,\sigma\},\psi,v,\{\varsigma,o,\zeta,\tau\}\} \Rightarrow card(B)=6$

Παράδειγμα 3: $A=\{1,4,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} \Rightarrow card(A)=?$

Η Έννοια του Συνόλου

❑ Τρόποι Περιγραφής Συνόλων

- Απλά γράφουμε μέσα σε αγκύλες όλα τα στοιχεία του συνόλου, κάτι που δεν είναι βολικό ειδικά στην περίπτωση που το σύνολο περιέχει πολλά στοιχεία

- Περιγράφουμε το σύνολο με βάση την κοινή ιδιότητα ή τις κοινές ιδιότητες που έχουν τα στοιχεία

$$A=\{x \,|\, x\, \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \mathrm{I}\} \qquad A=\{x : x\, \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \mathrm{I}\}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Τα σύμβολα της κάθετης γραμμής “|” και της άνω-κάτω τελείας “:” εκφράζουν την έννοια του “τέτοιο ώστε”, και μπορούν να χρησιμοποιούνται ισοδυνάμως (γράφουμε δηλ. όποιο θέλουμε εμείς).

<u>Παραδείγματα:</u>

1). Να γραφεί το σύνολο A των γραμμάτων της Ελληνικής Αλφαβήτου

Τρόπος 1: $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,...,\psi,\omega\}$

Τρόπος 2: $A=\{x \,|\, x \in \mathrm{E}\lambda\lambda\eta\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \mathrm{A}\lambda\varphi\acute{\alpha}\beta\eta\tau o\}$

2). Να γραφεί το σύνολο των φωνηέντων της Ελληνικής Αλφαβήτου

Τρόπος 1: $A=\{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\}$

Τρόπος 2: $A=\{x \in \mathrm{E}\lambda\lambda\eta\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \mathrm{A}\lambda\varphi\acute{\alpha}\beta\eta\tau o \,|\, x\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \varphi\omega\nu\acute{\eta}\varepsilon\nu\}$

Η Έννοια του Συνόλου

❑ Ποσοδείκτες

Οι ποσοδείκτες που χρησιμοποιούνται τόσο στην θεωρία συνόλων όσο και στην ολότητα των μαθηματικών έχουν καταβολές στην *κατηγορική λογική*. Υπάρχουν οι εξής ποσοδείκτες:

- Για κάθε: $\forall$
- Υπάρχει: $\exists$

Παράδειγμα

- Το σύνολο των γραμμάτων της Ελληνικής αλφαβήτου: $A = \{x \mid x \in \text{Ελληνική Αλφάβητο}\}$
- Το σύνολο των φωνηέντων της Ελληνικής αλφαβήτου: $B = \{x \in \text{Ελληνική Αλφάβητο} \mid x \text{ είναι φωνήεν}\}$

Με βάση τα παραπάνω σύνολα μπορούμε να συντάξουμε τις παρακάτω προτάσεις κατηγορικής λογικής:

Πρόταση 1: "*Αν ένα στοιχείο ανήκει στο σύνολο Β τότε το στοιχείο αυτό είναι φωνήεν*"

Η πρόταση υπονοεί ότι για οποιοδήποτε στοιχείο (άρα για κάθε στοιχείο) που ανήκει στο σύνολο B συμπεραίνουμε (άρα συνεπάγεται) ότι το στοιχείο αυτό είναι φωνήεν. Αυτό γράφεται σε μαθηματική μορφή ως εξής:

$$\forall x \in B \Rightarrow x \text{ είναι φωνήεν}$$

Πρόταση 2: "*Το σύνολο Α περιέχει τουλάχιστον ένα φωνήεν*"

$$\exists x \in A : x \in B$$

Σχέσεις Σύγκρισης Μεταξύ Συνόλων

Υπάρχουν τρεις σχέσεις οι οποίες συγκρίνουν δύο σύνολα κάθε φορά, οι οποίες ονομάζονται δυαδικές σχέσεις (binary relations) σύγκρισης μεταξύ συνόλων:

- Γνήσιο Υποσύνολο
- Υποσύνολο
- Ισότητα

❑ Γνήσιο Υποσύνολο

Το σύνολο B ονομάζεται *Γνήσιο Υποσύνολο* ενός συνόλου A όταν αποτελείται μόνο από κάποια και όχι από όλα τα στοιχεία του A και συμβολίζεται ως: $B \subset A$

❑ Υποσύνολο

Το σύνολο B ονομάζεται *Υποσύνολο* ενός συνόλου A όταν αποτελείται από στοιχεία του A και συμβολίζεται ως: $B \subseteq A$

Παρατήρηση: Ο τρόπος που ορίσαμε το Υποσύνολο υποδηλώνει ότι το B μπορεί να περιέχει και όλα τα στοιχεία του A

❑ Ισότητα

Δύο σύνολα A και B ονομάζονται ίσα όταν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και συμβολίζεται ως: $A=B$

Σχέσεις Σύγκρισης Μεταξύ Συνόλων

<u>Παρατήρηση</u>: Οι σχέσεις σύγκρισης συνόλων ονομάζονται και σχέσεις <u>διάταξης</u> και έχουν παρόμοια λειτουργία με τις σχέσεις “μικρότερο” (<) και “μικρότερο ή ίσο” ( ) μεταξύ αριθμών

Παραδείγματα:

1). Για να γίνει κατανοητή η διαφορά μεταξύ του $\in$ και του $\subset$, μελετάμε το παρακάτω παράδειγμα

Έστω το σύνολο $A=\left\{a,b,d,\{y,t\},\{\varnothing\},\left\{a,\{o,r\}\right\}\right\}$

Τότε οι παρακάτω σχέσεις υποδηλώνουν την σημασία των εν λόγω συμβόλων:

$$a\in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left\{a\right\}\subset A, \qquad b\in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \{b\}\subset A, \qquad d\in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left\{d\right\}\subset A$$

$$\{y,t\}\in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left\{\{y,t\}\right\}\subset A, \qquad \{\varnothing\}\in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left\{\{\varnothing\}\right\}\subset \mathrm{A}, \qquad \left\{a,\{o,r\}\right\}\in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left\{\left\{a,\{o,r\}\right\}\right\}\subset A$$

2). Κάποια από τα γνήσια υποσύνολα του $A=\left\{a,b,d,\{y,t\},\{\varnothing\},\left\{a,\{o,r\}\right\}\right\}$ είναι και τα παρακάτω:

$$\left\{a,b\right\}\subset A, \quad \left\{a,\, d\right\}\subset A, \quad \left\{a,\{y,t\},\{\varnothing\}\right\}\subset A, \quad \left\{\{y,t\},\{\varnothing\},\left\{a,\{o,r\}\right\}\right\}\subset A$$

Σχέσεις Σύγκρισης Μεταξύ Συνόλων

Μεθοδολογία Ι: Μαθηματική απόδειξη των δυαδικών σχέσεων σύγκρισης

Στην παρούσα μεθοδολογία θα αναπτύξουμε τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύουμε αν ένα σύνολο είναι γνήσιο υποσύνολο, υποσύνολο ενός άλλου συνόλου, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύουμε αν δύο σύνολα είναι ίσα.
Είναι προφανές ότι η διαδικασία τόσο για το γνήσιο υποσύνολο όσο και για το υποσύνολο είναι ίδιες. Οπότε θα ασχοληθούμε μόνο με το υποσύνολο.

Μεθοδολογία Ια). *Τρόπος απόδειξης του υποσυνόλου*
Έστω ότι έχουμε δύο σύνολα A και B και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $B \subseteq A$. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Βήμα 1). Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο x του B: $x \in B$
- Βήμα 2). Εκτελούμε μία σειρά από λογικά βήματα με βάση τα δεδομένα που έχουμε για τα δύο σύνολα A και B για να δούμε αν το στοιχείο x ανήκει και στο σύνολο Α: $x \in A$?
- Βήμα 3). Αν η απάντηση είναι ΝΑΙ τότε $B \subseteq A$

Και σε μαθηματικό συμβολισμό: $\text{Αν} \quad x \in B \Rightarrow x \in A \quad \text{Τότε} \quad B \subseteq A$

Μεθοδολογία Ιβ). *Τρόπος απόδειξης της ισότητας*
Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα αποδεικνύουμε με την Μεθοδολογία Ια το $B \subseteq A$
και στη συνέχεια ξαναεφαρμόζουμε την μεθοδολογία Ια για να δείξουμε το $A \subseteq B$. Αν ισχύουν και τα δύο τότε τα δύο σύνολα είναι ίσα

Και σε μαθηματικό συμβολισμό: $B \subseteq A \quad \textit{και} \quad A \subseteq B \Rightarrow A = B$

Ιδιότητες Υποσυνόλων

Ιδιότητα 1). $\forall A \ \textit{ισχύει ότι} \ A \subseteq A$

Ιδιότητα 2). $\forall A : A \neq \varnothing \ \Rightarrow \varnothing \subset A$

Ιδιότητα 3). Έστω A, B, C τρία σύνολα. Τότε ισχύει ότι:

$$A \subseteq B \quad \textit{και} \quad B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \subseteq C$$

Ιδιότητα 4). Για κάθε σύνολο A ισχύει ότι $A \not\subset A$

Δυναμοσύνολο ενός Συνόλου

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A ονομάζεται το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A συμπεριλαμβανομένου του κενού συνόλου και το ιδίου του συνόλου A. Συμβολίζεται ως $P(A)$.

Παραδείγματα

1). Αν $A=\{a\}$ τότε $P(A)=\{\{\alpha\},\varnothing\}$. Προσέξτε ότι: $card(A)=1$ και $card\left(P(A)\right)=2=2^1=2^{card(A)}$

2). Αν $A=\{a,b\}$ τότε $P(A)=\{\{\alpha\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}$. Προσέξτε ότι: $card(A)=2$ και $card\left(P(A)\right)=4=2^2=2^{card(A)}$

3). Αν $A=\{a,b,c\}$ τότε $P(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$

Προσέξτε ότι: $card(A)=3$ και $card\left(P(A)\right)=8=2^3=2^{card(A)}$

Από τα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι, για κάθε σύνολο A, πάντα ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

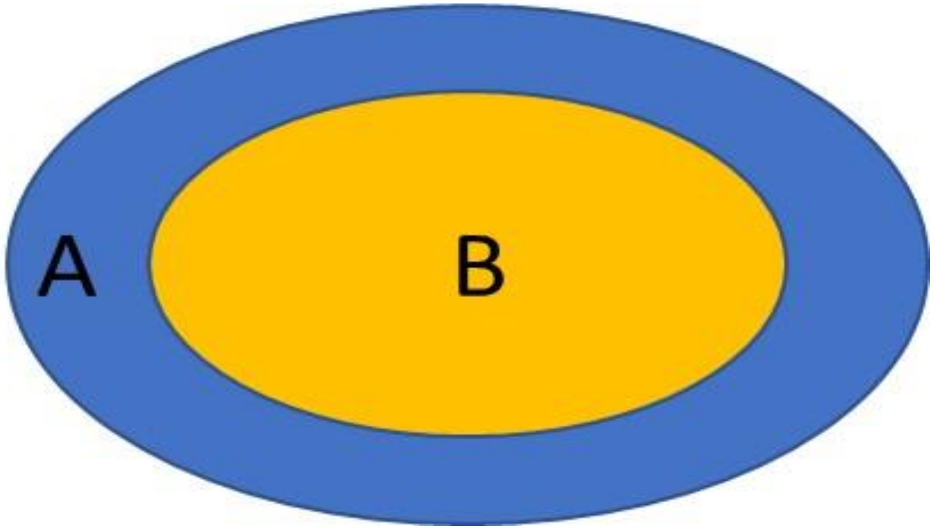
$$card\left(P(A)\right)=2^{card(A)}$$

Διαγράμματα Venn

- Τα διαγράμματα Venn είναι ένας απλός και βολικός τρόπος οπτικοποίησης των συνόλων με σχήματα.

- Τα βασικά σχήματα είναι η έλλειψη ή ο κύκλος.

- Το παρακάτω σχήμα δείχνει δύο σύνολα A και B όπου το A περιέχει το B πράγμα που σημαίνει ότι $B \subset A$



Πράξεις Μεταξύ Συνόλων

Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι δυαδικές. Δηλαδή μόνο δύο σύνολα εμπλέκονται κάθε φορά.
Οι βασικές πράξεις μεταξύ δύο συνόλων A και B και ο συμβολισμός τους δίνονται ως εξής:

- Ένωση $A \cup B$
- Τομή $A \cap B$
- Διαφορά $A - B$
- Συμμετρική Διαφορά $A \oplus B$

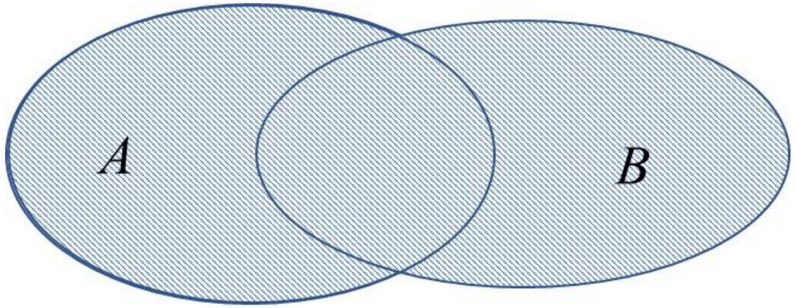
Πράξεις Μεταξύ Συνόλων: Ένωση

Ένωση δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B, απαριθμώντας το κάθε στοιχείο μόνο μία φορά. Η μαθηματική περιγραφή της είναι:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Παράδειγμα:
$$\left.\begin{aligned} A &= \{a, b, c, \{a, d, i\}, \{\varnothing\}\} \\ B &= \{a, y, c, \{a, i\}\} \end{aligned}\right\} A \cup B = \{a, b, c, y, \{a, i\}, \{a, d, i\}, \{\varnothing\}\}$$

Με χρήση διαγραμμάτων Venn (γραμμοσκιασμένη περιοχή)



$A \cup B$

Ιδιότητες Ένωσης

Ιδιότητα 1). $A \cup A = A$

Ιδιότητα 2). $A \cup \varnothing = A$

Ιδιότητα 3). $A \cup B = B \cup A$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

Ιδιότητα 4). $B \subseteq A \Rightarrow A = A \cup B$

Στην περίπτωση που έχουμε n σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $\Big\}$ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Στην περίπτωση που έχουμε *άπειρα* σύνολα $A_1, A_2, \ldots$ $\Big\}$ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Πράξεις Μεταξύ Συνόλων: Ένωση

Άσκηση: Θα αποδείξουμε την Ιδιότητα 4 της προηγούμενης διαφάνειας με την χρήση της Μεθοδολογίας Ι.

Η Ιδιότητα 4 μας λέει ότι αν $B \subseteq A$ τότε ισχύει ότι: $A = A \cup B$

Πρώτα πρέπει να δείξουμε το ευθύ $A \subseteq A \cup B$ και στη συνέχεια το αντίστροφο $A \cup B \subseteq A$

Ευθύ: Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο $x \in A$. Εξ' ορισμού, το στοιχείο αυτό ανήκει στην ένωση του *A* με οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Άρα θα ανήκει και στην ένωση του *A* με το *B*. Οπότε ισχύει ότι $x \in A \cup B$ και άρα $A \subseteq A \cup B$

Αντίστροφο: Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο $x \in A \cup \mathrm{B}$. Επειδή $B \subseteq A$, αυτό σημαίνει ότι σε κάθε περίπτωση το στοιχείο *x* ανήκει ΣΙΓΟΥΡΑ στο σύνολο *A*. Οπότε, αποδείξαμε ότι $x \in A$, πράγμα που απευθείας δηλώνει ότι $A \cup B \subseteq A$

Άρα η Ιδιότητα 4 ισχύει

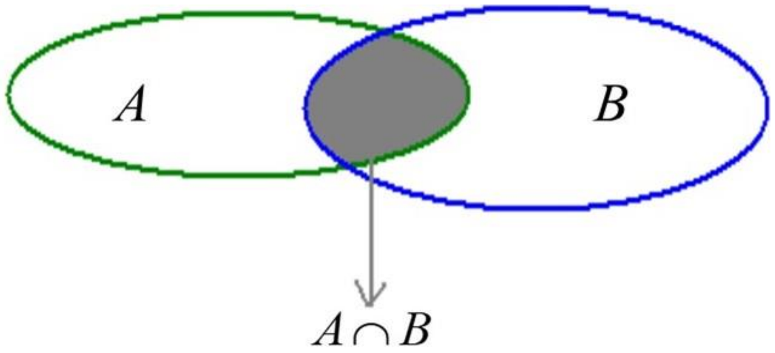
Πράξεις Μεταξύ Συνόλων: Τομή

Τομή δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων.
Η μαθηματική περιγραφή της είναι:

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \textit{και} \ x \in B\}$$

Παράδειγμα:
$$\left.\begin{array}{l} A = \{a,\ b, c, \{a, d, i\},\ \{\varnothing\}\} \\ B = \{a,\ y, c, \{a, i\}\} \end{array}\right\} A \cap B = \{a,\ c\}$$

Με χρήση διαγραμμάτων Venn
(γραμμοσκιασμένη περιοχή)



Ιδιότητες Ένωσης

Ιδιότητα 1). $A \cap A = A$

Ιδιότητα 2). $A \cap \varnothing = \varnothing$

Ιδιότητα 3). $A \cap B = B \cap A$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

Ιδιότητα 4). $B \subseteq A \Rightarrow B = A \cap B$

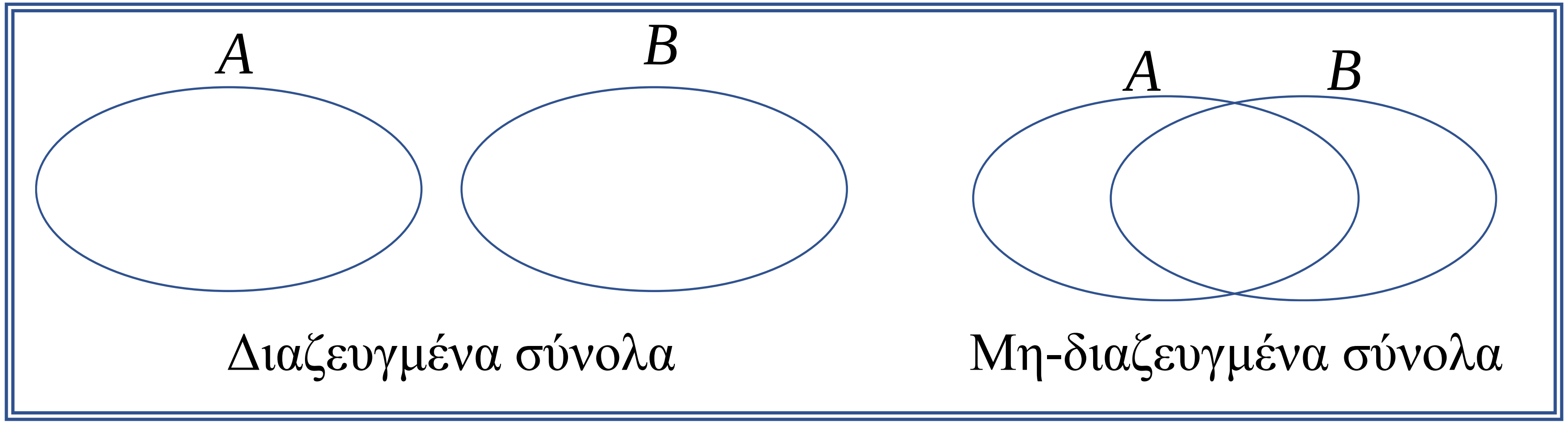
Στην περίπτωση που έχουμε n σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Στην περίπτωση που έχουμε *άπειρα* σύνολα $A_1, A_2, \ldots$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Πράξεις Μεταξύ Συνόλων: Τομή

Μία άμεση συνέπεια του ορισμού της πράξης της τομής είναι τα διαζευγμένα και τα μη-διαζευγμένα σύνολα

- Τα σύνολα Α και Β είναι διαζευγμένα όταν $A \cap B = \varnothing$
- Τα σύνολα Α και Β είναι μη-διαζευγμένα όταν $A \cap B \neq \varnothing$



Παράδειγμα 1: Διαζευγμένα σύνολα

$$\left.\begin{aligned} A &= \{a,\ b, c, \{a, d, i\},\ \{\varnothing\}\} \\ B &= \{d,\ y, t, \{a, i\}\} \end{aligned}\right\} A \cap B = \varnothing$$

Παράδειγμα 2: Μη-διαζευγμένα σύνολα

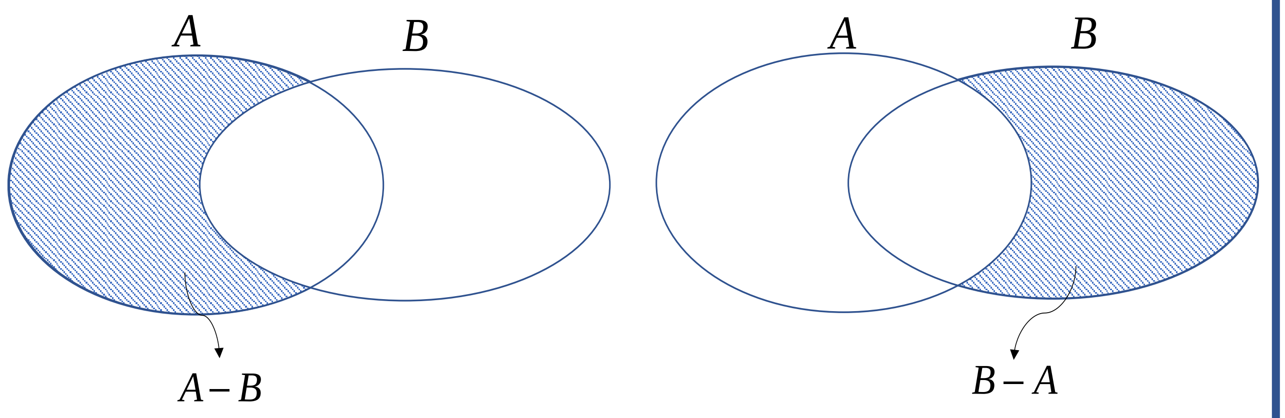
$$\left.\begin{aligned} A &= \{a,\ b, c, \{a, d, i\},\ \{\varnothing\}\} \\ B &= \{a,\ y, b, \{a, i\}\} \end{aligned}\right\} A \cap B = \{a, b\} \neq \varnothing$$

Πράξεις Μεταξύ Συνόλων: Διαφορά

Διαφορά του συνόλου A από το σύνολο B είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A τα οποία δεν ανήκουν στο B. Η μαθηματική περιγραφή της διαφοράς δίνεται ως εξής:

$$A-B=\{x : x\in A \;\text{και}\; x\notin B\}$$

Η Διαφορά συνόλων με διαγράμματα Venn (γραμμοσκιασμένη περιοχή)



Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{aligned} A&=\{a,\ b,c,\{a,d,i\},\ \{\varnothing\}\}\\ B&=\{a,\ y,c,\{a,i\}\}\end{aligned}\right\}\ A-B=\{b,\ \{a,d,i\},\{\varnothing\}\}$$

Παράδειγμα 2

$$\left.\begin{aligned} A&=\{a,\ b,c,\{a,d,i\},\ \{\varnothing\}\}\\ B&=\{a,\ y,c,\{a,i\}\}\end{aligned}\right\}\ B-A=\{y,\{a,i\}\}$$

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι τα σύνολα $A-B$ *και* $B-A$ *είναι διαζευγμένα*

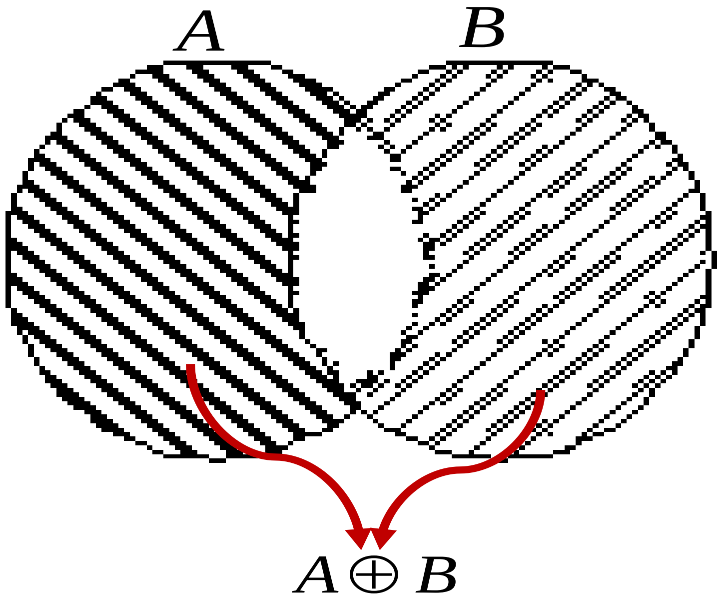
$$A-B\cap B-A=\varnothing$$

Πράξεις Μεταξύ Συνόλων: Συμμετρική Διαφορά

Συμμετρική Διαφορά μεταξύ δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A και του B, τα οποία όμως δεν ανήκουν στην τομή τους. Δηλαδή, είναι η διαφορά της ένωσης των δύο συνόλων από την τομή τους

$$A \oplus B = A \cup B - A \cap B = \{x : x \in A \ \ \text{και} \ \ x \in B \ \ \text{και} \ \ x \notin A \cap B\}$$

Η Συμμετρική Διαφορά συνόλων με διαγράμματα Venn (γραμμοσκιασμένη περιοχή)



Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι

$$A \oplus B = B \oplus A$$

Τύποι De Morgan

1). $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

2). $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Χρήση της Μεθοδολογίας Ι για την απόδειξη του **<u>πρώτου τύπου</u>** του De Morgan

Ευθύ: $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Έστω $x\in A\cup(B\cap C)$. Τότε $x\in A$ ή $x\in B\cap C$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το πρώτο, ότι δηλαδή $x\in A$.
Σε αυτή την περίπτωση το x ανήκει στην ένωση του A με οποιοδήποτε άλλο σύνολο, άρα και στην ένωση του A με το B αλλά ταυτόχρονα και στην ένωση του A με το C. Συνεπώς,

$$x\in A\cup B \ \ \textit{και} \ \ x\in A\cup C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

Άρα για την περίπτωση αυτή δείξαμε ότι $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $x\in B\cap C$.

Αυτό σημαίνει ότι το x ανήκει ταυτόχρονα και στο B και στο C

Άρα $x\in A\cup B \ \ \textit{και} \ \ x\in A\cup C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση αποδείξαμε ότι

$$\boxed{A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)}$$

Αντίστροφο: $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

Έστω ότι $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Αυτό σημαίνει ότι $x\in A\cup B \ \ \textit{και} \ \ x\in A\cup C$.

Προσέξτε ότι οι δύο αυτές περιπτώσεις συνδέονται με “και”, το οποίο ρητά υποδηλώνει ότι είτε το x θα ανήκει στο A είτε θα ανήκει ταυτόχρονα στο B και στο C.

Δηλαδή, $x\in A$ ή $x\in B\cap C$.

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $x\in A\cup(B\cap C)$.

Άρα $\boxed{(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C).}$

Συμπερασματικά: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Ασκήσεις

Άσκηση 1). Να αποδείξετε τον δεύτερο τύπο του De Morgan

Άσκηση 2). Να αποδείξετε τις παρακάτω παραστάσεις συνόλων:

α). $A = \left(A - B\right) \cup \left(A \cap B\right)$

β). $B = \left(B - A\right) \cup \left(A \cap B\right)$

γ). $A \cup B = \left(A - B\right) \cup \left(A \cap B\right) \cup \left(B - A\right)$